Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do.* semestre de 2022

Ayudantía 6
Modelamiento y Optimización
07/10/2022

En este taller aplicaremos el cálculo diferencial para resolver problemas contextualizados cuyo objetivo es la optimización de una función. Este proceso consiste en, dada una función, determinar para qué valores esta alcanza su valor máximo global o mínimo global de acuerdo al requerimiento. O también, de acuerdo a un contexto y requerimientos, obtener una función de la cual se desea obtener su máximo global o mínimo global.

Objetivos:

- Resuelve problemas de optimización aplicando el cálculo diferencial.
- Modela y optimiza una función de acuerdo a un contexto.

Ejercicios Propuestos

1. La energía (por unidad de tiempo) gastada por cierta especie de perico en un vuelo horizontal, está dada por la expresión
$$E(v) = \frac{1}{v}\big(k(v-35)^2 + c\big),$$
donde v es la velocidad de vuelo del ave medida en [km/h], y donde k, c son constantes positivas. ¿Qué velocidad de vuelo del perico minimiza su gasto energético?

Solución: En primer lugar, notamos que como el dominio de $E(v)$ no es un intervalo cerrado no está garantizada la existencia de máximos y mínimos absolutos. Para analizar la situación, usaremos el criterio de la segunda derivada. Notemos que para $v > 0$ la función E es diferenciable y su derivada está dada por
$$\begin{aligned}
\frac{dE(v)}{dv} &= -\frac{1}{v^2}\big(k(v-35)^2 + c\big) + \frac{1}{v}\big(2k(v-35)\big)\\
&= (v-35)\left[\frac{2k}{v} - \frac{k}{v^2}(v-35)\right] - \frac{c}{v^2}\\
&= (v-35)\cdot\frac{k(v+35)}{v^2} - \frac{c}{v^2}\\
&= \frac{k(v-35)(v+35)-c}{v^2}\\
&= \frac{1}{v^2}\big(k(v^2-35^2)-c\big).
\end{aligned}$$

Luego, encontramos puntos críticos

$$E'(v) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{k(v^2 - 35^2) - c}{v^2} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} k(v^2 - 35^2) - c &= 0 \\ v^2 - 35^2 &= \frac{c}{k} \\ v^2 &= 1225 + \frac{c}{k} \\ v &= \pm\sqrt{1225 + \frac{c}{k}}. \end{aligned}$$

Dado que el dominio de $E(v)$ son los $v > 0$, de manera que $v_0 = \sqrt{1225 + \frac{c}{k}}$ es el único candidato a valor extremo de la función (punto crítico). Estudiaremos su naturaleza, para ello notamos que la función E' es diferenciables para $v > 0$ y su función derivada está dada por

$$\begin{aligned} E''(v) &= -\frac{2}{v^3}\big(k(v^2 - 35^2) - c\big) + \frac{1}{v^2} \cdot 2kv \\ &= \frac{1}{v^3}\big(2kv^2 - 2kv^2 + 2 \cdot 35^2 + c\big) \\ &= \frac{2 \cdot 35^2 + c}{v^3}. \end{aligned}$$

Evaluando el punto crítico encontrado se tiene

$$E''(v_0) = E\left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}}\right) = \frac{2 \cdot 35^2 + c}{\left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}}\right)^3} > 0$$

pues tanto c como k son constantes positivas.

Finalmente, por el criterio de la segunda derivada tenemos que $E'(v_0) = 0$ y $E''(v_0) > 0$ de manera que $E(v_0)$ es un valor mínimo (local *a priori*) de la función y está dado por

$$E(v_0) = E\left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}}\right)}\left(k\Big(\sqrt{1225 + \frac{c}{k}} - 35\Big)^2 + c\right)[\mathrm{J}].$$

Cabe mencionar que es el único extremo local en el dominio y este es un mínimo local entonces es un mínimo absoluto, en efecto $E(v) \to +\infty$ cuando $v \to 0^+$ y $E(v) \to +\infty$ cuando $v \to +\infty$.

