Solución Prueba 03

Física 1

Fecha: 01 de Diciembre de 2023 **Equipo docente de Física**

Nombre del Alumno:

CONSIDERACIONES IMPORTANTES

- Sus resultados deben estar expresados en términos de las variables algebraicas apropiadas. El resultado numérico, si corresponde, debe ser evaluado **al final** del ejercicio. **Cualquier reemplazo numérico durante el desarrollo no será considerado durante la revisión.**
- Todo desarrollo debe estar debidamente explicado, redactado y justificado. **Desarrollos sin justificación no serán considerados durante la revisión.**
- El desarrollo debe estar ordenado y legible. Recuerde que éste también se evalúa.
- Esta estrictamente prohibido el uso de celulares durante la prueba o cualquier otro dispositivo electrónico.
- Coloque su nombre en cada hoja que entregue.

SOBRE SITUACIONES DE COPIA Y/O PLAGIO

- En caso de detectar casos de copia y/o plagio, el profesor de la sección afectada dará a conocer los antecedentes de cada caso al equipo docente, que los analizará y tomará las medidas que correspondan, las que pueden llegar a la solicitud de un sumario administrativo formal a la autoridad que corresponda.

Preguntas teóricas

Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta en cada caso.

1. En la figura (1) se observa una masa m que va a colisionar con rapidez v a una masa en reposo $2m$. ¿Cuál de los posibles movimientos presentados en la figura (2) es el resultado de la colisión elástica entre m y $2m$?

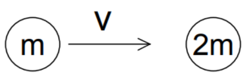

Figura 1: Situación inicial

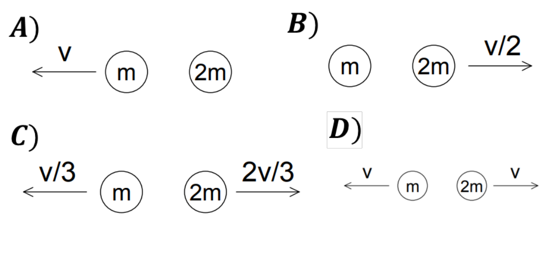

Figura 2: Posibles colisiones

Notemos que en la figura (1) debemos calcular el momentum lineal y la energía cinética debido a que en las colisiones elásticas estos valores se deben conservar,siguiendo con esto el momentum corresponde a $\vec{P}_i = m\vec{v}$ y además $K_i = \frac{1}{2}mv^2$, es fácil notar que (A) tiene momentum $\vec{P}_a = -m\vec{v}$, que no coincide con al valor inicial. Para (B) obtenemos que $\vec{P}_B = m\vec{v}$, valor que coincide con el momentun lineal, pero la energía $K_B = \frac{1}{2}(2m)(v/2)^2$ valor que no coincide con la energía cinética. Ahora en (D) es $\vec{P}_D = -m\vec{v} + 2m\vec{v}$ lo que implica que $\vec{P}_D = m\vec{v}$ que coincide con el valor inicial, pero para la energía $K_D = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2$ que no coincide.
Finalmente, para (C) tenemos que el momentum lineal $\vec{P}_c = -m\vec{v}/3 + (2m)2\vec{v}/3$ obteniendo $\vec{P}_c = m\vec{v}$ que coincide con el valor inicia. Ahora, para la energía $K_C = \frac{1}{2}m(v/3)^2 + \frac{1}{2}2m(2v/3)^2$ lo que al hacer un poco de álgebra termina en $K_C = \frac{1}{2}mv^2$ valor que coincide con el inicial, siendo esta la respuesta correcta.

2. Considere un cuerpo de masa M que cae desde el reposo a una cierta altura h. Describa cómo varía, si es el caso, el momento lineal y su energía potencial ¿Cómo están relacionados ambos conceptos?

Notemos de inmediato lo siguiente, si el objeto cae una distancia arbitraria L desde h su energía potencial va disminuyendo, entonces su rapidez va a ser $v(L) = \sqrt{2gL}$. Por lo tanto, mientras más caiga mayor va a ser la rapidez, lo que implica el momentum lineal va a ir aumentando.
En síntesis, la energía potencial va a disminuir mientras cae el cuerpo y el momento lineal va a ir aumentado debido a que aumenta la rapidez.

