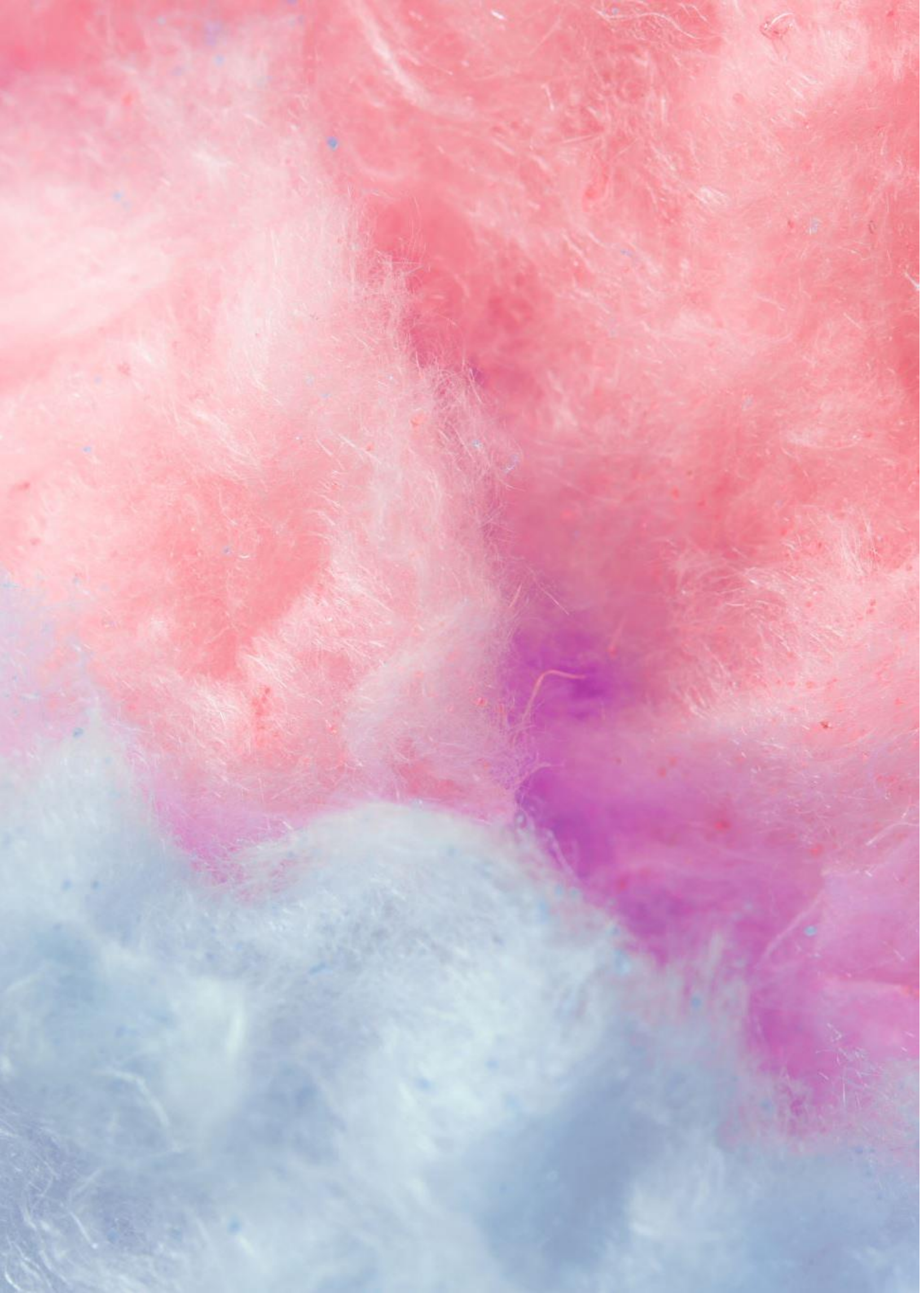


FÍSICA 01

Clase 07: Sistemas de referencia y Vectores

Parte 02

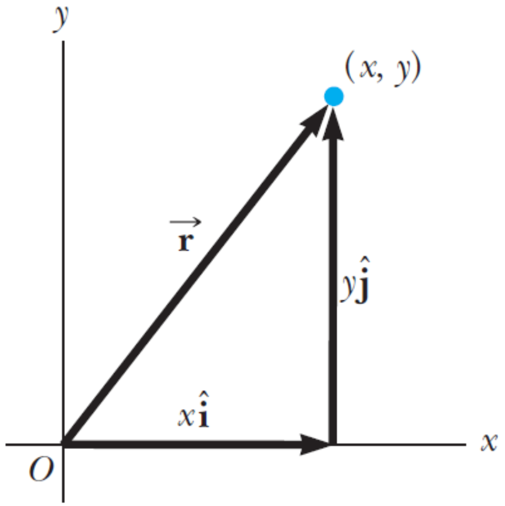
Profesor: Mirko Mol

VECTORES UNITARIOS

En general, para expresar un vector en sus coordenadas usamos unos vectores que se llaman vectores unitarios. ¿Qué es lo que son?

Vectores Unitarios

"Un Vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1"



El vector $\vec{r} = (x, y)$ se puede representar utilizando vectores unitarios de la siguiente forma:

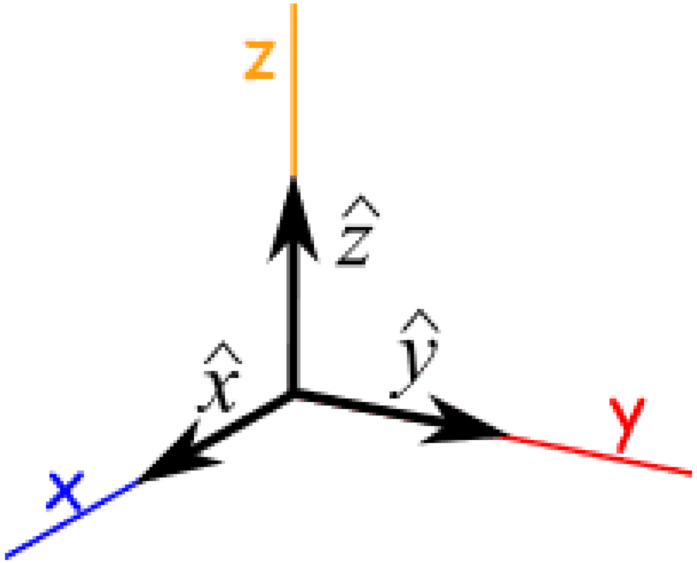
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

VECTORES UNITARIOS

Como bien definimos, un vector unitario tiene módulo igual a 1.
Por lo tanto, sea el vector $\vec{r}$ un vector no unitario y queremos que lo sea, hacemos lo siguiente:

- Calculamos el módulo de $\vec{r}$.
- Dividimos el vector por su módulo.