Por lo tanto, la velocidad que minimiza el gasto energético es

$$v_0 = \sqrt{1225 + \frac{c}{k}} \quad \left[\frac{\text{Km}}{\text{h}}\right].$$

Observación: Una alternativa al criterio de la segunda derivada para discriminar valores extremos de la función es, a parir de los intervalos de monotonía de la función estudiar su variación en los puntos extremos.

En particular, esta estrategia nos permitiría concluir lo anterior considerando:

Dado que el denominador de $E'(v)$ es $v^2 > 0$, entonces el signo lo determina el numerador, además, el numerador es una cuadrática cóncava hacia arriba (pues $k > 0$). Luego, $E'(v)$ es positiva para $v > v_0$ y negativa para $0 < v < v_0$. Por lo tanto en v_0 hay un mínimo local y además $E(v)$ es decreciente para $0 < v < v_0$ y creciente para $v > v_0$. Esto nos permite concluir que $E(v_0)$ es el mínimo absoluto.

2. En Chile, se desea construir otro observatorio astronómico en Cerro Calán. Lo deseable es que tenga forma de cilindro circular recto coronado por un domo semiesférico, además que tenga una capacidad de $\dfrac{4400\pi}{3}$ $[m^3]$. Determine las dimensiones del observatorio para que su superficie sea mínima. ¿Esperaba el resultado obtenido?

Solución: En primer lugar, notemos que bajos las hipótesis de problema, el volumen del observatorio está dado por media esfera de radio r y un cilindro de radio r y altura h, vale decir,

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{4400\pi}{3} \quad [m^3].$$

Así,

$$h = \frac{4400 - 2r^3}{3r^2}.$$

Ahora, dado que lo deseable es que tenga forma de cilindro circular recto coronado por un domo semiesférico, la altura debe ser positiva, es decir

$$\begin{aligned}
h = \frac{4400 - 2r^3}{3r^2} > 0 \qquad &\iff \qquad 4400 - 2r^3 > 0 \\
&\iff \qquad 2200 - r^3 > 0 \\
&\iff \qquad (\sqrt[3]{2200} - r)(\sqrt[3]{2200^2} + \sqrt[3]{2200}r + r^2) > 0 \\
&\iff \qquad \sqrt[3]{2200} - r > 0\,,
\end{aligned}$$

por lo cual, la altura será positiva si

$$r \in]0, \sqrt[3]{2200}[$$

Ahora, la superficie del observatorio está dado por

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{4\pi r^2}{2} + 2\pi r \left(\frac{4400 - 2r^3}{3r^2} \right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{8800\pi}{3r} - \frac{4\pi r^2}{3} \\ &= \frac{2\pi r^2}{3} + \frac{8800\pi}{3r} \,. \end{aligned}$$

Luego, buscamos los valores que minimizan la superficie, en efecto, dado que la función A es diferenciable para $r \in]0, \sqrt[3]{2200}[$ se tiene

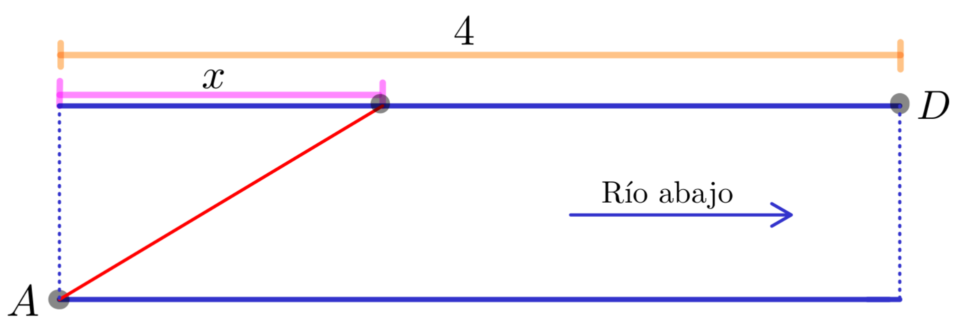
$$A'(r) = \frac{4\pi r}{3} - \frac{8800\pi}{3r^2} \,.$$

y

$$A'(r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{4\pi r}{3} - \frac{8800\pi}{3r^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \sqrt[3]{2200} \,.$$

El cual no forma parte de nuestro dominio, por lo cual la función que modela la superficie no posee valores mínimos .