Problema 1

Un objeto de masa $M = 2m$ cuelga de una altura h respecto del suelo. Si la masa M es soltada desde el reposo de la altura h, al llegar a su punto más bajo choca elásticamente contra una masa m que se encuentra inicialmente en reposo. Si inmediatamente después del choque M y m tienen rapideces desconocidas v_2 y v_1 respectivamente, generando que m pase por una zona rugosa de largo d con coeficiente de roce $\mu_k = 1/2$. Posterior a esto, sube hasta una altura H donde comprime un resorte de constante k una distancia x desconocida, para **volver por donde venía** y detenerse luego de atravesar otra vez por la zona rugosa.

a) Determine con que velocidad colisiona M a m.

b) Determine la rapidez v_1 del cuerpo m después de la colisión en función de variables conocidas.

c) Determine la velocidad de m después de pasar por la zona rugosa.

d) Determine el valor x de la compresión del resorte.

e) Determine el valor de d para que la masa m se detenga después de comprimir el resorte.

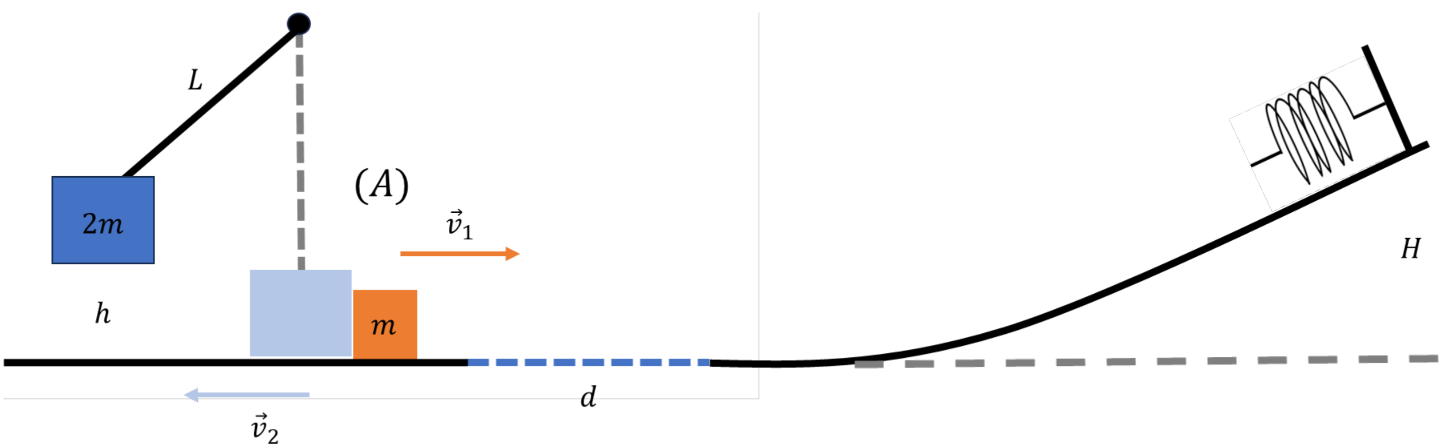

Figura 3

1. Solución

a) Definimos el sistema de referencia en el suelo, por lo tanto cuando la masa M se encuentra a una altura h respecto del suelo tenemos que:

$$E_1 = 2mgh$$

Por otra parte, cuando llega al punto más bajo tenemos que la energía es:

$$E_2 = \frac{1}{2}2mv^2$$

Por conservación de energía tenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 0 \\ 2gh &= v^2 \\ \implies v &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{1}$$

Valor que corresponde al de la rapidez justo antes de colisionar a la masa m.

b) Para determinar la rapidez v_1 vamos a utilizar conservación de momento lineal :

