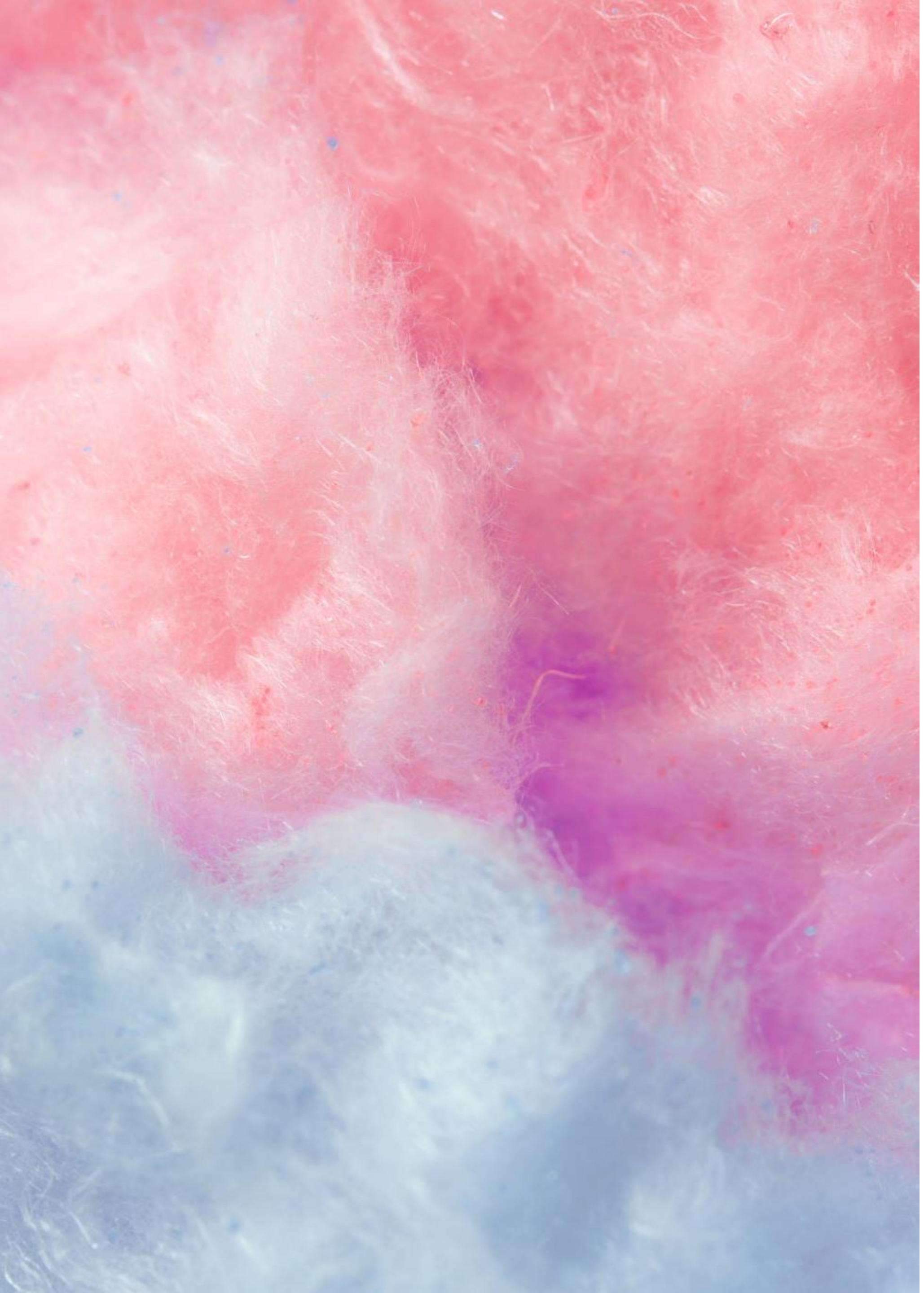


FÍSICA 01

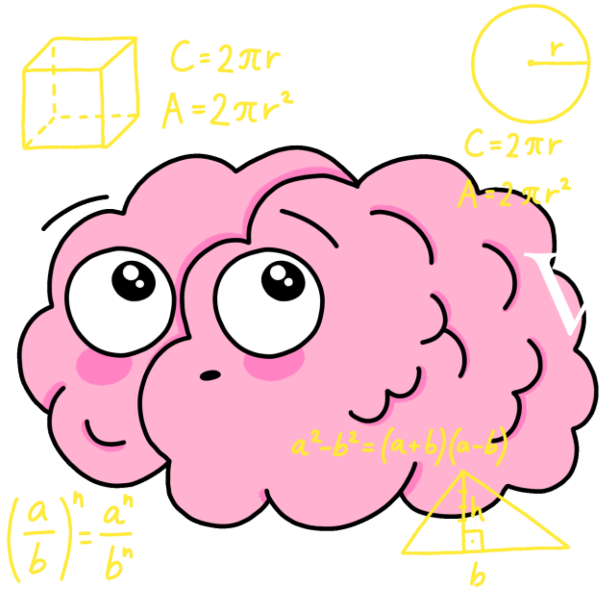
Clase 08: Movimiento en 2D y Lanzamiento de proyectil.

Profesor: Mirko Mol

OBJETIVOS DE LA CLASE

I. Aplicar la cinemática en dos dimensiones.

II. Entender el movimiento de proyectil.



MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

El movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos independientes, en cada una de las dos direcciones asociadas con los ejes x e y.

Por lo tanto, podemos escribir el vector posición de la siguiente manera:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}$$

Donde $x(t)$ e $y(t)$ corresponden a la posición en función del tiempo en el eje $\hat{x}$ e $\hat{y}$ correspondientemente.

