Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do.* semestre de 2022

Taller de ayudantía 11
Funciones Logaritmo y Exponencial y Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral

18/11/2022

En este taller aplicaremos las propiedades de la función exponencial y logarítmica en base a con a positiva y distinta de 1. Utilizaremos las reglas de derivación, la regla de L'Hôpital, e integración, además, determinaremos soluciones de ecuaciones exponenciales y resolveremos problemas contextualizados usando este tipo de funciones.

Objetivos:

- Utilizar propiedades de las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Calcular derivadas, primitivas y límites de funciones que involucren funciones logarítmicas y exponenciales.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Resolver problemas que involucren función exponencial.

Ejercicios Propuestos

1. Una población de bacterias inicia con 100 de éstas, y la población se triplica cada 2 horas. Llame $P(t)$ a la cantidad de bacterias en el instante t medido en horas, con $t \geq 0$.

   a) Muestre que una fórmula razonable para $P(t)$, donde t es una variable continua, es

   $$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2}, \;\; t \geq 0.$$

   Solución: Si x denota el periodo de triplicación, la situación anterior arrojaría, por ejemplo, los valores

x	0	1	2	3
$P(t)$	100	300	900	2700

   De manera que es razonable pensar que en términos de x el modelo que proporciona la población de bacterias está dado por

   $$P(x) = 100 \cdot 3^{x}.$$

Sin embargo, nos interesa el modelo en términos del tiempo en horas, para esto notemos que $x = \dfrac{t}{2}$ representa el tiempo transcurridos en unidades de x (periodo de triplicación), de manera que componiendo ambas funciones obtenemos que un modelo razonable en términos del tiempo en horas para la población está dado por $P : [0, \infty[\to [100, \infty[$ cuya regla de asignación es

$$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2}.$$

Observación: Otra manera de deducir el modelo consiste en notar que el tamaño de la población en periodos fijos de tiempo se multiplica por un factor fijo, este factor depende del periodo de tiempo, que en este caso, cada 2 horas se triplica, es decir, el factor es 3, entonces el modelo para la población con el tiempo medido en horas es un modelo exponencial, vale decir, un modelo de la forma

$$P(t) = Me^{kt},$$

donde t se mide en horas. Ahora, como $P(0) = 100$ se tiene

$$P(0) = 100 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = 100.$$

Además, como $P(2) = 300$ se tiene

$$\begin{aligned} P(2) = 300 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 100e^{2k} = 300 \\ &\Longleftrightarrow \qquad e^{2k} = 3 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2k = \ln(3) \\ &\Longleftrightarrow \qquad k = \frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

De manera que la función que modela el crecimiento de la población está dada por

$$\begin{aligned} P : [0, \infty[&\to [100, \infty[\\ x &\mapsto 100e^{\frac{\ln(3)t}{2}} = 100 \cdot 3^{t/2} \end{aligned}$$

b) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que la población de bacterias sea igual a 800?

Solución: Para determinar lo solicitado, sea τ el tiempo transcurrido hasta que la población sea 800 bacterias, es decir,

$$P(\tau) = 800 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 100 \cdot 3^{\tau/2} = 800,$$

de donde, despejando τ se tiene

$$100 \cdot 3^{\tau/2} = 800 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3^{\tau/2} = 8$$

Entonces,

$$\frac{\tau}{2} = \log_3(8) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tau = 2\log_3(8) \approx 3,7855.$$

Por lo tanto, deben transcurrir aproximadamente 3, 7 horas para que la población de bacterias sea 800.

c) Encuentre una función que modele la velocidad de crecimiento de la población de bacterias. ¿Cuál será esta velocidad a las 12 horas?

