Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Ayudantía 3
Reglas de derivación, asíntotas y regla de L'Hopital
09/09/2022

En este taller comenzaremos ejercitando las reglas de derivación para ciertas engorrosas funciones. Posteriormente aplicaremos la regla de L'Hopital para calcular el valor de algunos límites con el objetivo de responder a las preguntas que se presentan a continuación y que buscan estudiar la existencia de asíntotas horizontales o verticales según sea el caso. Finalmente, analizaremos la existencia de asíntotas horizontales para cierta función y su derivada.

Objetivos:

- Derivar funciones aplicando las reglas de derivación.
- Aplicar la regla de L'Hopital en ejercicios de límites.
- Analizar la existencia de asíntotas horizontales y/o verticales.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = \dfrac{(x^2+x)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2}$.

   Solución: Primero que todo, notemos que manipulando algebraicamente la regla de asignación de la función se tiene

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{(x^2+x)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2} \\
&= \frac{(x^2+x{\color{red}+1-1})\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2} \\
&= \frac{(x^2+x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}-\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{1+x+x^2} \\
&= \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.
\end{aligned}
$$

   Luego, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} \neq 0$ y notemos que la función g es diferenciable, pues cada una de funciones que componen a la función g son diferenciables en $\mathbb{R}$.

Ahora, aplicamos las reglas de derivación, para ello, por un lado notemos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}-1}(x)\cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-\frac{2}{3}}(x)\cos(x)\ .$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} &= \frac{\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}\right)'\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)'}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-\frac{2}{3}}(x)\cos(x)\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}\right)\cdot\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 1\right)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\
&= \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}-\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\ .
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}g(x) &= \frac{d}{dx}\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}-\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\
&= \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}}-\left(\frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}-\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\right)\\
&= \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}}-\frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\
&= \frac{\cos(x)(x^2+x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{(2x+1)\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\ .
\end{aligned}$$

b) $I(x) = \operatorname{arc\,sen}(\cos(x))$.

Solución: En primer lugar notemos que para todo $x \in]-1,1[$ se tiene que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x.$$

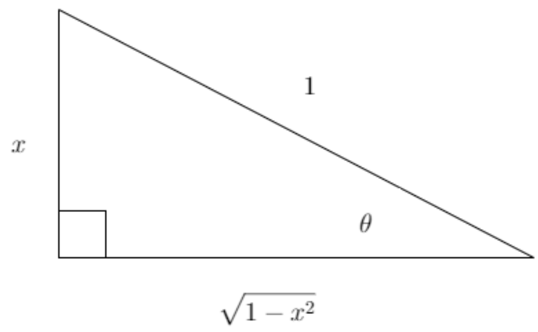
Derivamos la ecuación considerando la regla la cadena y obtenemos

$$\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))\cdot(\operatorname{arc\,sen}(x))' = 1 \qquad\iff\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen}(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))}$$

Para dilucidar la expresión $\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))$, consideremos

$$\theta = \operatorname{arc\,sen}(x) \iff x = \operatorname{sen}(\theta)$$

situación que podemos visualizar en el siguiente triángulo rectángulo



Por lo cual,

$$\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

cabe mencionar que,

$$\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{arc\,sen}(x) \neq \pm\frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq \pm 1.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ahora, para hallar la función derivada de I, aplicando la regla de la cadena y considerando $\cos(x) \neq \pm 1$, vale decir $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}I(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot (\cos(x))' \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot -\operatorname{sen}(x) \\
&= \frac{1}{1-\cos^2(x)} \cdot -\operatorname{sen}(x) \cdot \sqrt{1-\cos^2(x)} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \cdot |\operatorname{sen}(x)| = -\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\operatorname{sen}(x)} \\
&= -\csc(x)|\operatorname{sen}(x)|\,.
\end{aligned}$$

2. Calcule los siguientes límites, para luego responder las preguntas a continuación.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}\right)$.

   Solución: Nos gustaría aplicar regla de L'Hôpital, consideremos que las funciones que componen tanto el numerador $f(x)=3x^3-2x^2+x-1$, como el denominador $g(x)=7x^3-x^2+5$, son funciones continuas y diferenciables en todo $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$. Luego, calculamos el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x^3-2x^2+x-1)'}{(7x^3-x^2+5)'}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2-4x+1}{21x^2-2x}\right).\end{aligned}$$

   Observemos que en la expresión anterior tanto el numerador $h(x)=9x^2-4x+1$ como el denominador $m(x)=21x^2-2x$ son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Además $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\infty} m(x)=\infty$. Para aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital debemos determinar el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{h'(x)}{m'(x)}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x^2-4x+1)'}{(21x^2-2x)'}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{18x-4}{42x-2}\right).\end{aligned}$$

   Nuevamente,apreciemos que se satisfacen las hipótesis necesarias para utilizar la regla de L'Hôpital, es decir las funciones $\phi(x)=18x-4$ y $\psi(x)=42x-2$ son funciones diferenciables y $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=\infty$. Luego calculamos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(18x-4)'}{(42x-2)'}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{18}{42}\right)\\ &= \frac{3}{7}.\end{aligned}$$

   Es decir, por regla de L'Hôpital como este último límite existe se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{h'(x)}{m'(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

   Por lo tanto

$$\frac{3}{7}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{18x-4}{42x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2-4x+1}{21x^2-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}\right).$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$.