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

En el caso de la velocidad instantánea habíamos obtenido la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$$

Esto quiero decir que la velocidad en cada uno de los ejes va a **depender únicamente** del movimiento en dicho eje.

Problema 31:

Un cuerpo que se mueve en 2D tiene un vector posición que se expresa como:

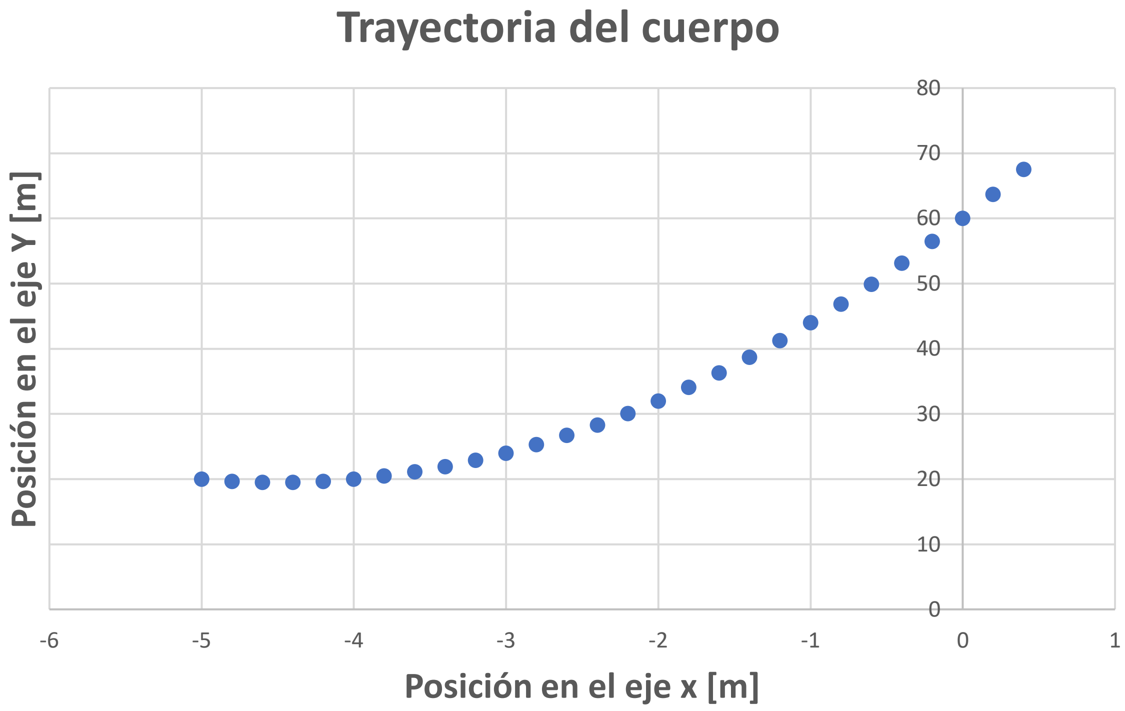
$$\vec{r} = (2t - 5, 20 - 4t + 8t^2)$$

Encuentre una expresión para el vector velocidad y la rapidez que tendría el cuerpo en el tiempo $t = 2\ [s]$.

Problema 32:

Dibuje la trayectoria de la partícula hasta los 3 [s]. Realice un gráfico de la rapidez en función del tiempo.

MOVIMIENTO EN 2D



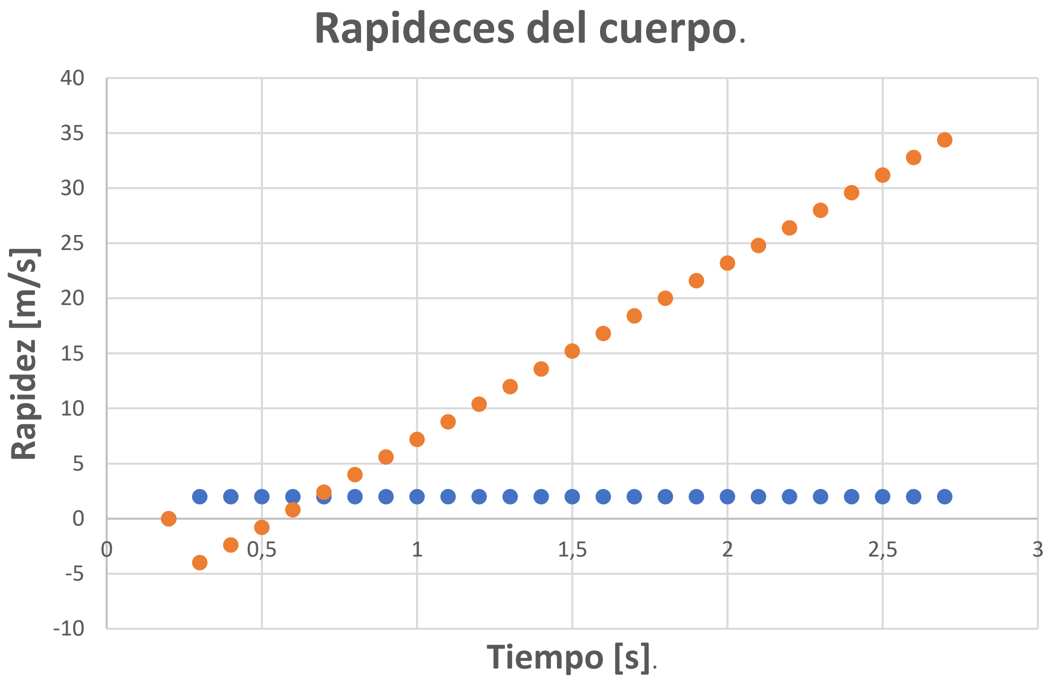


Fig.7.- Representación gráfica de la trayectoria del cuerpo y las rapideces correspondientes entre 0 y 3 segundos.