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \vec{P}_f \\ 2mv\hat{x} &= mv_1\hat{x} - 2mv_2\hat{x} \\ 2v &= v_1 - 2v_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Dado que es una colisión elástica, tenemos para la energía cinetica la siguiente relación:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{1}{2}2mv^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 \\ 2v^2 &= v_1^2 + 2v_2^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Despejando de (2) el valor de v_1, y luego reemplzando en (3):

$$\begin{aligned} 2v^2 &= 4(v + v_2)^2 + 2v_2^2 \\ 2v^2 &= 4v^2 + 8vv_2 + 4v_2^2 + 2v_2^2 \\ 0 &= 2v^2 + 8vv_2 + 6v_2^2 \\ 0 &= 3v_2^2 + 4vv_2 + v^2 \end{aligned}$$

solucionando, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{-4v \pm \sqrt{16v^2 - 12v^2}}{6} \\ &= \frac{-4v \pm 2v}{6} \\ \implies v_{2+} &= -\frac{v}{3} \\ \implies v_{2-} &= -v \end{aligned}$$

Notemos que obtenemos dos resultados posibles, por lo tanto, vamos a analizar cual de los dos tiene sentido; como sabemos de (2), tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(v+v_2) \\ \implies v_{1-} &= 2(v-v_{2-}) \\ \implies v_{1-} &= 0 \\ \implies v_{1+} &= 2(v-v_{2+}) \\ \implies v_{1-} &= \frac{4}{3}v \\ \implies v_{1-} &= \frac{4}{3}\sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (4)$$

$$(5)$$

Dado que el el cuerpo se debe mover, ocupamos v_{1-} y dejamos el resultado expresado en función de variables conocidas.

c) En este caso, obtenemos que la la energía E_1 es la energía antes de la zona rugosa y la energía E_b es pasar inmediatamente después de la zona rugosa, dado lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -f_r d \\ \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= -mg\mu_k d \\ \frac{1}{2}mv_b^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 - mg\mu_k d \\ v_b^2 &= v_1^2 - 2g\mu_k d \\ &= 2g\left(\frac{16h}{9} - \mu_k d\right) \end{aligned}$$

d) Al igual que el caso anterior, utilizamos conservación de la energía, esta vez usamos la energía después de pasar por la zona rugosa y la energía E_c cuando el resorte esta comprimido:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 0 \\ \frac{1}{2}mv_b^2 &= mgH + \frac{1}{2}kx^2 \\ x^2 &= \frac{m}{k}(v_b^2 - 2gH) \\ x^2 &= \frac{2mg}{k}\left(\frac{16h}{9} - \mu_k d - H\right) \end{aligned}$$

e) Esta vez, nos indican que se detiene después de recorrer la zona rugosa, entonces la energía inicial corresponde a E_b y la final es 0, por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -f_r d \\ 0 - \frac{1}{2}mv_b^2 &= -mg\mu_k d \\ \frac{1}{2}mv_b^2 &= mg\mu_k d \\ d &= \frac{1}{2g\mu_k}v_b^2 \\ &= \frac{1}{\mu_k}\left(\frac{16h}{9} - \mu_k d\right) \\ \implies d &= \frac{8h}{9\mu_k} \end{aligned}$$

Problema 2

En el sistema de la Figura, la masa m_1 está unida a un resorte de constante elástica K y largo natural L_0 y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa m_1 existe un coeficiente de roce dinámico μ_k. Si en $t = 0$ el resorte tiene su largo natural y la masa m_2 tiene una velocidad v_0, determine la velocidad de la masa m_2 en el instante en que ha descendido una altura h con respecto a su posición inicial.

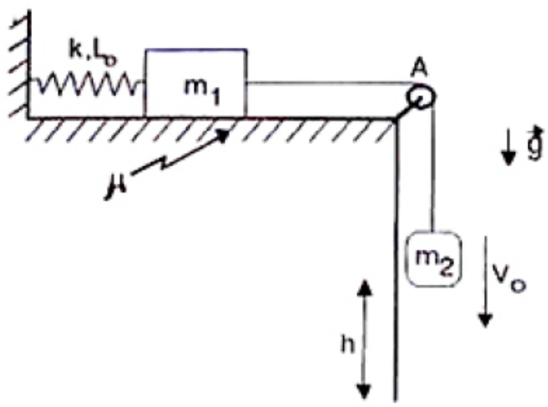

Figura 4: Conexión entre las masas m_1 y m_2

Solución

Supongamos que el bloque de masa m_1 se encuentra a una altura H y la masa m_2 se encuentra a una altura $\bar{h}$ respecto de un punto donde vamos a decir que $y = 0$. Notemos que como la masa m_1 esta conectada a la masa m_2 entonces deben tener la misma rapidez v_0, como se observa en la figura (5,A), por lo tanto, la energía en A) es:

$$E_A = m_1 g H + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_2 g \bar{h} + \frac{1}{2} m_2 v_0^2 \tag{6}$$