Para fines del curso, muchas veces vamos a usar los vectores unitarios $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$, como aquellos vectores que generan los ejes coordenados usuales.



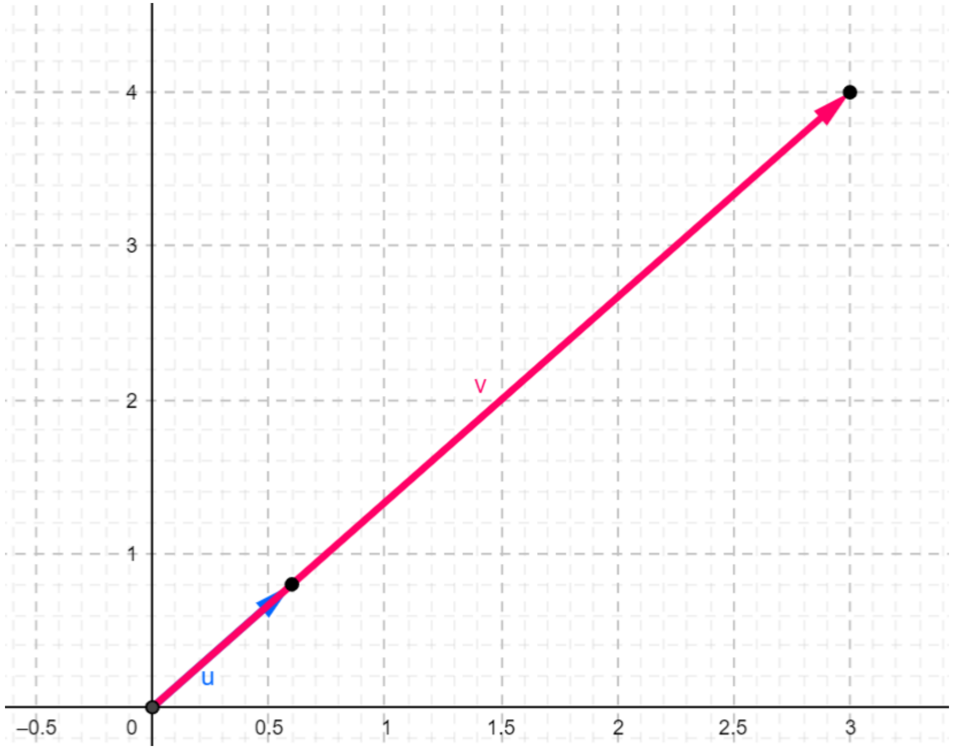
PROPIEDADES DE VECTORES

Problema 27:

Sea $\vec{r} = (3,4)$, escriba el vector unitario asociado al vector. Represente gráficamente el resultado.

Sol. :

El vector unitario es $\hat{r} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

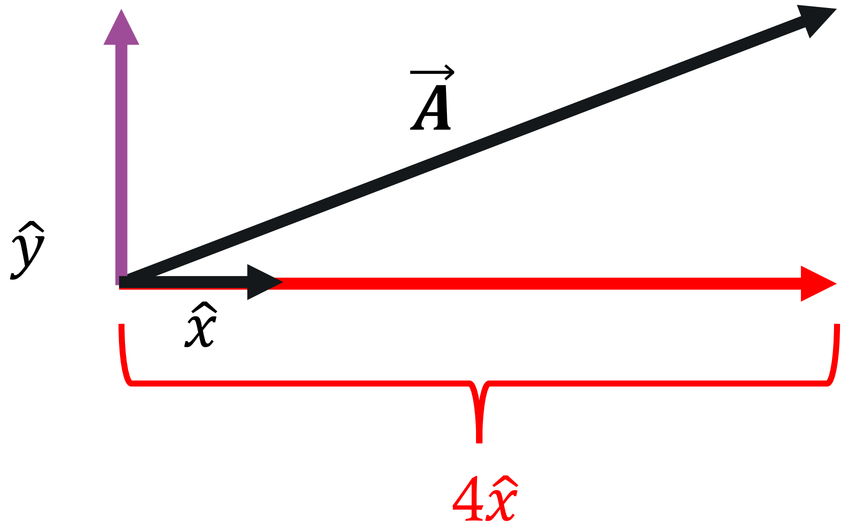


PROPIEDADES DE VECTORES

La utilidad de los vectores unitarios es que nos permiten representar de una manera más sencilla las operaciones entre vectores.

Consideremos el vector $\vec{A} = (4,2)$, este vector se puede representar utilizando los vectores unitarios de la siguiente forma:

$$\vec{A} = 4\,\hat{x} + 2\,\hat{y}$$



PROPIEDADES DE VECTORES

Lo anterior, nos permite escribir lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= (A_x, A_y) \\
&= A_x\hat{x} + A_y\hat{y}
\end{aligned}
$$

Debido a lo anterior, las operaciones de suma, resta y ponderación por escalar quedan definidas en base al algebra elemental.

Problema 28:

Sean $\vec{A} = 3\hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{B} = 14\hat{x} - 22\hat{y}$ y $\vec{C} = -27\hat{x} - 13\hat{y}$.