MODELO DE ACELERACIÓN CONSTANTE

Si suponemos que la aceleración es constante, implica que todas sus componentes lo son, esto quiere decir a_x y a_y son un número fijo. Luego, como definimos que los movimientos en cada eje eran independientes, podemos decir que:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$$

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

Por lo tanto, el vector velocidad final $\overrightarrow{v_f}$ es:

$$\overrightarrow{v_f} = v_{xf}\ \hat{x} + \ v_{yf}\ \hat{y}$$

$$\overrightarrow{v_f} = (v_{xi} + a_x t)\ \hat{x} + \left(v_{yi} + a_y t\right)\ \hat{y}$$

$$\overrightarrow{v_f} = \left(v_{xi}\hat{x} + v_{yi}\hat{y}\right)\ + \left(a_x t\hat{x} + a_y t\hat{y}\right)$$

$$\overrightarrow{v_f} = \overrightarrow{v_i} + \vec{a}t$$

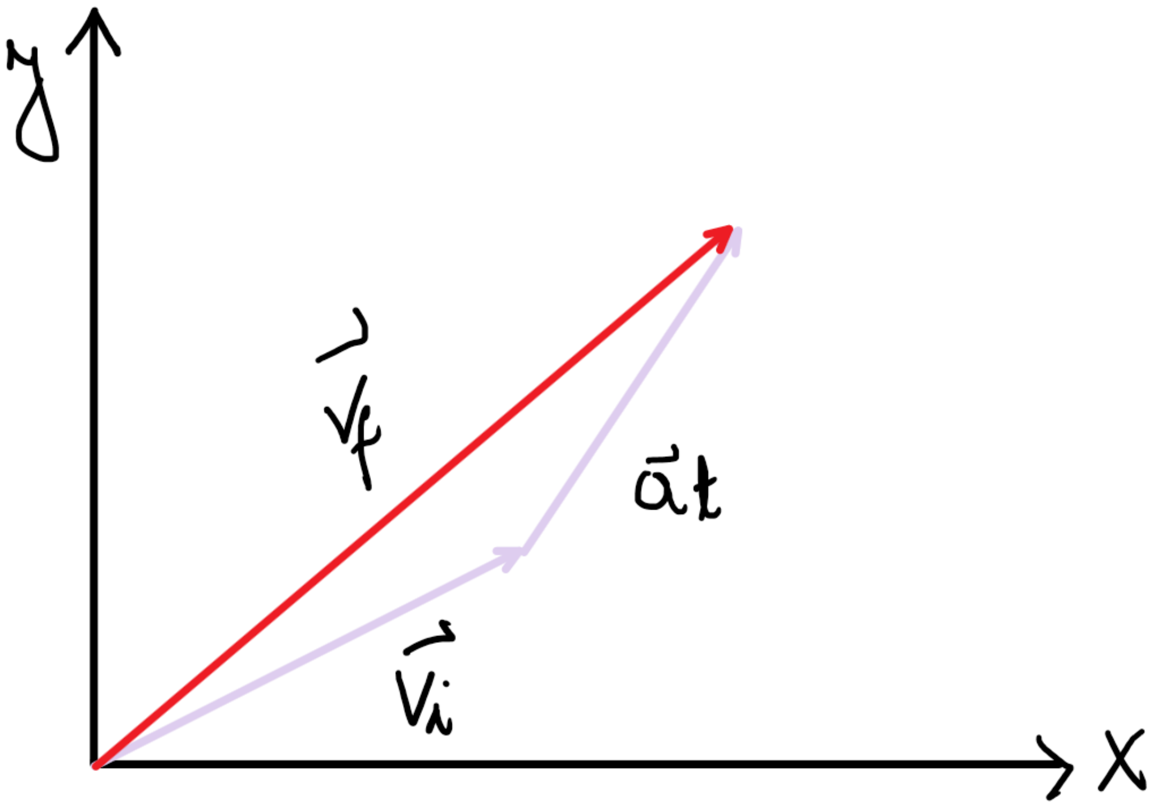


Fig.8.- Representación gráfica del modelo de velocidad o aceleración constante. Donde se representa la relación entre los vectores velocidad inicial, final y aceleración.

Problema 33:

Un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de 3[m/s] formando un ángulo de 30° con la horizontal, y el vector de aceleración tiene coordenadas (3,-4) [m/s^2].

- Escriba el vector $\overrightarrow{v_i}$ y la ecuación de la velocidad.
- Calcule el vector $\overrightarrow{v_f}$ para un t igual a 6. Indique la velocidad final para cada coordenada.

MODELO DE ACELERACIÓN CONSTANTE

Como ya hemos visto, si la aceleración en constante, podemos escribir la posición como:

$$x_f = x_i + v_{xi} + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{yi} + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Por lo tanto, el vector posición final $\overrightarrow{r_f}$ es:

$$\overrightarrow{r_f} = x_f\ \hat{x} + y_f\ \hat{y}$$

$$\overrightarrow{r_f} = (x_i + v_{xi} + \frac{1}{2} a_x t^2)\ \hat{x} + \left(y_i + v_{yi} + \frac{1}{2} a_y t^2\right)\ \hat{y}$$

$$\overrightarrow{r_f} = (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) + \left(v_{xi} \hat{x} + v_{yf} \hat{y}\right) t + \frac{1}{2} \left(a_\mathrm{x} \hat{x} + a_\mathrm{y} \hat{y}\right) t^2$$

$$\overrightarrow{r_f} = \overrightarrow{r_i} + \overrightarrow{v_i} t + \frac{1}{2}\ \vec{a} t^2$$