Solución: Dado que la función $P(t)$ definida inicialmente representa la población de bacterias, entonces la derivada temporal de P representa la razón de cambio de esta población, es decir, $P'(t)$ representa la velocidad de crecimiento de la población. Particularmente en nuestro caso, la función $P(t)$ toma valores positivos de manera que

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{\ln(P(t))} \\ &= e^{\ln(100\cdot 3^{t/2})} \\ &= e^{\ln(100)+\ln(3^{t/2})} \\ &= e^{\ln(100)} \cdot e^{\ln(3^{t/2})} \\ &= 100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)} \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2} = 100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)},$$

Además, observemos que la función P es diferenciable en todos los números reales, en particular para $t > 0$ y la función derivada está dada por

$$P'(t) = \frac{d}{dt}\big(100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)}\big) = 100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)} \cdot \left(\frac{\ln(3)}{2}\right) = 50\ln(3)e^{\frac{t}{2}\ln(3)}.$$

Además,

$$\begin{aligned} P'(12) &= 50\ln(3)e^{\frac{12}{2}\ln(3)} \\ &= 50\ln(3)e^{6\ln(3)} \\ &= 50\ln(3)e^{\ln(3^6)} \\ &= 50\cdot 3^6\ln(3). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la velocidad de crecimiento de la población a las 12 horas está dada por $36\,450\ln(3) \approx 17\,391{,}0697 \ \left[\dfrac{\text{bacterias}}{h}\right]$.

d) Encuentre la función inversa de P y explique su significado.

Solución: Para determinar la función inversa debemos asegurarnos que la función admite inversa, para ello notemos que la función P es biyectiva, en efecto,

- Inyectividad: Sean $t_1, t_2 \in [0,\infty[$ tales que

$$\begin{aligned} P(t_1) = P(t_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad 100e^{\frac{\ln(3)t_1}{2}} = 100e^{\frac{\ln(3)t_2}{2}} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{\frac{\ln(3)t_1}{2}} = e^{\frac{\ln(3)t_2}{2}} \end{aligned}$$

Por la inyectividad de la función exponencial se tiene

$$\begin{aligned} e^{\frac{\ln(3)t_1}{2}} = e^{\frac{\ln(3)t_2}{2}} \quad &\iff \quad \frac{\ln(3)t_1}{2} = \frac{\ln(3)t_2}{2} \\ &\iff \quad \ln(3)t_1 = \ln(3)t_2 \\ &\iff \quad t_1 = t_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall t_1, t_2 \in [0, \infty[: P(t_1) = P(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$, es decir la función P es inyectiva.

- Sobreyectividad: Sea $p \in [100, \infty[$ tal que $p = P(t)$, vale decir

$$p = P(t) \quad \iff \quad p = 100e^{\frac{t\ln(3)}{2}},$$

de donde, utilizando la inyectividad de la función logaritmo, se tiene

$$\begin{aligned} p = 100e^{\frac{t\ln(3)}{2}} \quad &\iff \quad \frac{P}{100} = e^{\frac{t\ln(3)}{2}} \\ &\iff \quad \ln\left(\frac{p}{100}\right) = \ln\left(e^{\frac{t\ln(3)}{2}}\right) \\ &\iff \quad \ln(p) - \ln(100) = \frac{t\ln(3)}{2}\ln(e) \\ &\iff \quad \frac{2}{\ln(3)}\big(\ln(p) - \ln(100)\big) = t \end{aligned}$$

es decir, para cada $p \in [100, \infty[$ existe un único $t \in [0, \infty[$ tal que $p = P(t)$, vale decir, la función P es sobreyectiva

Luego, como la función es biyectiva estamos seguros que la función inversa existe y es única. Además, su regla de asignación está dada por

$$P^{-1}(p) = \frac{2}{\ln(3)}\big(\ln(p) - \ln(100)\big).$$

Por lo tanto, podemos concluir que la función inversa de P está dada por

$$\begin{aligned} P^{-1}(t) \ : \ [100, \infty[\ &\to \ [0, \infty[\\ t \ &\mapsto \ \frac{2}{\ln(3)}\big(\ln(t) - \ln(100)\big). \end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (P \circ P^{-1})(t) &= P(P^{-1}(t)) \\ &= 100\ e^{\frac{2\ln(3)}{2\ln(3)}\big(\ln(t) - \ln(100)\big)} \\ &= 100\ e^{\ln(t) - \ln(100)} \\ &= 100e^{\ln(t)}e^{-\ln(100)} \\ &= \frac{100}{100}t = t. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(P^{-1}\circ P)(t) &= P^{-1}(P(t))\\ &= \frac{2}{\ln(3)}\big(\ln(100\, e^{\frac{t}{2}\ln(3)}) - \ln(100)\big)\\ &= \frac{2}{\ln(3)}\big(\ln(100) + \ln\left(e^{\frac{t}{2}\ln(3)}\right) - \ln(100)\big)\\ &= \frac{2}{\ln(3)}\big(\ln\left(e^{\frac{t}{2}\ln(3)}\right)\big)\\ &= \frac{2}{\ln(3)}\cdot\frac{\ln(3)}{2}t = t.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(P\circ P^{-1})(t) = (P^{-1}\circ P)(t) = t.$$