3. Renato ha decidido viajar a Pucón para disfrutar el siguiente feriado extendido, en esta ocasión aprovechará de hacer un poco de deporte al aire libre. Su objetivo es cruzar un río que tiene un ancho de 1 [km] a fin de alcanzar un punto D a 4 [km] río abajo, como se muestra en la figura adjunta. Él puede nadar a 4 [km/hora] y correr a 10 [km/hora]. Suponiendo que Renato comenzará nadando hacia un punto a x [km] río abajo del punto A de donde parte, determine:



   a) El tiempo T, en función de x, que Renato se demorará en llegar de A a D.

   Solución: Notemos que un objeto que se mueve a rapidez constante, ésta se modela mediante la variación de la distancia en el tiempo, es decir,

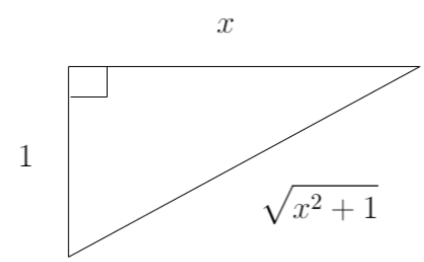
$$\text{Rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total}} \,.$$

Así, el tiempo total T_t en recorrer desde el punto A hasta el punto D, está dado por

$$T_t = t_0 + t_1,$$

donde, t_0 es el tiempo empleado en cruzar el río y t_1 es el tiempo que demora en hacer su recorrido corriendo.

Ahora, notemos que en virtud de lo señalado en las hipótesis del problema, podemos visualizar la siguiente situación



En ella podemos notar que la distancia que recorre nadando Renato corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo, es decir recorre $\sqrt{x^2+1}$ [Km] y por la relación anterior para la rapidez constate, se tiene

$$t_0 = \frac{\sqrt{1+x^2}}{4},$$

Pues la rapidez es de 4 $\left[\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{H}}\right]$, Además, para determinar t_1 sabemos que la distancia recorrida es $4-x$ y la rapidez es de 10 $\left[\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{H}}\right]$, entonces

$$t_1 = \frac{4-x}{10},$$

Por lo tanto, T_t está dado por

$$\begin{aligned} T_t &= = t_0 + t_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} + \frac{4-x}{10} \end{aligned}$$

Como podemos observar T_t depende la distancia x y en virtud del enunciado $x \in [0,4]$, así concluimos que la función T que modela el tiempo en términos de x está dada por

$$\begin{aligned} T &: [0,4] \to \mathbb{R}_0^+ \\ T(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} + \frac{4-x}{10}. \end{aligned}$$

La cual para valores $x \in [0,4]$ es continua y derivable para $x \in (0,4)$.

b) Los puntos críticos de T.

Solución: Para obtener los puntos críticos buscamos los valores $x \in (0,4)$ tal que $T'(x) = 0$, entonces, por un lado determinamos la derivada

$$\begin{aligned} T'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{4}\right)' + \left(\frac{4-x}{10}\right)' \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x + \frac{-1}{10} \\ &= \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

y por otro lado, solucionamos la ecuación $T'(x) = 0$, teniendo que

$$\frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{10}.$$

Ahora, como $1 + x^2 > 0$ para todo $x \in [0,4]$ se tiene

$$\begin{aligned} 10x &= 4\sqrt{1+x^2} && /()^2 \\ 100x^2 &= 16(1+x^2) && /:4 \\ 25x^2 &= 4(1+x^2) \\ 21x^2 &= 4 \\ 21x^2 - 4 &= 0 \\ (\sqrt{21}x + 2)(\sqrt{21}x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, como el dominio de la función son los valores $x \in [0,4]$ el conjunto de puntos críticos de la función son los valores extremos del dominio, $x = 0$ y $x = 4$ además del valor que obtuvimos recientemente, es decir, los puntos críticos son

$$x \in \left\{0,\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ 4\right\}.$$

c) Los intervalos donde el tiempo T aumenta y los intervalos donde el tiempo T disminuye.