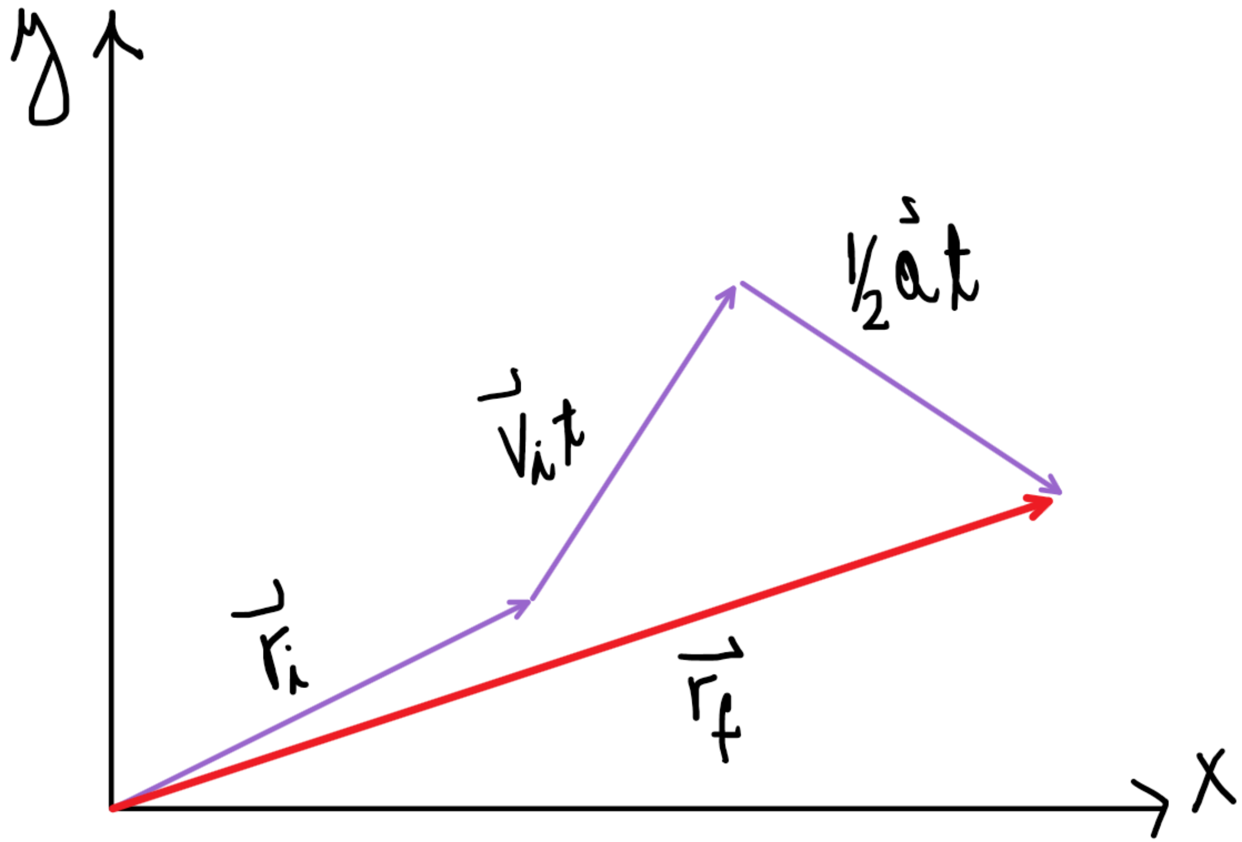


Fig.9.- Representación gráfica del cálculo con vectores del vector posición en el modelo de aceleración constante. Donde se representa la relación entre los vectores posición y velocidad inicial, aceleración y posición final.

PROBLEMA 34

18. Hipo, rey de Berck ha sido acorralado en el borde de un acantilado por Grimmel. A una distancia horizontal D está atrapado dentro de una red Chimuelo, que ve cómo su amigo caerá al agua. Chimuelo logra soltarse y vuela horizontalmente con velocidad constante a una altura h medida desde el mar, para no ser visto y así lograr atrapar a su amigo mientras este caiga. Hipo ve cómo Chimuelo se libera y se deja caer en el mismo instante en que su dragón se suelta desde una altura $H > h$. ¿Logrará Chimuelo salvar a Hipo? Para determinar si esto es posible le pedimos que:

   a) Indique el sistema de referencia a utilizar y escriba las ecuaciones de posición de Hipo y de Chimuelo.

   b) Determine el tiempo que tarda Hipo en caer hasta h desde la cima del acantilado de altura H.

   c) Determine la velocidad horizontal v_C que debe tener Chimuelo para lograr atrapar a Hipo y así rescatarlo de una muerte segura.

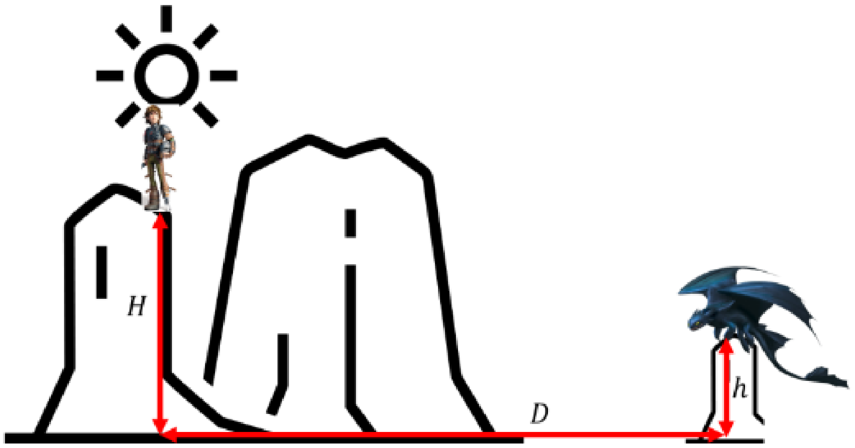


Figura 6: Representación de la situación del problema 18.