Realice las siguientes operaciones:

- $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$
- $3\vec{A} - 2\vec{B}$
- Calcule el módulo de $\vec{A} + \vec{B}$

PRODUCTO PUNTO

El producto punto es una operación matemática entre vectores que me permite saber cuál es el ángulo entre dichos vectores.
Matemáticamente se define como:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\ \cdot \vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\,|\,\vec{B}\,|}$$

Donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$.
Otra forma de aplicar el producto punto o producto interno es:

$$\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Por lo tanto, el resultado del producto punto es un **número.**

PRODUCTO PUNTO

Problema 29:
Sea $\vec{A} = (3,4)$ y $\vec{B} = (-6,-8)$. Calcule lo siguiente:

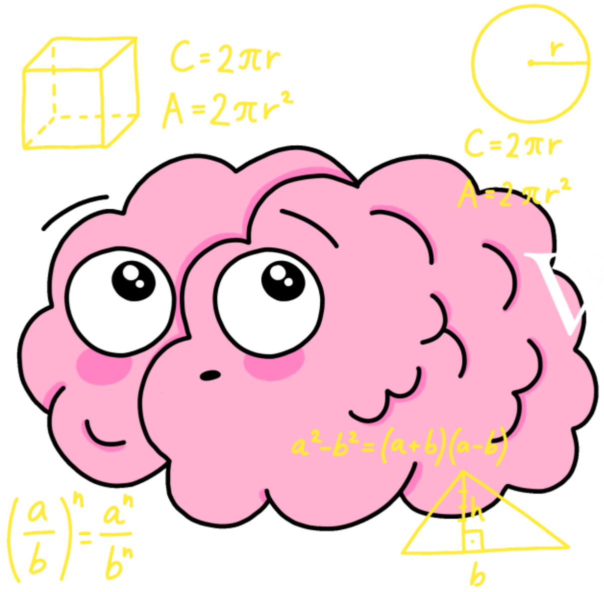
- $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- $\vec{A} \cdot \hat{x}$
- $\vec{A} \cdot \hat{y}$
- El ángulo entre el vector A y el vector unitario x.

OBJETIVOS DE LA CLASE

I. Comprender la naturaleza del movimiento en dos dimensiones.

II. Aplicar la cinemática en dos dimensiones.

III. Entender el movimiento de proyectil.



MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Igual que hicimos para el movimiento en una dimensión, ahora vamos a describir el movimiento de la partícula que está sucediendo en dos dimensiones con ayuda del vector posición $\vec{r}$.

- Recordamos del movimiento en 1D, que, al conocer la posición como función del tiempo, podemos describir con detalle todo lo que va a suceder con la partícula.

- Debemos notar que el gráfico que estamos visualizando a la derecha es de la coordenada x e y del movimiento.

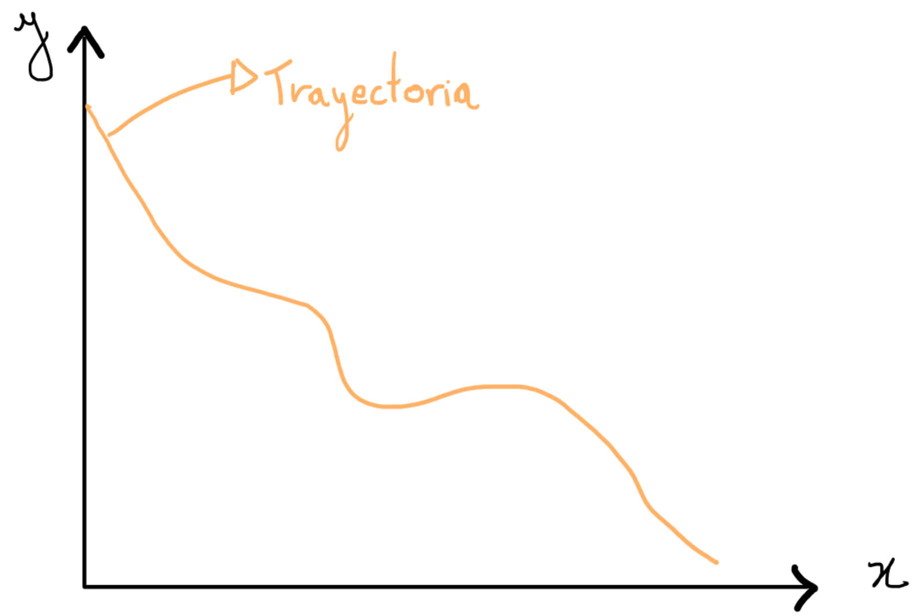


Fig.1.- Trayectoria de una partícula que tiene un movimiento bidimensional.

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

La posición de una partícula se describe utilizando un vector que va desde el origen hasta el punto de interés en la **trayectoria del cuerpo**.
El desplazamiento entre dos puntos de una partícula que tiene un movimiento en dos dimensiones se calcula como:

$$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_i}$$

Donde $\overrightarrow{r_i}$ es la posición "inicial" del cuerpo y $\overrightarrow{r_f}$ es la posición final del móvil.

Notemos que el desplazamiento es un vector, porque es la diferencia entre dos vectores.

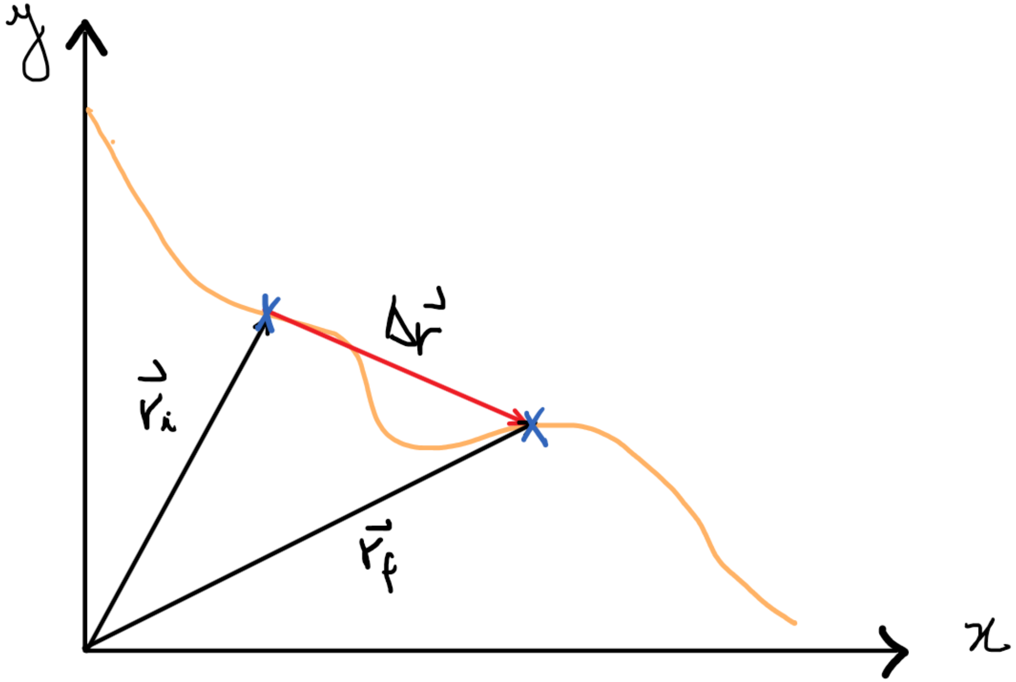


Fig.2.-Representación del vector desplazamiento.

