Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Solución Ayudantía 2
Aproximación afín y reglas de derivación
03/09/2022

En este taller trabajaremos con la definición de recta tangente para aproximar numéricamente el valor de alguna función en un punto dado. Posteriormente, aplicaremos las reglas de derivación para obtener la derivada de una función que se compone algebraicamente de otras. Finalmente, aplicaremos la regla de la cadena reiteradas veces para encontrar la derivada de una función que corresponde a composiciones de otras funciones.

Objetivos:

- Interpretar la definición de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto como una herramienta para encontrar una aproximación numérica.
- Aplicar las reglas de derivación para obtener la derivada de una función.

Ejercicios Propuestos

1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^{100}$.

   a) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(0, f(0))$.

   Solución: Recordemos inicialmente que las aproximaciones afines o rectas tangentes de una función h diferenciable en un punto $x = a$ son de la forma,

$$L(x) = h'(a)(x-a) + h(a).$$

   Ahora, como la función f es diferenciable para todo $\mathbb{R}$, pues es una función polinomial, en particular lo es para $x = 0$. Entonces la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(0, f(0))$ está dada por

$$\begin{aligned} L(x) &= f'(0)\cdot(x-0) + f(0) \\ &= 100(1+0)^{99}\cdot(x-0) + (1+0)^{100} \\ &= 100x + 1 \end{aligned}$$

$b)$ Utilice aproximación afín para estimar numéricamente el valor de $f(0.001)$.

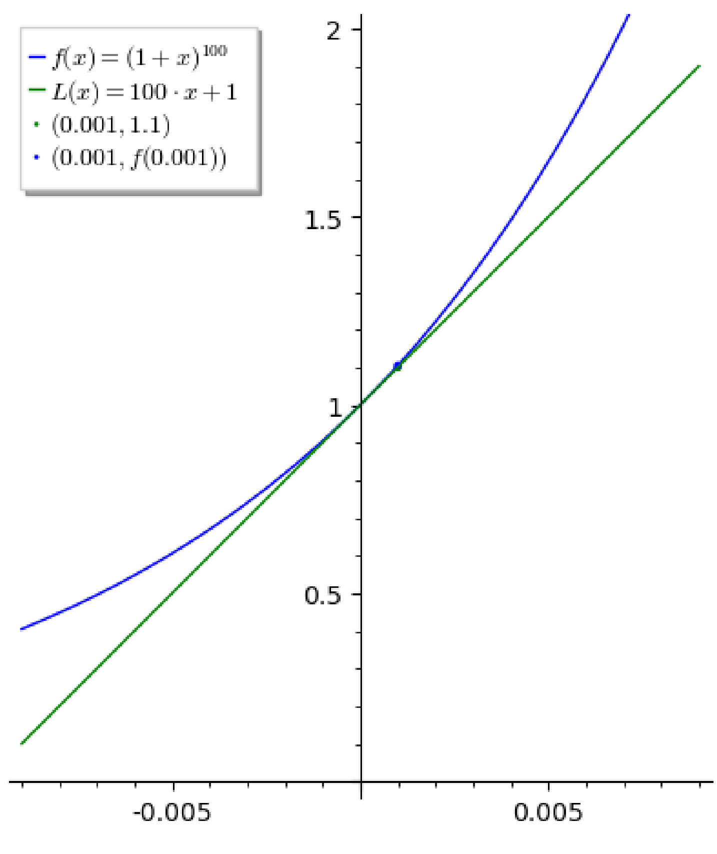
Solución: Ahora para encontrar la aproximación en $x = 0.001$, tendremos que utilizar la recta tangente $L(x)$ encontrada anteriormente para el valor $x = 0$, ya que la aproximación que llamamos afín, en este caso, genera buenas aproximaciones para valores cercanos al cero. Así