MOVIMIENTO EN 2D

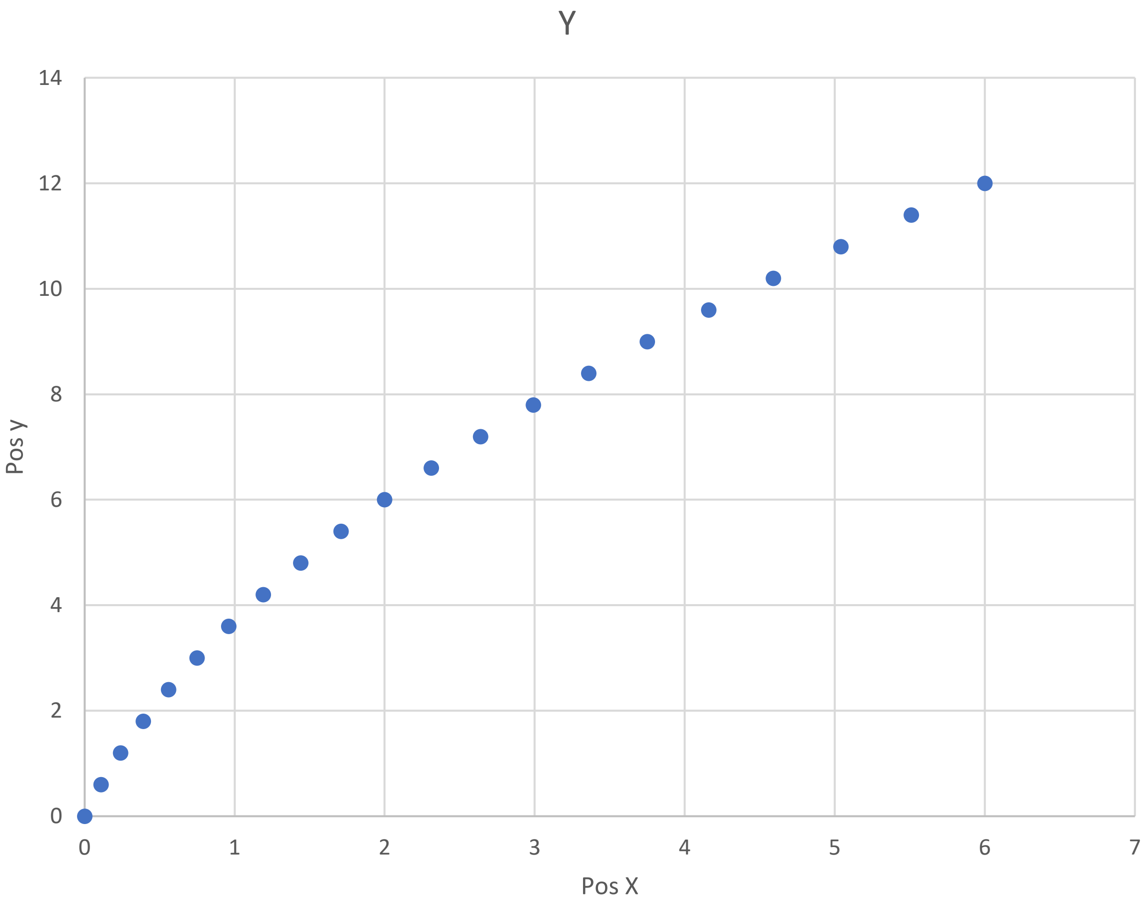
Problema 35:

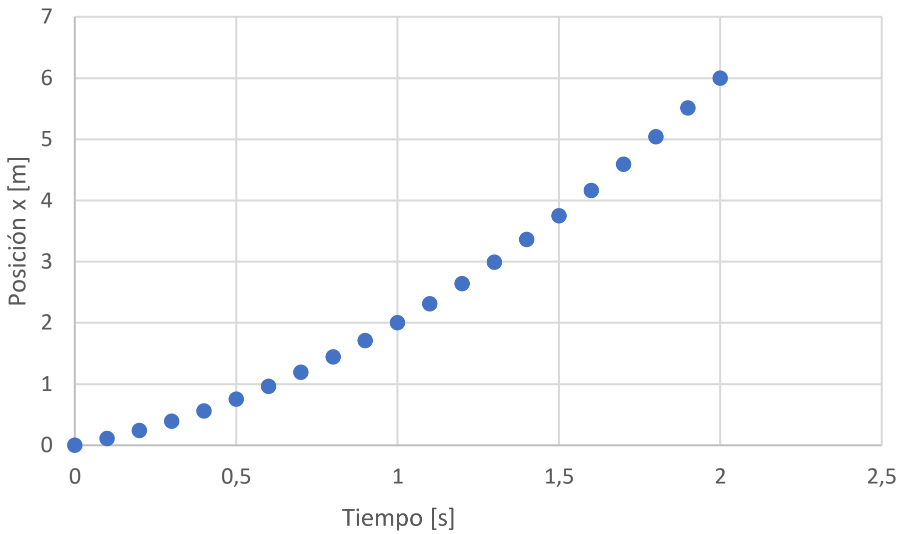
Un cuerpo se mueve en dos dimensiones con los siguientes parámetros:

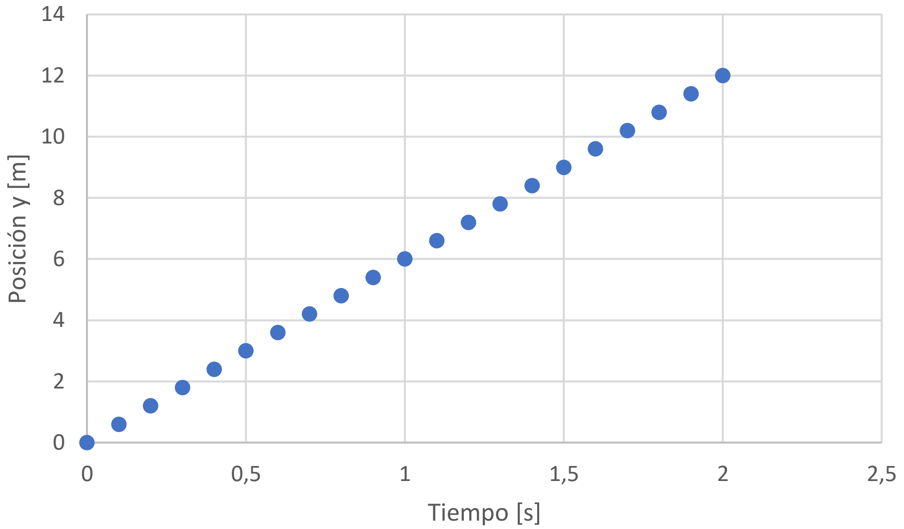
$$v_x = 1\left[\frac{m}{s}\right];v_y = 2\left[\frac{m}{s}\right];r_y = a_y = 0\,;a_x = 2\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

- Escriba los vectores velocidad y aceleración.
- Escriba las ecuaciones de movimiento para la partícula.
- Realice todos los gráficos de posición y tiempo hasta $t = 2[s]$.

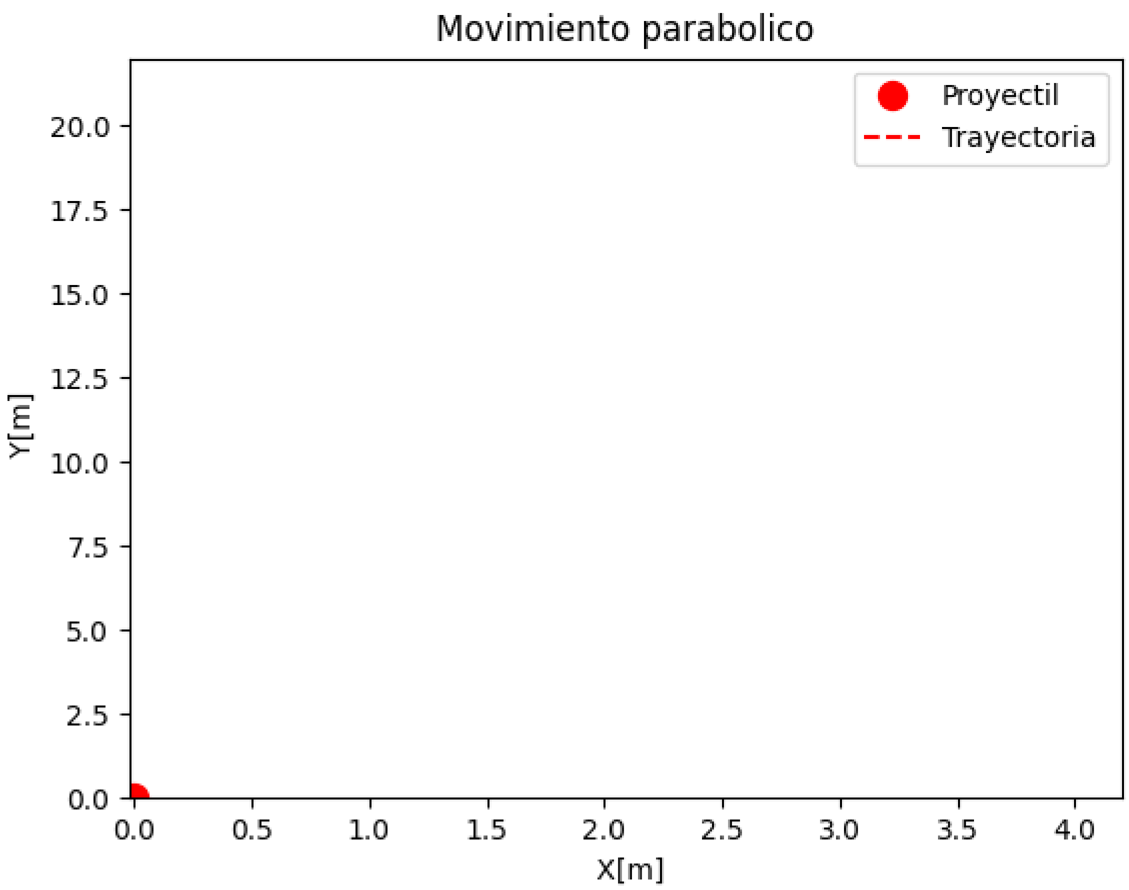
MOVIMIENTO EN 2D







MOVIMIENTO DE PROYECTIL



Cuando hacemos algún deporte y lanzamos algún tipo de balón, este sigue una trayectoria predeterminada. Este tipo de movimiento se llama el movimiento de proyectil, el cual es un movimiento que se caracteriza porque la trayectoria de este es una parábola.