Problema 30:

Una persona que sale a caminar sigue la trayectoria que se muestra en la figura P3.57. El viaje total consiste en cuatro trayectorias en línea recta. Al final de la caminata, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona, medido desde el punto de partida?

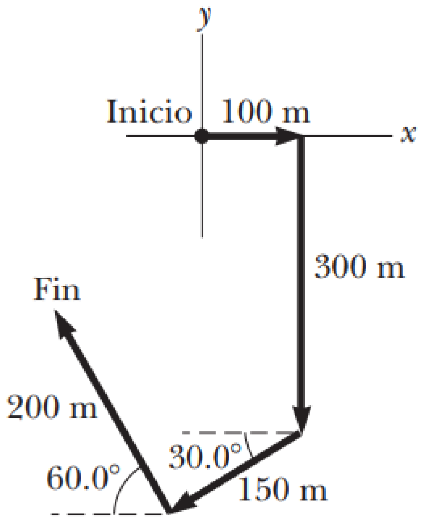


Figura P3.57

Recuerde que:

$$\sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

La velocidad promedio cuantifica cuanto cambia la posición de una partícula en un determinado tiempo, matemáticamente es:

$$\overrightarrow{v_p} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- El vector desplazamiento sobre el intervalo de tiempo entre las posiciones nos permite calcular la velocidad promedio en dicho intervalo.

- Recuerde que un vector por un escalar (un número) es una operación definida y, el resultado es otro vector.

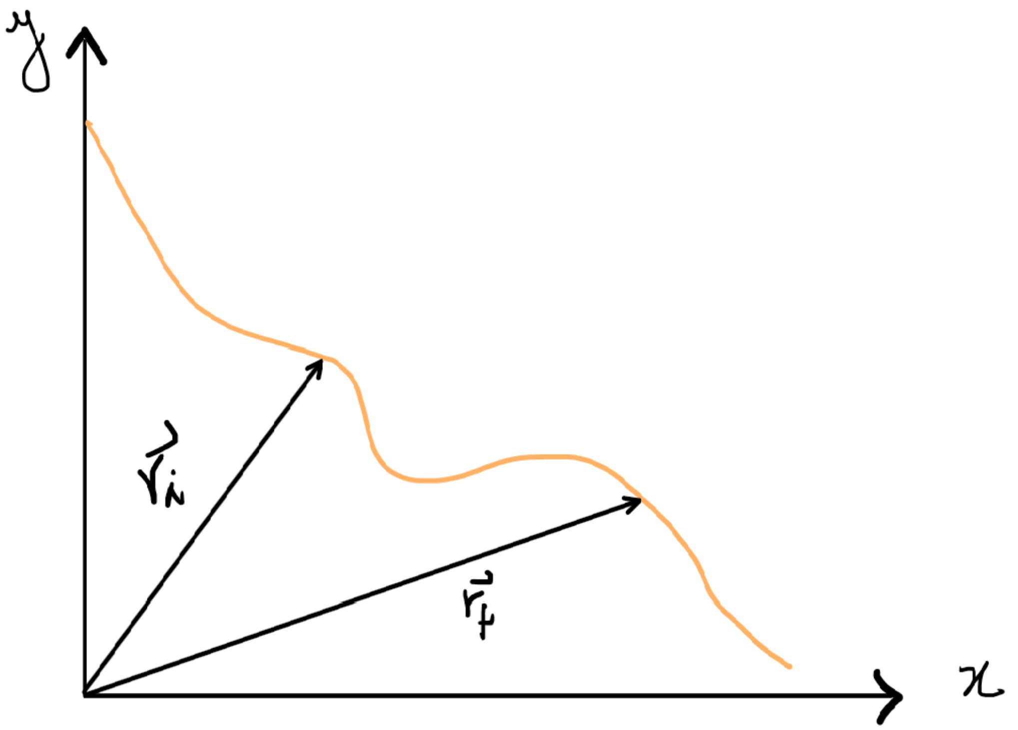


Fig.3.-Representación del vector desplazamiento y su relación con la velocidad.
La rapidez del cuerpo es el modulo de la velocidad

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

La velocidad promedio representa la velocidad en un intervalo de tiempo, y no es la velocidad que tiene la partícula en la posición como tal.
Por lo tanto, podemos definir **la velocidad instantánea** como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- En la figura (4) podemos observar que mientras más pequeño el intervalo de tiempo vamos a obtener que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

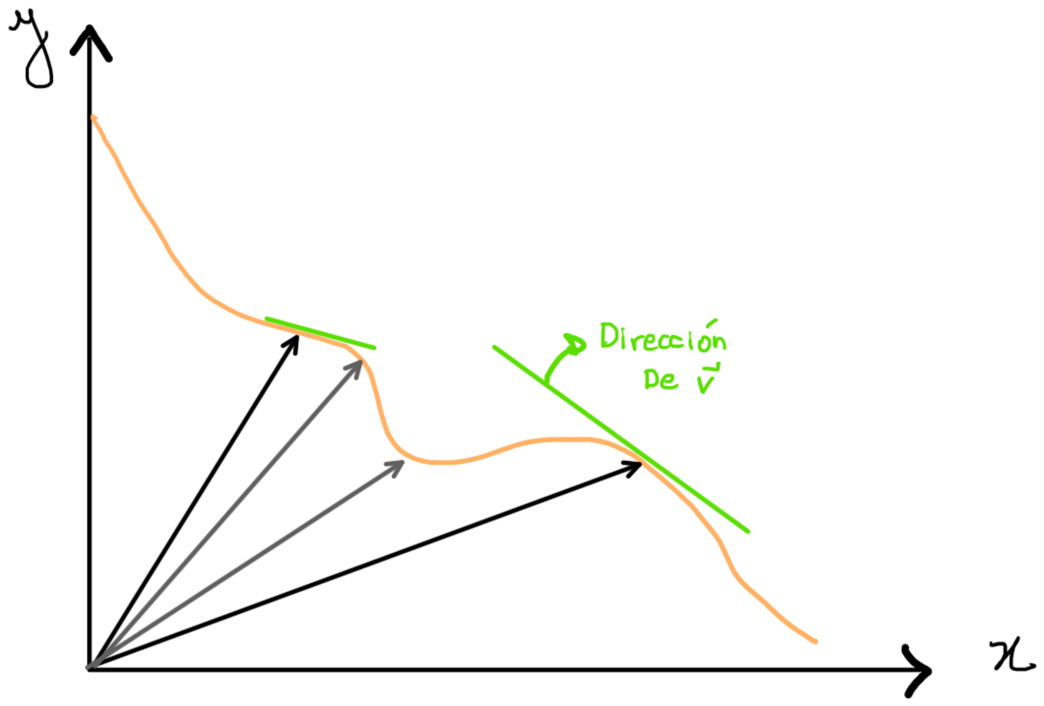


Fig.4.-Representación de la velocidad promedio e instantánea.

