Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Pauta Control 4

15/11/2022

Instrucciones:

- **Disponen de 30 minutos para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SOLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas:

1. Sea $f : [0, 50] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$. Determine

$$\int_0^{\frac{e^4-1}{2}} f(x)\, dx. \qquad \textbf{(6 puntos)}$$

Solución: En primer lugar, determinamos la integral indefinida

$$I = \int \frac{3}{2x+1}\, dx = 3\int \frac{1}{2x+1}\, dx\,,$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Sea

$$u = 2x+1 \qquad \Longrightarrow \qquad du = 2\, dx\,,$$

luego,

$$I = 3\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{3}{2}\ln|u| + c = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + c\,.$$

$$\boxed{\textbf{2.5 puntos}}$$

Así,

$$\int_0^{\frac{e^4-1}{2}} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln|2x+1|\Bigg|_0^{\frac{e^4-1}{2}} \qquad \boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$
$$= \frac{3}{2}\left[\ln\left|2\cdot\frac{e^4-1}{2}+1\right| - \ln(1)\right]$$
$$= \frac{3}{2}\big[\ln|e^4| - 0\big] \qquad \boxed{\textbf{1 punto}}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot 4\ln(e)$$
$$= 6\cdot 1 = 6\,.$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{e^4-1}{2}} f(x)\,dx = 6\,.$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

2. Sea $g(x) = x\ln(x) - x, \quad x > 0$. Determine los intervalos de monotonía de g. **(6 puntos)**
Solución: Para determinar los intervalos de monotonía de g, usaremos la primera derivada, en efecto

$$g'(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln(x), \quad x > 0$$

$$\boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Además,

$$g'(x) = 0 \iff \ln(x) = 0$$
$$\iff x = 1\,.$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

Luego, analizando los signos de g'

	$x=0$	$x\in]0,1[$	$x=1$	$x\in]1,\infty[$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{ya que} \quad \frac{1}{2} < 1$$
$$g'(2) = \ln(2) > 0 \quad \text{ya que} \quad 2 > 1$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Por lo tanto, g es decreciente para los $x \in]0, 1]$ y es creciente para los $x \in [1, \infty[$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$