$$L(x) = 100x + 1,$$

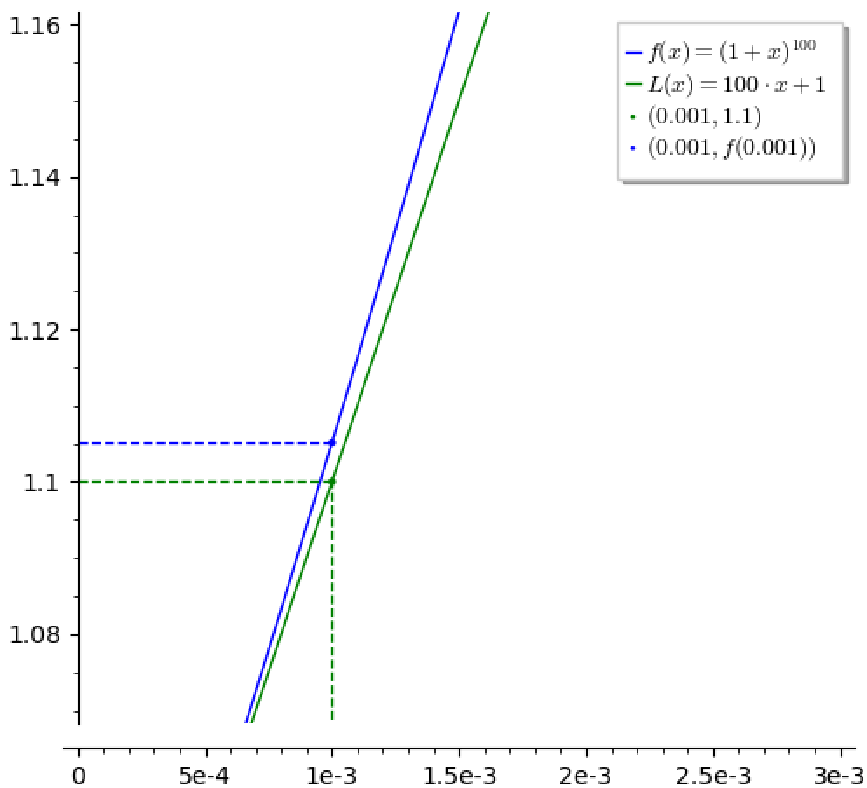
de manera que podemos concluir,

$$\begin{aligned} f(0.001) &\approx L(0.001) \\ &\approx 100(0.001) + 1 \\ &\approx 1.1 \ . \end{aligned}$$

En el siguiente gráfico se puede apreciar que en cercanías del valor $x = 0,001$ las gráficas de la recta y la función son indistinguibles.



No obstante, observando detenidamente podemos notar, la existencia de un error de aproximación no despreciable.



2. Calcule la derivada de las funciones dadas por las siguientes fórmulas:

   a) $h(x) = \dfrac{(x+1)^3(x-1)^3}{(x^2+x+1)^3}$

   solución: En primer lugar notemos que la h es una función diferenciable para todo todo $x \in \mathbb{R}$ pues es un cociente de funciones polinomiales y $x^2+x+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además,

$$h(x) = \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x^2+x+1}\right)^3 = \left(\frac{x^2-1}{x^2+x+1}\right)^3 = [(x^2-1)(x^2+x+1)^{-1}]^3\,,$$

   Ahora, en virtud de la regla de la cadena, se tiene

$$h'(x) = 3[(x^2-1)(x^2+x+1)^{-1}]^2 \cdot (\,(x^2-1)(x^2+x+1)^{-1}\,)'$$

Ahora, aplicando la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned}
(\,(x^2-1)(x^2+x+1)^{-1}\,)' &= (x^2-1)'\cdot(x^2+x+1)^{-1}+(x^2-1)\cdot((x^2+x+1)^{-1})' \\
&= 2x\cdot(x^2+x+1)^{-1}+(x^2-1)\cdot(-(x^2+x+1)^{-2}\cdot(x^2+x+1)') \\
&= 2x\cdot(x^2+x+1)^{-1}+(x^2-1)\cdot(-(x^2+x+1)^{-2}\cdot(2x+1)) \\
&= (x^2+x+1)^{-2}\cdot[2x\cdot(x^2+x+1)-(x^2-1)\cdot(2x+1)] \\
&= \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 3[(x^2-1)(x^2+x+1)^{-1}]^2\cdot\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{3(x^2-1)^2(x^2+4x+1)}{(x^2+x+1)^4}\,.
\end{aligned}$$

