Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Ayudantía 4
Criterios de la primera y segunda derivada
23/09/2022

En este taller, determinaremos los posibles puntos donde una función alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Además, aplicaremos el criterio de la primera derivada para determinar los intervalos donde la función es creciente y decreciente. Utilizaremos este criterio para determinar los extremos locales de la función. Por otro lado, analizaremos si una función satisface una ecuación en la que están incorporadas la misma función y sus derivadas. Finalmente, aplicaremos el criterio de la segunda derivada para analizar la concavidad y los puntos de inflexión de una función.

Objetivos:

- Analizar los puntos críticos para determinar el máximo valor y el mínimo valor de una función en un intervalo.
- Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los intervalos de monotonía de la función y/o sus extremos locales.
- Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión de una función.

Ejercicios Propuestos

1. Sea $f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2+\cos(x)}$.

   a) Encuentre los puntos sobre la gráfica de la función tal que la recta tangente sea horizontal.

   Solución: Recordemos inicialmente que las aproximaciones afines o rectas tangentes de una función h diferenciable en un punto $x = a$ son de la forma,

   $$L(x) = h'(a)(x-a) + h(a).$$

   Ahora, como la función f es diferenciable en todo su dominio, pues para todo $x \in [-\pi, 2\pi]$ se tiene que $2 + \cos(x) \neq 0$. Además, la recta sería horizontal si su pendiente es nula, en efecto, notemos que

   $$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot(2+\cos(x)) - \operatorname{sen}(x)\cdot - \operatorname{sen}(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}, \quad x \in [-\pi, 2\pi]\,.$$

Luego,

$$f'(x) = 0 \qquad \iff \qquad \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2} \qquad \iff \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\,,$$

es decir, si

$$x \in \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3} \right\}.$$

por lo tanto, la gráfica admite aproximaciones afines horizontales en los puntos

$$\left(\frac{4\pi}{3}, f(4\pi/3)\right) = \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, f(2\pi/3)\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

y

$$\left(\frac{-2\pi}{3}, f(-2\pi/3)\right) = \left(\frac{-2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

b) A partir de los signos de la primera derivada y el ítem anterior, concluya los máximos y mínimos locales y globales de la función f.

Solución: Considerando lo anterior y analizando los signos de la primera derivada, se tiene, por ejemplo:

$$f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right) < 0, \qquad f'(0) > 0,$$

$$f'(\pi) < 0 \qquad \text{y} \qquad f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) > 0\,.$$

Por lo cual,

	$x=-\pi$	$x \in \left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$	$x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$	$x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$	$\left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Por lo tanto,

- f es creciente en los valores de x que pertenecen a los intervalos $\left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$ y $\left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[$.
- f es decreciente en los valores x que pertenecen a los intervalos $\left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$ y $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$.

Por último, notemos que la función f alcanza sus valores mínimos (locales) en $x = -\frac{2\pi}{3}$ y $x = \frac{4\pi}{3}$ y su máximo en $x = \frac{2\pi}{3}$ y cuyos valores son

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cabe mencionar que al estar la función definida en un cerrado, esta alcanza valores máximos y mínimos en los extremos pero en nuestro caso se tiene

$$f(-\pi) = f(2\pi) = 0\,.$$

2. En la carretera saliendo de una ciudad, la velocidad de los vehículos, medida en kilómetros por hora, que transitan entre las 2 pm y las 6 pm de un día viernes, se modela mediante:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8, \quad t \in [2, 6].$$

a) Determine en qué intervalos, entre las 2 pm y las 6 pm, la velocidad aumenta y en qué intervalos disminuye.

Solución: Considerando la derivada de la función $v(t)$, la cual es diferenciable para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular lo es para $t \in [2, 6]$, además, la derivada está dada por

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 3(t^2 - 10t + 24) = 3(t - 4)(t - 6)\,.$$

Luego, analizando el signo de v' en los valores de nuestro interés, tenemos:

	$x \in [2, 4[$	$x = 4$	$x \in]4, 6[$	$x = 6$
$t - 4$	$-$	0	$+$	$+$
$t - 6$	$-$	$-$	$-$	0
$3(t - 4)(t - 6)$	$+$	0	$-$	0
$v'(t)$	$+$	0	$-$	0
	$\nearrow$		$\searrow$	

Por lo tanto,

- la velocidad es creciente (acelera) cuando en $t \in]2, 4[$;
- la velocidad disminuye (desacelera) cuando $t \in]4, 6[$.

b) Determine las velocidades máxima y mínima que alcanzan estos vehículos y a qué hora se dan.

Solución: En virtud de lo anterior, se concluye que v alcanza su máximo en $t = 4$ y coincide con el valor $v(4) = 120$ $[km/h]$ y sus valores mínimos (locales) en $t = 2$ y $t = 6$ segundos cuyos valores alcanzan $v(2) = 100$ y $v(6) = 116$ $[km/h]$. De manera que su velocidad mínima fue de 100 $[km/h]$.

3. La posición $x(t)$, en un instante t, de una partícula que describe un movimiento armónico simple, está dada por

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

donde A, ω y ϕ son números reales constantes.

Demuestre que la función x satisface la siguiente ecuación de movimiento armónico simple

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Solución: En primer lugar, notemos que la función $x(t)$ es diferencialble en todo su dominio y su primera derivada, en virtud de la regla de la cadena, está dada por

$$x'(t) = A \cos(\omega t + \phi) \cdot \omega\,.$$

Reiteremos el argumento, notando que $x'(t)$ de igual forma es diferenciable en su dominio, entonces su derivada está dada por

$$x''(t) = -A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \cdot \omega^2 \,.$$

Por último, una vez conocidas las derivadas involucradas en la relación, podemos verificar

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = -A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \cdot \omega^2 + \omega^2 A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0\,.$$

Vale decir, x satisface la ecuación de movimiento armónico simple.

4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x}$.

   Determine los intervalos de concavidad de la función f y concluya si esta tiene puntos de inflexión.

Solución: Para comenzar, notemos que la función f es diferenciable para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - 2x^{-2} \\ &= x - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^3 - 2}{x^2} \end{aligned}$$

Luego, manipulando algebraicamente la expresión anterior, mediante la diferencia de cubos y la completación de cuadrados, podemos concluir que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{x^2} \\ &= \frac{(x - \sqrt[3]{2})\left(\left(x + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)}{x^2} \end{aligned}$$

Ahora, notamos que las expresiones x^2 y $\left(\left(x + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)$ son expresiones positivas, de modo que el signo de la derivada depende del factor $(x - \sqrt[3]{2})$, concluyendo que

- f es creciente para todos los $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que

$$x - \sqrt[3]{2} > 0 \qquad \iff \qquad x \in]\sqrt[3]{2}, \infty[\,.$$

- f es decreciente para todos los $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que

$$x - \sqrt[3]{2} < 0 \qquad \iff \qquad x \in]-\infty, 0[\cup]0, \sqrt[3]{2}[\,.$$

Por último, notemos que la segunda derivada de f existe para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y está dada por

$$f''(x) = 1 + \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 + 4}{x^3}$$

Luego, los puntos de inflexión son los valores del dominio que anulan a la segunda derivada, vale decir,

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^3+4}{x^3} = 0\,.$$

En efecto,

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3+4 = 0\,,$$

factorizando podemos concluir que

$$x^3+4 = (x+\sqrt[3]{4})(x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\sqrt[3]{4}$$

de forma tal, que el valor $x = -\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un punto de inflexión.