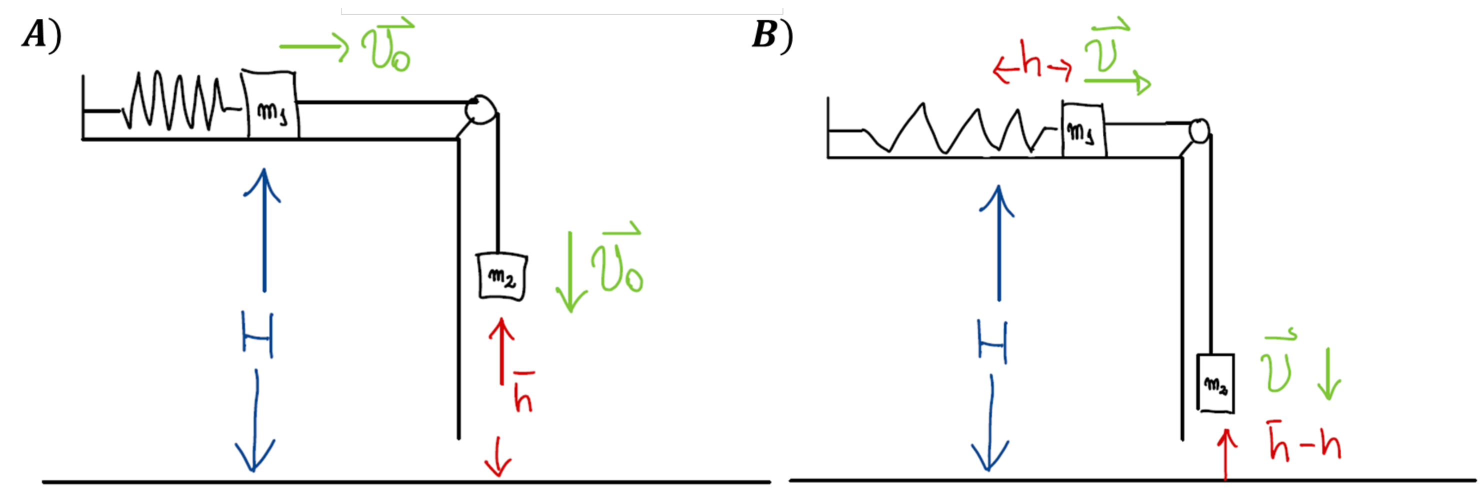

Figura 5: A) Situación inicial donde salen algunas medidas utilizadas para resolver el problema B) Movimiento h de las masas m_1 y m_2 y algunas consideraciones.

Por otra parte, una vez que m_2 baja una altura h tenemos que la velocidad para cada masa es v y la altura de m_2 es $\bar{h} - h$ y el resorte por lo tanto se estira h respecto a su punto de equilibrio, como se observa en la figura (5.B), por lo tanto, la energía en B) es:

$$E_B = m_1 g H + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k h^2 + m_2 g \left(\bar{h} - h\right) + \frac{1}{2} m_2 v^2 \tag{7}$$

Debido a que la masa m_1 esta sobre una superficie con roce μ_k se tiene la siguiente relación:

$$\Delta E = -f_r h$$

$$E_B - E_a = -m_1 g \mu_k h$$

$$m_1 g H + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k h^2 + m_2 g \left(\bar{h} - h\right) + \frac{1}{2} m_2 v^2 - \left(m_1 g H + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_2 g \bar{h} + \frac{1}{2} m_2 v_0^2 \right) = -m_1 g \mu_k h$$

$$\frac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} k h^2 - m_2 g h - \frac{1}{2} v_0^2 (m_1 + m_2) = -m_1 g \mu_k h$$

$$\Longrightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh \frac{m_2 - m_1 \mu_k}{m_1 + m_2} - \frac{k h^2}{m_1 + m_2} \tag{8}$$