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

El movimiento de proyectil lo vamos a estudiar siempre bajo dos condiciones:

- La aceleración es constante en el intervalo del movimiento y se dirige hacia abajo.
- El efecto del roce de proyectil con el aire es despreciable

Por lo tanto, el vector posición en función del tiempo se puede expresar como:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_i} + \overrightarrow{v_i}t + \frac{1}{2}\,\vec{g}t^2$$

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

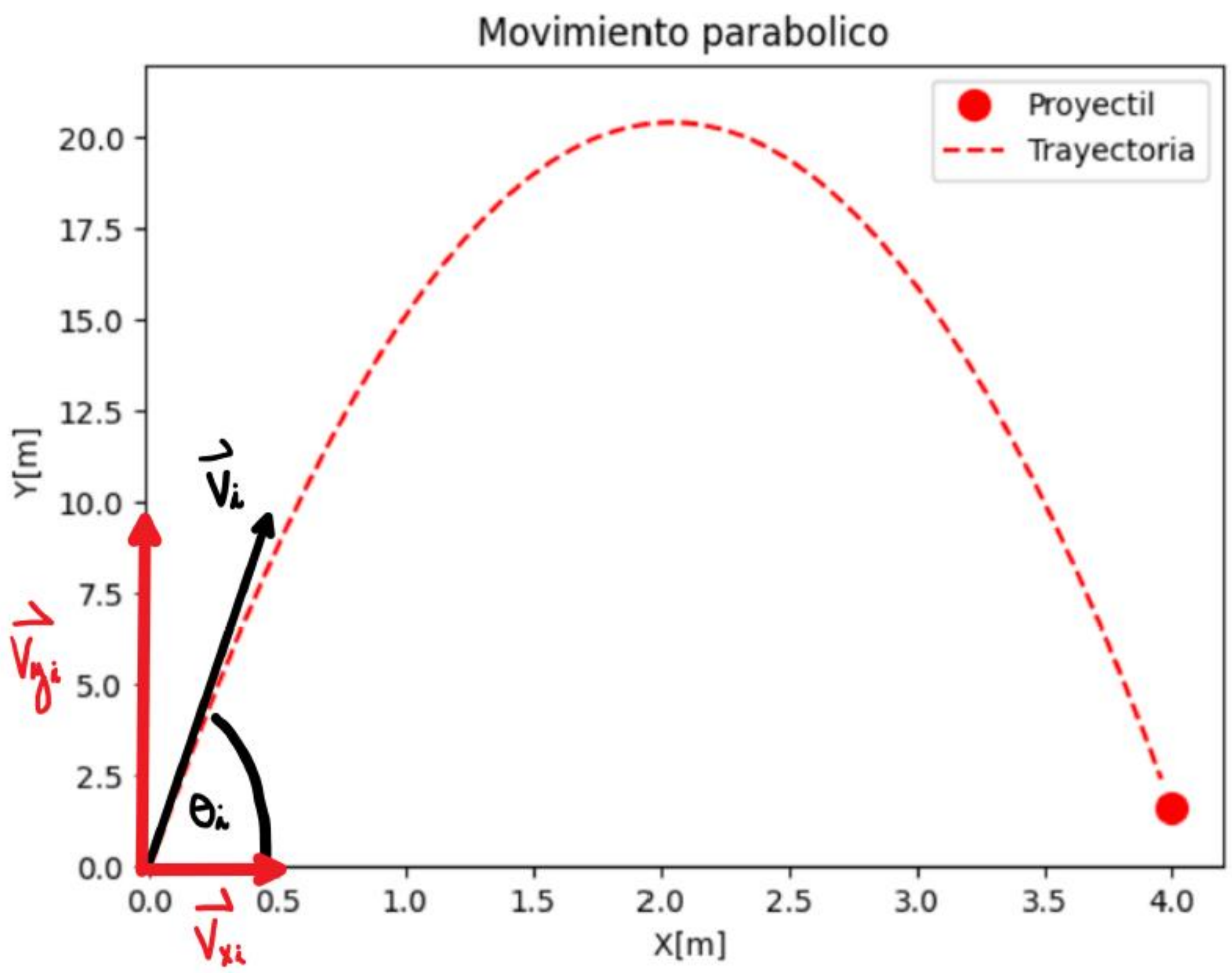
Como dijimos anteriormente, podemos descomponer este movimiento en dos dimensiones, en un movimiento por cada uno de los ejes.

Para el eje horizontal, la partícula no está bajo el efecto de ninguna aceleración, por lo tanto, es como si fuese una partícula que se mueve a velocidad constante:

$$x(t) = x_0 + v_{xi}t$$

Donde v_{xi} es la componente horizontal de la velocidad inicial $\overrightarrow{v_i}$

MOVIMIENTO DE PROYECTIL



MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Para el eje vertical, es un movimiento bajo una aceleración constante, en sí, es como un cuerpo en caída libre:

$$y(t) = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

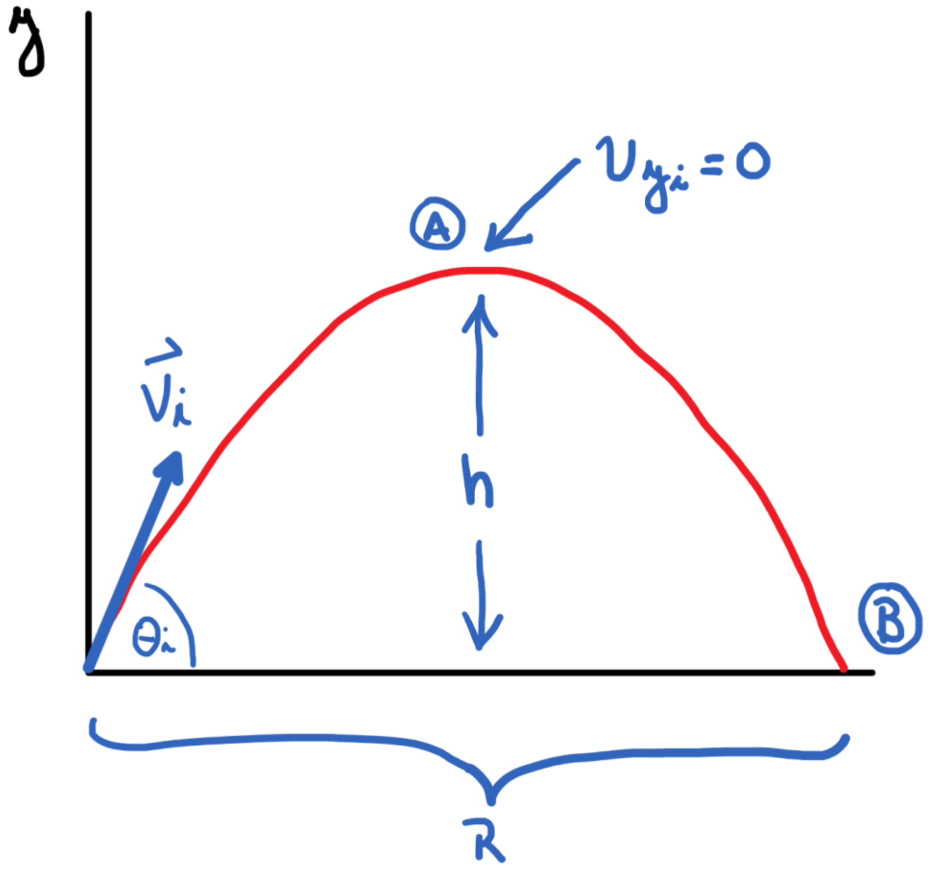
Donde v_{yi} es la componente vertical de la velocidad inicial $\overrightarrow{v_i}$

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Considereamos el caso de una partícula que es lanzada con una velocidad $\vec{v_i}$ formando un ángulo θ_i.

De este movimiento nos van a interesar por ahora, dos puntos:

- El punto A es en el cual la partícula se va a encontrar en la posición $(R/2, h)$. Donde h es la altura máxima que alcanza el proyectil.
- El punto B, es la posición en la cual el proyectil vuelve al suelo. Tiene por coordenadas $(R, 0)$.



MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Encontremos la altura máxima que alcanza el proyectil.

Cuando el proyectil está en su punto más alto, su **velocidad $\boldsymbol{v_y}$ es nula**.

Supongamos que en el tiempo $t = t_s$, se cumple que:

$$v(t) = v_{yi} - gt$$

$$\rightarrow v(t_s) = 0$$

$$0 = v_{yi} - gt_s$$

$$\rightarrow t_s = \frac{v_{yi}}{g}$$

Por definición $v_{yi} = v_i \sin\theta_i$, reemplazando en la ecuación anterior:

$$t_s = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

Tiempo que va a demorar el cuerpo en llegar al punto más alto.

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Luego, reemplazando el tiempo t_s en la función posición asociada al eje y, tenemos que:

$$y(t) = v_i \sin\theta_i \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\rightarrow y(t = t_s) = h$$

$$h = v_i \sin\theta_i \, t_s - \frac{1}{2} g t_s^2$$

$$h = v_i \sin\theta_i \frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$\rightarrow h = \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{2g}$$

Altura máxima que alcanza el cuerpo, que solo depende de la velocidad inicial y el ángulo con el cuál es lanzado.

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

El **tiempo de vuelo** corresponde al tiempo que la partícula está en el aire.

Como ya vimos, el tiempo que se demora un cuerpo en caída libre en alcanzar su altura máxima es el mismo que se demora en tocar el suelo desde esa altura. Por lo tanto, el tiempo de vuelo t_v es:

$$t_v = 2t_s$$
$$\rightarrow t_v = 2\frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo depende únicamente de v_i, θ_i y g.

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

El alcance **R** de un proyectil, es la distancia que hay entre el punto de llegada y el punto de lanzamiento del proyectil.
Lo que significa que, debemos reemplazar el tiempo t_v en la ecuación de posición asociada al eje x:

$$x(t) = x_i + v_{xi}t$$
$$\rightarrow x(t = t_v) = R$$

$$R = v_i \cos\theta_i \, t_v$$
$$R = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

$$\rightarrow R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

MOVIMIENTO EN 2D

Problema 36:

Usted lanza un proyectil con una velocidad inicial de 20[m/s] Formando un ángulo con el suelo de 30°

- Calcule el tiempo en que se demora en llegar a la mitad de la altura del punto más alto.

- ¿Qué velocidad tiene en ese punto?

- ¿Cuál es el ángulo de la velocidad?

MOVIMIENTO EN 2D

Problema 37:

Usted lanza ahora el mismo proyectil con una velocidad inicial de 20[m/s] pero, ahora formando un ángulo con el suelo de 45°

- Calcule el tiempo en que se demora en llegar a la mitad de la altura del punto más alto.
- ¿Qué velocidad tiene en ese punto?
- ¿Cuál es el ángulo de la velocidad?
- ¿Cuál es el alcance del proyectil?

MOVIMIENTO EN 2D

Problema 38:

Usted lanza el mismo proyectil con una velocidad inicial de 20[m/s] desde una altura inicial de 10 metros, formando un ángulo con el suelo de 30°

- Calcule el tiempo en que se demora en llegar a la mitad de la altura del punto más alto.

- ¿Qué velocidad tiene en ese punto?

- ¿Cuál es el ángulo de la velocidad?

- Calcule el alcance del proyectil.

MOVIMIENTO EN 2D