b) $P(t)=\dfrac{\cos^4(t)-\operatorname{sen}^4(t)}{\cos(t)+\operatorname{sen}(t)}$

solución: En primer lugar, notemos que el dominio de la función P son todos los $t\in\mathbb{R}$ tales que $t\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Luego, manipulando algebraicamente la regla de asignación de la función, obtenemos

$$\begin{aligned}
P(t) &= \frac{\cos^4(t)-\operatorname{sen}^4(t)}{\cos(t)+\operatorname{sen}(t)} \\
&= \frac{(\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t))(\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t))}{\cos(t)+\operatorname{sen}(t)} \\
&= \frac{(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))\cdot 1}{\cos(t)+\operatorname{sen}(t)} \\
&= \cos(t)-\operatorname{sen}(t).
\end{aligned}$$

Ahora, dado que la función h es diferenciable en en su dominio, pues es la diferencia de funciones diferenciables, aplicando reglas de derivación, se tiene

$$\frac{dP(t)}{dt}=-\operatorname{sen}(t)-\cos(t)=-(\operatorname{sen}(t)+\cos(t)).$$

3. *a*) Calcule la derivada de $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{\cos(1-x^2)}$.

Solución: Recordemos la regla de asignación para la composición $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ es de la forma,

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) \\ &= f_1\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right) . \end{aligned}$$

Es decir, considerando

$$f_1(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \qquad f_2(x) = \cos(x) \qquad \text{y} \qquad f_3(x) = 1 - x^2$$

tenemos

$$f(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = \sqrt[3]{\cos(1-x^2)}$$

Ahora, para derivar esta composición de funciones, recordamos la regla de la cadena, ie.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1(f_2(f_3(x)))' \\ &= f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot (f_2(f_3(x))' \\ &= f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x) \end{aligned}$$

Luego como f_1, f_2, f_3 son funciones diferenciables en $\mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \\ f_2'(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ f_3'(x) &= -2x \end{aligned}$$

Por lo tanto, en virtud de lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos(1-x^2))^{-\frac{2}{3}}}{3} \cdot -\operatorname{sen}(1-x^2) \cdot -2x \\ &= \frac{\cos(1-x^2))^{-\frac{2}{3}} \cdot \operatorname{sen}(1-x^2) \cdot 2x}{3} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(1-x^2) \cdot 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos(1-x^2))^2}} . \end{aligned}$$

b) Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}$ que cumple $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$. Sea F la función definida por $F(x) = f\Big(f\Big(\big(f(x)\big)^2\Big)\Big)$. Calcule $F'(1)$.

Solución: Aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \Big(f\Big(f\Big((f(x))^2\Big)\Big)\Big)' \\ &= f'\Big(f\Big((f(x))^2\Big)\Big) \cdot f'\Big((f(x))^2\Big) \cdot \Big(2 \cdot f(x)\Big) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando los valores $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'\Big(f\Big((f(1))^2\Big)\Big) \cdot f'\Big((f(1))^2\Big) \cdot \Big(2 \cdot f(1)\Big) \cdot f'(1) \\ &= f'\Big(f\Big((1)^2\Big)\Big) \cdot f'\Big((1)^2\Big) \cdot \Big(2 \cdot 1\Big) \cdot (2) \\ &= f'\Big(f(1)\Big) \cdot f'(1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2) \\ &= f'(1) \cdot (2) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2) \\ &= 16. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye

$$F'(1) = 16.$$