Antes de continuar, debemos notar que el vector posición lo podemos escribir como:

$$\vec{r} = r_x\ \hat{x} + r_y\,\hat{y}$$

Por lo tanto, al calcular la velocidad instantánea tenemos que:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta r_x}{\Delta t}\ \hat{x} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t}\ \hat{y}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{dr_x}{dt}\,\hat{x} + \frac{dr_y}{dt}\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r_x\ \hat{x} + r_y\,\hat{y}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La aceleración promedio de una partícula cuantifica el cambio de velocidad en un determinado intervalo de tiempo, matemáticamente se representa como:

$$\overrightarrow{a_p} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

- Para ver la dirección hacia donde apunta la aceleración, debemos ver en que dirección apunta el vector $\Delta\vec{v}$

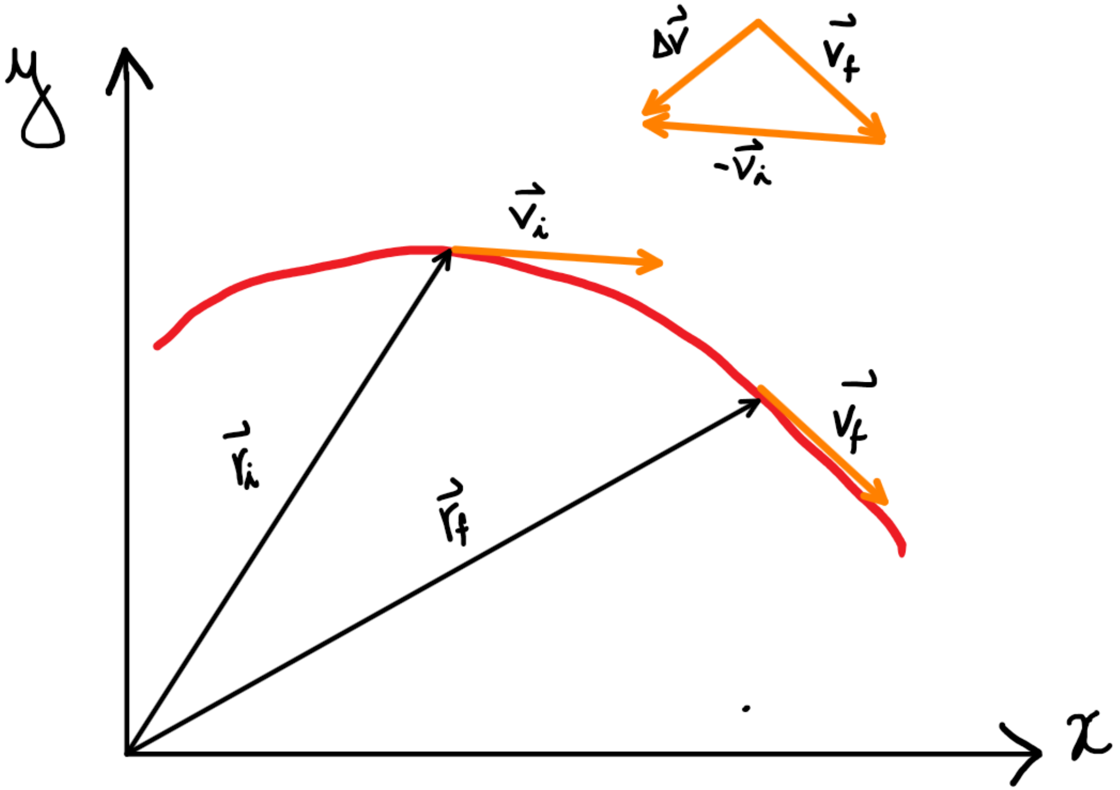


Fig.5.- Como visualizar hacia donde apunta la aceleración.

La aceleración instantánea de una partícula es el cambio de velocidad de un cuerpo en un intervalo de tiempo muy pequeño, por lo que matemáticamente es:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- Como ya hicimos con la velocidad, podemos escribir la expresión anterior como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