Además, la función P^{-1} relaciona el tiempo transcurrido conocida la población de bacterias.

e) Se define $q(t) = \dfrac{P(t)-100}{t}$, determine $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{P(t)-100}{t}$.
Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{P(t)-100}{t} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{100\cdot 3^{\frac{t}{2}}-100}{t}\\ &= 100\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{t}{2}}-1}{t}\,.\end{aligned}$$

Donde las funciones $\varphi_1(t) = 3^{\frac{t}{2}} - 1$ y $\varphi_2(t)$ son diferenciables y satisfacen

$$\lim_{t\to 0^+}\varphi_1(t) = 0 = \lim_{t\to 0^+}\varphi_2(t)\,.$$

Además,

$$\varphi_1'(t) = 3^{\frac{t}{2}}\frac{\ln(3)}{2} \qquad \text{y} \qquad \varphi_2'(t) = 1$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{t}{2}}-1}{t} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{t}{2}}\frac{\ln(3)}{2}}{1} = \frac{\ln(3)}{2}\,.$$

Es decir, mediante la regla de L'Hoplital podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{P(t)-100}{t} = 100\cdot\frac{\ln(3)}{2} = 50\ln(3)\,.$$

2. *a*) Sea $f(x) = 3 \cdot 2^x - 10^x, \;\; x \geq 0.$

i) Determine x tal que $f'(x) = 0$.

Solución: Para $x > 0$, la función f es diferenciable y su derivada está dada por

$$f'(x) = 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 10^x \cdot \ln(10)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 10^x \cdot \ln(10) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = (2 \cdot 5)^x \cdot \ln(10)\,. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $2^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y usando la propiedad del cambio de base podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = (2 \cdot 5)^x \cdot \ln(10) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 3 \cdot \frac{\ln(2)}{\ln(10)} = 5^x \\ &\Longleftrightarrow \qquad 5^x = 3 \log(2) \end{aligned}$$

Ahora, dado que ambos miembros de la ecuación anterior son positivos aplicamos logaritmo en base 5 y encontramos el valor de x buscado, vale decir

$$\begin{aligned} 5^x = 3 \log(2) \qquad &\Longrightarrow \qquad x = \log_5(\log(2^3)) \\ &\Longrightarrow \qquad x = \log_5(\log(8))\,. \end{aligned}$$

ii) Resuelva $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución: En primer lugar, notemos que para $a > 0$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln(a)} = a^x \qquad \Longrightarrow \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 3 \cdot 2^x - 10^x\,dx \\ &= 3\int_0^1 2^x\,dx - \int_0^1 10^x\,dx \\ &= \left[\frac{3}{\ln(2)}2^x - \frac{1}{\ln(10)}10^x\right]\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{6}{\ln(2)} - \frac{10}{\ln(10)} - \left(\frac{3}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(10)}\right) \\ &= \frac{3}{\ln(2)} - \frac{9}{\ln(10)} \\ &= \frac{3\ln(10) - 9\ln(2)}{\ln(2)\ln(10)}\,. \end{aligned}$$

$b)$ Resuelva la siguiente ecuación: $\dfrac{1}{5-\log(x)} = 1 - \dfrac{1}{1+\log(x)}$.