Solución: Notemos que al intentar resolver de manera directa nos encontramos con una expresión de la forma $(\infty(\infty-\infty))$, entonces manipulando algebraicamente la expresión tendríamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x((\sqrt{1+x^2})^2-x^2)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}.\end{aligned}$$

Recordemos que $1+x^2>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(1+x^2-x^2)}{(\sqrt{1+x^2}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+x)}.$$

Además, tanto el numerador $f(x)=x$, como el denominador $g(x)=\sqrt{1+x^2}+x$ son funciones diferenciables y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$. Luego calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\sqrt{1+x^2}+x)'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como este último límite existe, mediante la regla de L'Hôpital se concluye

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+x)} = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x).$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right).$

Solución: Si quisiéramos calcular este limite de manera inmediata observaríamos una expresión del tipo $(\infty-\infty)$, entonces cambiaremos su forma algebraica para poder utilizar la regla de L'Hôpital. Es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)}-\frac{x}{x\operatorname{sen}(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)}\right).\end{aligned}$$

Ahora, Considerando $f(x)=\operatorname{sen}(x)-x$ y $g(x)=x\operatorname{sen}(x)$, las que son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$. Procedemos a calcular el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\operatorname{sen}(x)-x)'}{(x\operatorname{sen}(x))'}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}\right).\end{aligned}$$

Luego, notemos que tanto el numerador $\ell(x)=\cos(x)-1$, como denominador $w(x)=\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)$ son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ell'(x)}{w'(x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\cos(x)-1)'}{(\operatorname{sen}(x)+x\cos(x))'}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+(\cos(x)-x\operatorname{sen}(x))}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)}\right)\\ &= \left(\frac{-\operatorname{sen}(0)}{2\underbrace{\cos(0)}_{=1}-0\cdot\operatorname{sen}(0)}\right)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Finalizando, como el último límite existe, mediante la regla de L'Hôpital se concluye que

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\ell'(x)}{w'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$.

Solución: Primero notemos que tanto el numerador $f(x) = 1 - \cos(x^2)$ como el denominador $g(x) = x^4$ son funciones continuas y además diferenciables en $\mathbb{R}$, en particular en cualquier intervalo abierto que contenga al cero. Además, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ entonces para aplicar la regla de L'Hôpital, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(x^2))'}{(x^4)'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(x^2)}{4x^3} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2}\,. \end{aligned}$$

Donde en la expresión anterior nuevamente, considerando $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ y $t(x) = 2x^2$ podemos notar que corresponden a funciones continuas y diferenciables en 0 y $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} t(x)$=0. Entonces para aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{h'(x)}{t'(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)'}{(2x^2)'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos(x^2)}{4x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Ahora, como este ultimo límite existe, en virtud de la regla de L'Hôpital podemos concluir que

$$\frac{1}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{h'(x)}{t'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Finalmente se concluye que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}$$

Observación: Notemos que al aplicar el cambio de variable $u = x^2$, el proceso era más óptimo.

- En los ítem a) y b) ¿es cierto que la función respectiva posee una asíntota horizontal hacia el infinito positivo?

Solución: En virtud que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}\right)=\frac{3}{7} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)=\frac{1}{2}\,,$$

podemos concluir que las funciones cuyas reglas de asignación son $f(x)=\dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}$ y $g(x)=x(\sqrt{1+x^2}-x)$ tienen respectivamente una asíntota horizontal al infinito positivo dada por las rectas cuyas ecuaciones son: $y=3/7$ e $y=1/2$.

- En los ítem c) y d) ¿es cierto que la función respectiva posee una asíntota vertical en $x=0$?.

  Solución: En virtud que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}=\frac{1}{2}\,,$$

  podemos concluir que ambas funciones cuyas reglas de asignación son $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ y $g(x)=\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$ no tienen una asíntota vertical en $x=0$.

3. Considere la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cuya regla de asignación es $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x^2+1}$. Analice la existencia de asíntotas horizontales para las funciones f y f'.

Solución: En primer lugar notamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty^+} f(x) &= \lim_{x\to\infty^+}\frac{4x^2-1}{2x^2+1}\\ &= \lim_{x\to\infty^+}\frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1}{2x^2+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}\\ &= 2\,,\end{aligned}$$

Por lo cual, podemos concluir que la función f tiene una asíntota horizontal cuya ecuación está dada por $y=2$.

Además, la función f es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}$ debido a que es el cociente entre dos polinomios (cada uno diferenciable en $\mathbb{R}$) y para todo $x \in \mathbb{R}$ el denominador $2x^2 + 1 \neq 0$. Luego, aplicando reglas de derivación se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x^2-1)' \cdot (2x^2+1) - (4x^2-1) \cdot (2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{8x(2x^2+1) - 4x(4x^2-1)}{(2x^2+1)^2} \\ &= \cancel{\frac{4x+1}{(2x^2+1)^2}}. \quad \frac{12x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ahora, estudiando asíntotas horizontales para la función f', por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f'(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{(2x^2+1)^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Corrección:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{12x}{(2x^2+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{12x}{(2x^2+1)^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{12}{x^3}}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 0^-$$

(tiende a cero por la izquierda.)

y

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty^+} f'(x) &= \lim_{x\to\infty^+} \frac{4x+1}{(2x^2+1)^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} \\ &= \lim_{x\to\infty^+} \frac{\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12x}{(2x^2+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{12}{x^3}}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 0^+$$

Por lo tanto, la función f' tiene una asíntota horizontal cuya ecuación está dada por $y = 0$.