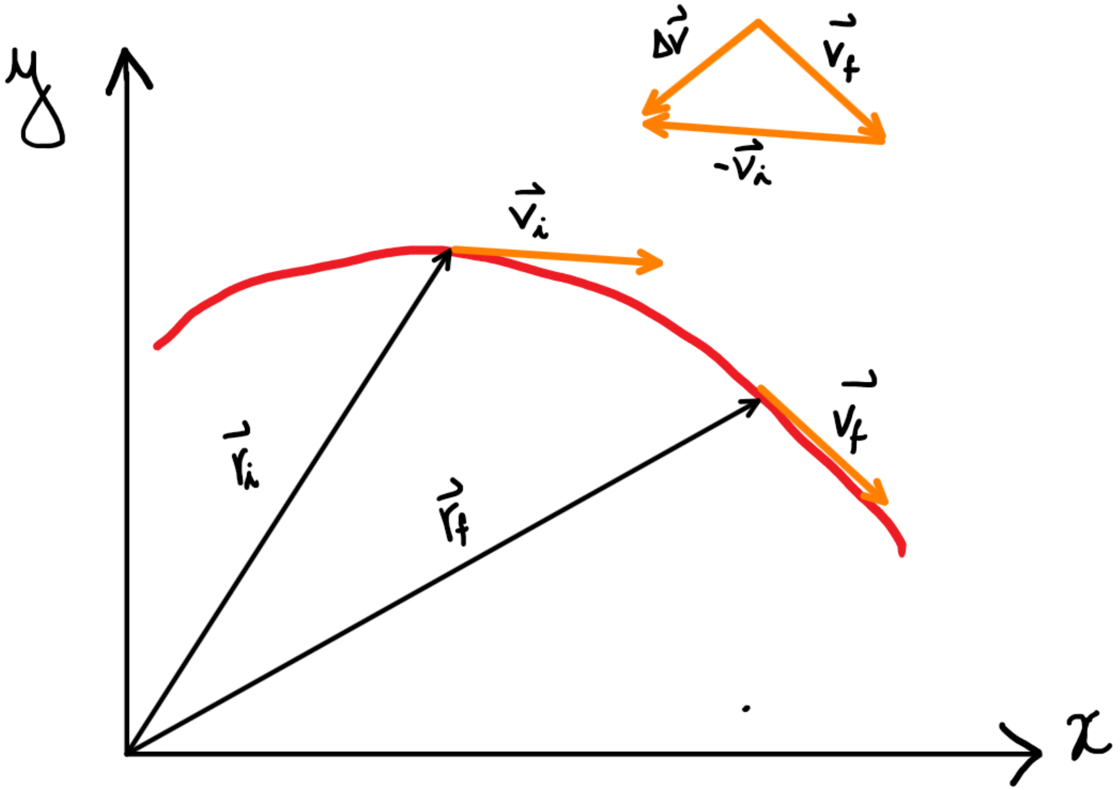


Fig.6.- La aceleración instantánea no es sencilla de visualizar en un gráfico de posición.

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

El movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos independientes, en cada una de las dos direcciones asociadas con los ejes x e y.

Por lo tanto, podemos escribir el vector posición de la siguiente manera:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}$$

Donde $x(t)$ e $y(t)$ corresponden a la posición en función del tiempo en el eje $\hat{x}$ e $\hat{y}$ correspondientemente.

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

En el caso de la velocidad instantánea habíamos obtenido la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$$

Esto quiero decir que la velocidad en cada uno de los ejes va a **depender únicamente** del movimiento en dicho eje.

Problema 31:

Un cuerpo que se mueve en 2D tiene un vector posición que se expresa como:

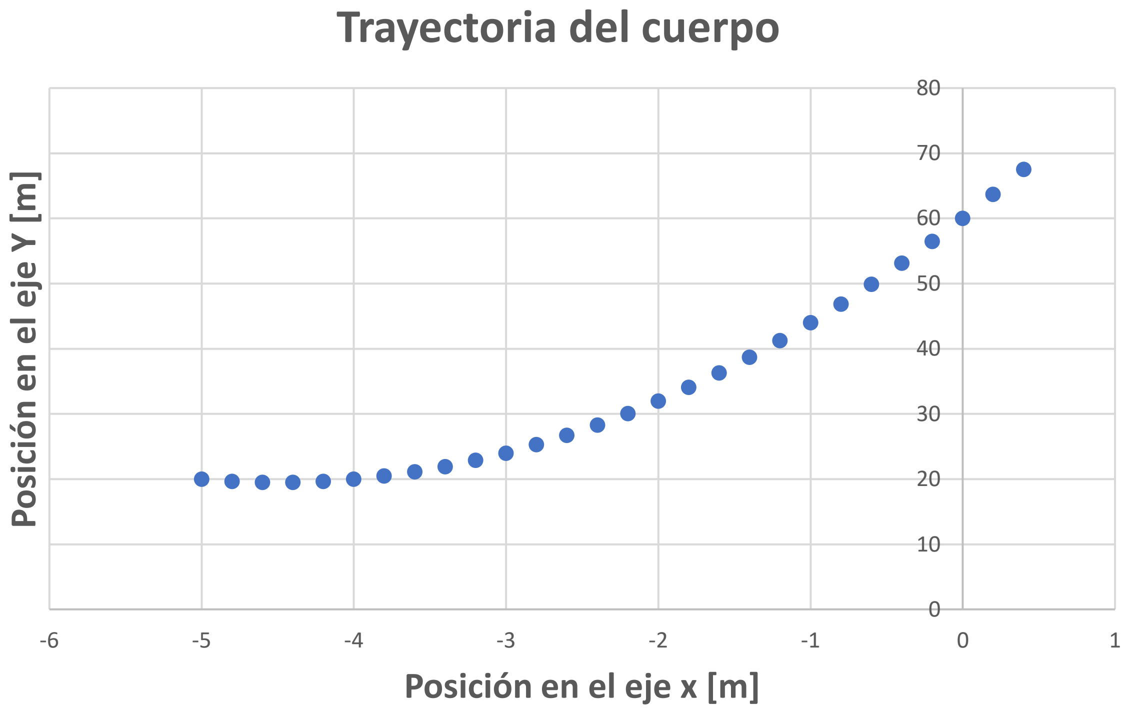
$$\vec{r} = (2t - 5, 20 - 4t + 8t^2)$$

Encuentre una expresión para el vector velocidad y la rapidez que tendría el cuerpo en el tiempo $t = 2\ [s]$.

Problema 32:

Dibuje la trayectoria de la partícula hasta los 3 [s]. Realice un gráfico de la rapidez en función del tiempo.