Solución: Examinando los signos de $T'(x)$ podremos saber donde $t(x)$ es creciente y decreciente, para esto haremos un arreglo algebraico a $T'(x)$.

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10}\\
&= \frac{5x - 2\sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{(5x - 2\sqrt{1+x^2})}{(20\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{(5x + 2\sqrt{1+x^2})}{(5x + 2\sqrt{1+x^2})}\\
&= \frac{25x^2 - 4(x^2+1)}{(20\sqrt{1+x^2})(5x + 2\sqrt{1+x^2})}\\
&= \frac{21x^2 - 4}{(20\sqrt{1+x^2})(5x + 2\sqrt{1+x^2})}\\
&= \frac{(\sqrt{21}x + 2)(\sqrt{21}x - 2)}{(20\sqrt{1+x^2})(5x + 2\sqrt{1+x^2})}.
\end{aligned}$$

Notemos que para $x \in (0, 4)$ tenemos

$$\sqrt{21}x + 2 > 0, \qquad 20\sqrt{1+x^2} > 0 \qquad \text{y} \qquad 5x + 2\sqrt{1+x^2} > 0$$

Luego, analizamos los cambio de signo de la derivada de la función

	$x \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$	$x \in \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, 4\right)$
$(\sqrt{21}x + 2)$	$+$	$+$
$(\sqrt{21}x - 2)$	$-$	$+$
$(20\sqrt{1+x^2})$	$+$	$+$
$(5x + 2\sqrt{1+x^2})$	$+$	$+$
$T'(x)$	$-$	$+$
$T(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

De donde se concluye que

- $T(x)$ es decreciente en el intervalo $\left[0, \frac{2}{\sqrt{21}}\right]$, debido a que $T'(x) < 0$ en ese intervalo.
- $T(x)$ es creciente en el intervalo $\left[\frac{2}{\sqrt{21}}, 4\right]$, ya que $T'(x) > 0$ en intervalo.

d) El valor de x para el cual Renato llegará más rápido a su destino, y determine el tiempo que demorará.

Solución: Como el valor $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ es el punto crítico de la función $T(x)$, notemos que inmediatamente a la izquierda de $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ la función es decreciente y a su derecha $T(x)$ es inmediatamente creciente, entonces es *cóncava hacia arriba*, por tanto $T\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$ es un mínimo local de la función.

Para el valor $x = 0$, tenemos que $T(0) = \frac{13}{20} \approx 0{,}65$, para el valor $x = 4$ función evaluada nos da $T(4) = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}03$ y para el valor $x = \frac{2}{\sqrt{21}}$ se tiene

$$\begin{aligned} T\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right) &= \frac{\sqrt{1 + (\frac{2}{\sqrt{21}})^2}}{4} + \frac{4 - (\frac{2}{\sqrt{21}})}{10} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{25}{21}}}{4} + \frac{\frac{4\sqrt{21}-2}{\sqrt{21}}}{10} \\ &= \frac{5}{4\sqrt{21}} + \frac{4\sqrt{21} - 2}{10\sqrt{21}} \\ &= \frac{21 + 8\sqrt{21}}{20\sqrt{21}} \\ &\approx 0{,}63. \end{aligned}$$

De manera que para el valor $x = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$ se obtendrá el tiempo más breve en llegar de A hasta D. Lo que es equivalente aproximadamente a 38 minutos.