Solución: Para $\log(x) \neq 5$ y $\log(x) \neq -1$, manipulando algebraicamente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5-\log(x)} = 1 - \frac{1}{1+\log(x)} \qquad &\iff \qquad \frac{1}{5-\log(x)} + \frac{1}{1+\log(x)} = 1 \\
&\iff \qquad \frac{5-\log(x)+1+\log(x)}{(5-\log(x))(1+\log(x))} = 1 \\
&\iff \qquad \frac{6}{(5-\log(x))(1+\log(x))} = \frac{(5-\log(x))(1+\log(x))}{(5-\log(x))(1+\log(x))} \\
&\iff \qquad (5-\log(x))(1+\log(x)) = 6 \\
&\iff \qquad (\log(x)-2)^2 - 3 = 0 \\
&\iff \qquad (\log(x)-2+\sqrt{3})(\log(x)-2-\sqrt{3}) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, buscamos los $x > 0$ tales que

$$\log(x) = 2-\sqrt{3} \qquad \text{o} \qquad \log(x) = 2+\sqrt{3}$$

Finalmente, se concluye que

$$x = 10^{2-\sqrt{3}} \qquad \text{o} \qquad x = 10^{2+\sqrt{3}}$$

3. Si comenzamos con q_0 milígramos de radio, la cantidad $q(t)$ de radio después de t años transcurridos está dada por:

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{-t/1600}$$

Se requiere que:

$a)$ Grafique $q(t)$.

Solución: En primer lugar, notemos que q es diferenciable para todo $t \geq 0$ y su derivada está dada por

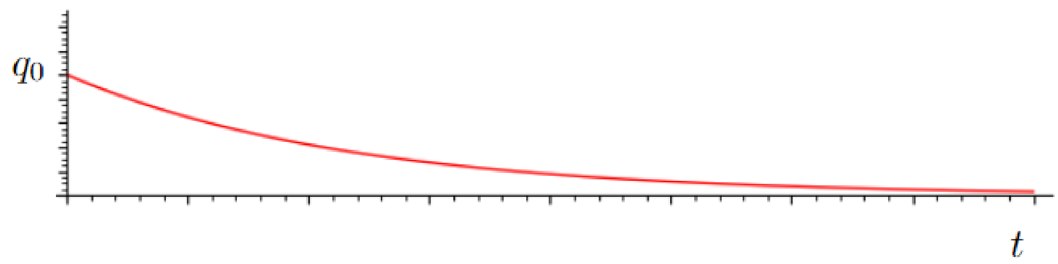
$$q'(x) = q_0 \cdot 2^{-t/1600} \cdot \frac{-\ln(2)}{1600},$$

Además, dado que para todo $x \in \mathbb{R}$: $2^x \geq 0$, podemos concluir que $q'(t) < 0$ para todo $t > 0$, es decir, q es decreciente para todo $t > 0$. Además, q' es diferenciable y

$$q''(x) = q_0 \cdot 2^{-t/1600} \cdot \frac{\ln^2(2)}{1600^2}$$

Notemos que $q''(x) > 0$ para todo $t > 0$, es decir, q es cóncava hacia arriba para todo $t > 0$.

Por último, q tiene un máximo en el instante inicial ($t = 0$). Finalmente, en virtud de lo anterior, podemos concluir que la gráfica de q está dada por



b) Determine la vida media. (la vida media es el tiempo que tarda una sustancia en disminuir a la mitad su valor inicial)

Solución: Sea τ el instante cuando queda la mitad de la sustancia inicial, vale decir,

$$\begin{aligned} q(\tau) = \frac{q_0}{2} \qquad &\iff \qquad q_0 \cdot 2^{-\tau/1600} = \frac{q_0}{2} \\ &\iff \qquad 2^{-\tau/1600} = 2^{-1} \\ &\implies \qquad -\tau/1600 = -1 \\ &\iff \qquad \tau = 1600\,. \end{aligned}$$

Es decir, la vida media es de 1600 años.

c) Muestre que la razón de cambio de la cantidad restante a los t años es directamente proporcional a la cantidad restante a los t años.

Solución: En primer lugar, para un instante t la razón de cambio de la cantidad de radio está dado por

$$q'(t) = q_0 \cdot 2^{-t/1600} \cdot \frac{-\ln(2)}{1600} = -\frac{q_0 \ln(2)}{1600} \cdot 2^{-t/1600}\,.$$

Podemos notar que para $k = -\dfrac{\ln(2)}{1600} \neq 0$, se tiene

$$\frac{q'(t)}{q(t)} = k,$$

Es decir, para cualquier instante t la razón de cambio de la cantidad de radio restante respecto al tiempo es directamente proporcional a la cantidad restante a los t años.