MOVIMIENTO EN 2D



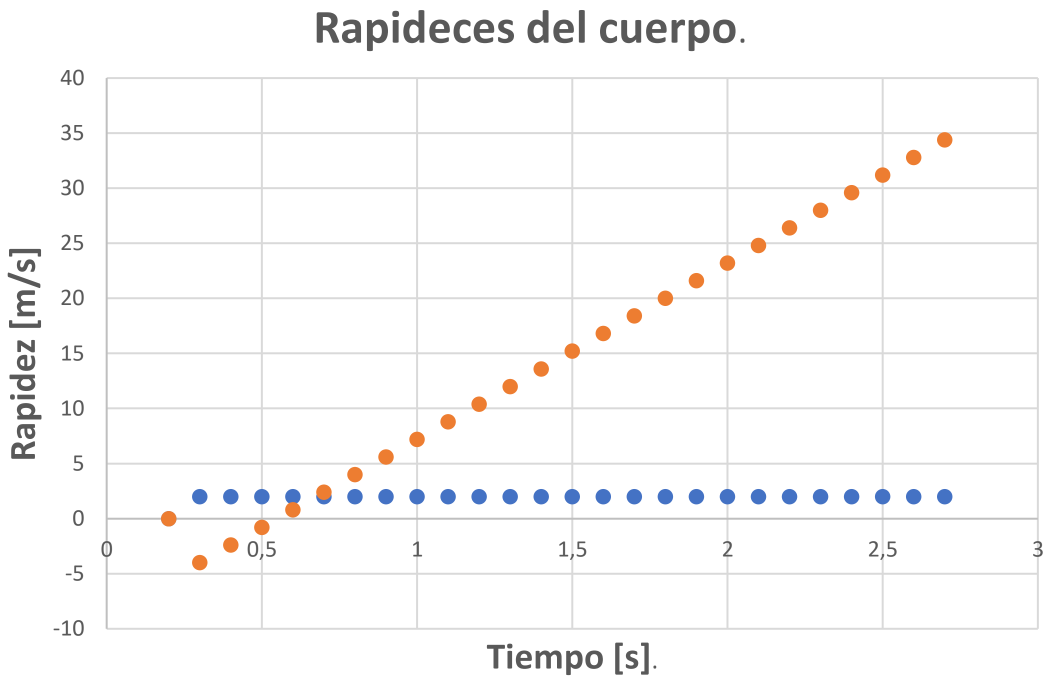


Fig.7.- Representación gráfica de la trayectoria del cuerpo y las rapideces correspondientes entre 0 y 3 segundos.

MODELO DE ACELERACIÓN CONSTANTE

Si suponemos que la aceleración es constante, implica que todas sus componentes lo son, esto quiere decir a_x y a_y son un número fijo. Luego, como definimos que los movimientos en cada eje eran independientes, podemos decir que:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$$
$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

Por lo tanto, el vector velocidad final $\overrightarrow{v_f}$ es:

$$\overrightarrow{v_f} = v_{xf}\ \hat{x} +\ v_{yf}\ \hat{y}$$
$$\overrightarrow{v_f} = (v_{xi} + a_x t)\ \hat{x} + \left(v_{yi} + a_y t\right)\ \hat{y}$$
$$\overrightarrow{v_f} = \left(v_{xi}\hat{x} + v_{yi}\hat{y}\right)\ + \left(a_x t\hat{x} + a_y t\hat{y}\right)$$

$$\overrightarrow{v_f} = \overrightarrow{v_i} + \vec{a}t$$

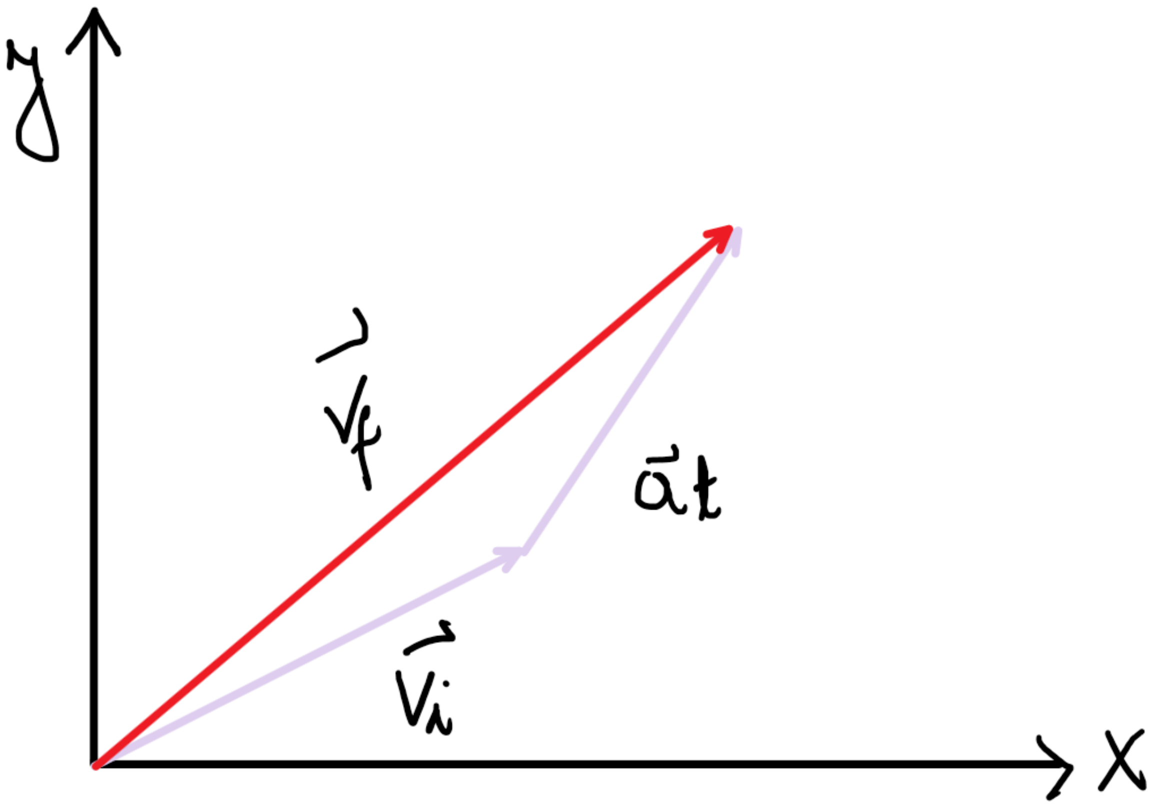


Fig.8.- Representación gráfica del modelo de velocidad o aceleración constante. Donde se representa la relación entre los vectores velocidad inicial, final y aceleración.

Problema 33:

Un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de 3[m/s] formando un ángulo de 30° con la horizontal, y el vector de aceleración tiene coordenadas (3,-4) [m/s^2].

- Escriba el vector $\overrightarrow{v_i}$ y la ecuación de la velocidad.
- Calcule el vector $\overrightarrow{v_f}$ para un t igual a 6. Indique la velocidad final para cada coordenada.

MODELO DE ACELERACIÓN CONSTANTE

Como ya hemos visto, si la aceleración en constante, podemos escribir la posición como:

$$x_f = x_i + v_{xi} + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{yi} + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Por lo tanto, el vector posición final $\overrightarrow{r_f}$ es:

$$\overrightarrow{r_f} = x_f\ \hat{x} + y_f\ \hat{y}$$

$$\overrightarrow{r_f} = (x_i + v_{xi} + \frac{1}{2}a_x t^2)\ \hat{x} + \left(y_i + v_{yi} + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\ \hat{y}$$

$$\overrightarrow{r_f} = (x_i\hat{x} + y_i\hat{y}) + \left(v_{xi}\hat{x} + v_{yf}\hat{y}\right)t + \frac{1}{2}\left(a_{\mathrm{x}}\hat{x} + a_{\mathrm{y}}\hat{y}\right)t^2$$

$$\overrightarrow{r_f} = \overrightarrow{r_i} + \overrightarrow{v_i}t + \frac{1}{2}\ \vec{a}t^2$$

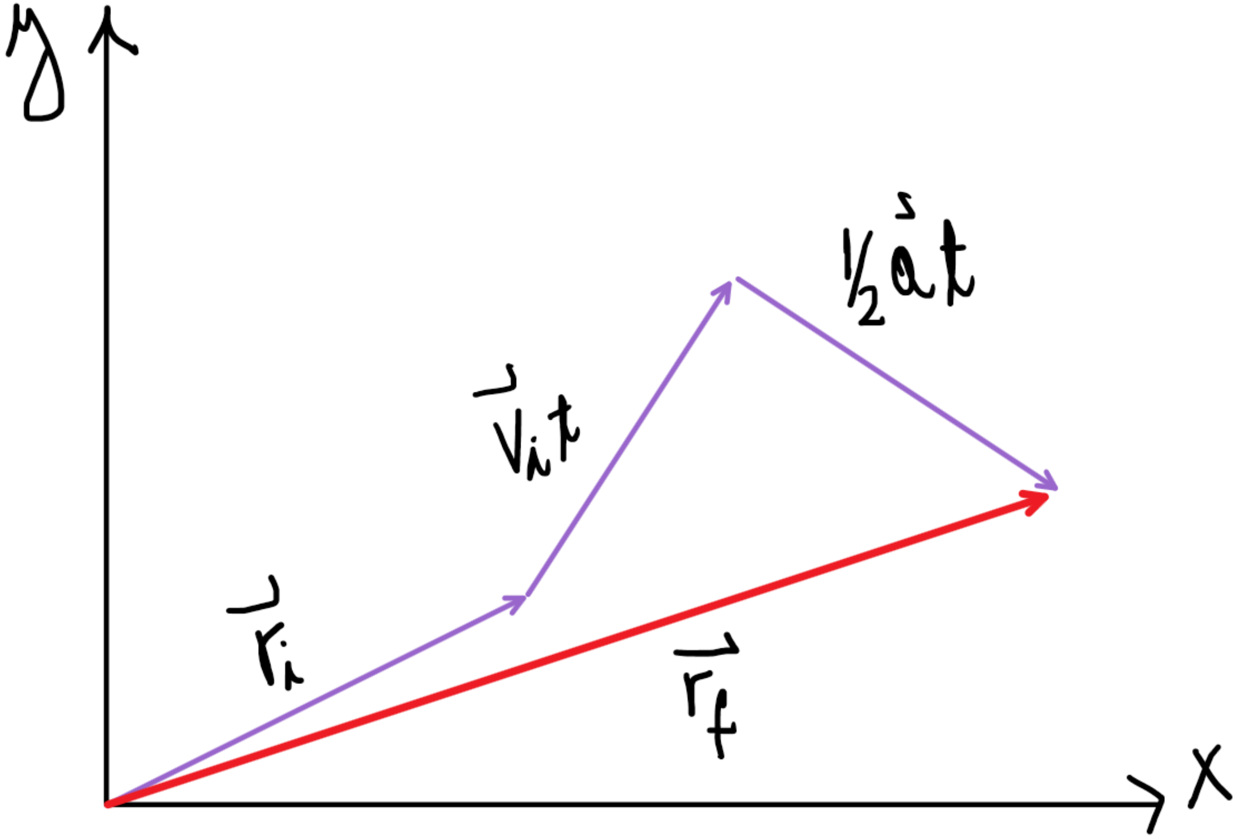


Fig.9.- Representación gráfica del calculo con vectores del vector posición en el modelo de aceleración constante. Donde se representa la relación entre los vectores posición y velocidad inicial, aceleración y posición final.

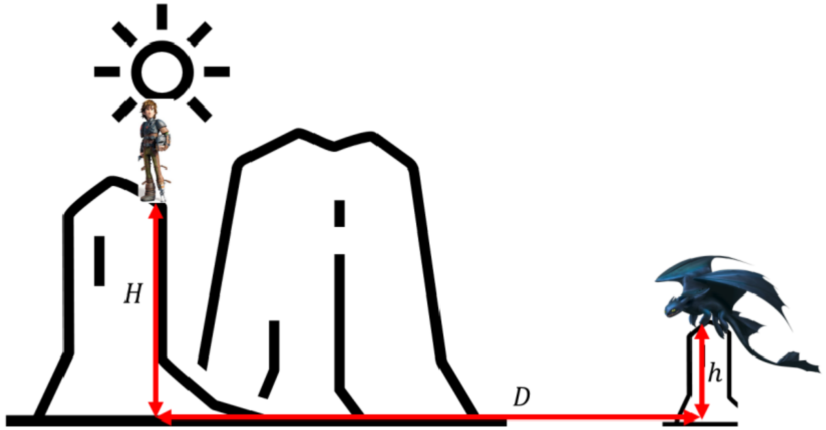
PROBLEMA 34

18. Hipo, rey de Berck ha sido acorralado en el borde de un acantilado por Grimmel. A una distancia horizontal D está atrapado dentro de una red Chimuelo, que ve cómo su amigo caerá al agua. Chimuelo logra soltarse y vuela horizontalmente con velocidad constante a una altura h medida desde el mar, para no ser visto y así lograr atrapar a su amigo mientras este caiga. Hipo ve cómo Chimuelo se libera y se deja caer en el mismo instante en que su dragón se suelta desde una altura H ¿ h. ¿Logrará Chimuelo salvar a Hipo? Para determinar si esto es posible le pedimos que:

   a) Indique el sistema de referencia a utilizar y escriba las ecuaciones de posición de Hipo y de Chimuelo.

   b) Determine el tiempo que tarda Hipo en caer hasta h desde la cima del acantilado de altura H.

   c) Determine la velocidad horizontal v_C que debe tener Chimuelo para lograr atrapar a Hipo y así rescatarlo de una muerte segura.



Problema 35:

Un cuerpo se mueve en dos dimensiones con los siguientes parámetros:

$$v_x = 1\left[\frac{m}{s}\right];\, v_y = 2\left[\frac{m}{s}\right];\, r_y = a_y = 0\,;\, a_x = 2\,\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

- Escriba los vectores velocidad y aceleración.
- Escriba las ecuaciones de movimiento para la partícula.
- Realice todos los gráficos de posición y tiempo hasta $t = 2[s]$.

MOVIMIENTO EN 2D