Tema 3

Conjuntos finitos y conjuntos numerables

En este tema vamos a usar los números naturales para *contar* los elementos de un conjunto, o dicho con mayor precisión, para definir los conjuntos finitos y su número de elementos. También abordaremos el problema de clasificar los conjuntos infinitos atendiendo a su "tamaño".

En realidad, el estudio de este tipo de problemas no es parte del Análisis Matemático, sino más bien de la Teoría de Conjuntos. Por ello, omitiremos algunas demostraciones, exponiendo con detalle sólo las que son importantes en nuestro estudio de los números reales.

3.1. Conjuntos finitos

Para discutir el "tamaño" de un conjunto, nos guiaremos por dos ideas intuitivas muy claras. En primer lugar, dos conjuntos entre los cuales se pueda establecer una aplicación biyectiva deberían tener el mismo "tamaño". Además, si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ debería ser "finito" y tener exactamente n elementos. Empezamos formalizando esas dos ideas.

Decimos que un conjunto A es *equipotente* a un conjunto B cuando existe una aplicación biyectiva de A sobre B, en cuyo caso escribimos $A \sim B$. Es evidente que cualquier conjunto A verifica que $A \sim A$, puesto que la identidad en A es una aplicación biyectiva de A sobre sí mismo, luego la equipotencia entre conjuntos es un relación *reflexiva*. También es *simétrica*, es decir, $A \sim B$ implica $B \sim A$, pues si $f : A \to B$ es una aplicación biyectiva, su inversa $f^{-1} : B \to A$ también es biyectiva. Finalmente, también es una relación *transitiva*, es decir, de $A \sim B$ y $B \sim C$ se deduce que $A \sim C$, puesto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son aplicaciones biyectivas, la composición $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva.

Así pues, tenemos una relación de equivalencia que invitaría a clasificar conjuntos en clases de equivalencia, de forma que dos conjuntos pertenecerían a una misma clase cuando fuesen equipotentes. No vamos a llegar tan lejos, de hecho el asunto tiene sus problemas desde el punto de vista lógico. Nos limitaremos a trabajar con los conjuntos intuitivamente "más pequeños".

Basándonos en la segunda idea intuitiva que habíamos comentado, pasamos a definir los conjuntos finitos y su número de elementos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ y nos gustaría decir que un conjunto A tiene n elementos cuando $A \sim I_n$. Para que eso sea coherente, a poco que se piense, debemos asegurarnos previamente de lo siguiente:

$$m, n \in \mathbb{N},\ I_m \sim I_n \implies m = n \tag{1}$$

Esto se comprueba fácilmente por inducción y da sentido a las definiciones que siguen.

Decimos que un conjunto A es *finito* cuando, o bien $A = \emptyset$, o bien existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim I_n$. En el segundo caso, en vista de (1) podemos asegurar que n es único y decimos que A tiene n elementos, o que n es el *número de elementos* de A. También es costumbre enumerar los elementos del conjunto A, escribiendo por ejemplo $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. En realidad lo que estamos haciendo es usar cualquier aplicación biyectiva $f : I_n \to A$ y tomar $a_k = f(k)$ para todo $k \in I_n$. Es lógico convenir que *el conjunto vacío tiene* 0 *elementos*. Finalmente, decimos que un conjunto es *infinito* cuando no es finito.

Obviamente, si A es un conjunto finito con n elementos y $B \sim A$, entonces también B es finito y tiene n elementos. Para concluir solamente que B es finito, basta tener una inyección de B en A o una sobreyección de A en B:

- *Si A es un conjunto finito y $f : B \to A$ una aplicación inyectiva, entonces B es finito. Equivalentemente, todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

- *La imagen de un conjunto finito por cualquier aplicación es un conjunto finito, es decir: si A es un conjunto finito y $f : A \to C$ una aplicación, entonces $f(A)$ es finito.*

La primera de estas propiedades se comprueba por inducción sin mucha dificultad y de ella se deduce la segunda aún más fácilmente. Entrando ya en el terreno que más nos interesa, la siguiente propiedad de los conjuntos finitos de números reales se usa con mucha frecuencia:

- *Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.*

Para demostrarlo razonamos por inducción sobre el número de elementos, es decir, probamos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con n elementos tiene máximo y mínimo.

Para $n = 1$ esta afirmación es obvia. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con n elementos tiene máximo y mínimo, y queremos probar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con $n+1$ elementos tiene máximo y mínimo. Sea pues $A \subset \mathbb{R}$ tal que exista una aplicación biyectiva $f : I_{n+1} \to A$.

Tomando $a = f(n+1)$, vemos fácilmente que al restringir f a I_n obtenemos una aplicación biyectiva de I_n sobre el conjunto $A \setminus \{a\}$, luego dicho conjunto tiene n elementos y, por tanto, tiene máximo y mínimo. Poniendo $u = \text{máx}\,(A \setminus \{a\})$ y $v = \text{mín}\,(A \setminus \{a\})$, bastará comparar u y v con a para encontrar el máximo y el mínimo de A. En efecto, si $u > a$, tenemos claramente $u = \text{máx}\, A$; de lo contrario será $u < a$, con lo que $a = \text{máx}\, A$. Análogamente, puede ocurrir que $v < a$ y $v = \text{mín}\, A$, o bien que $v > a$ y $a = \text{mín}\, A$. En cualquier caso, A tiene máximo y mínimo, como se quería. ■

Del resultado anterior deducimos, por ejemplo, que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, puesto que no tiene máximo. Como consecuencia, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos. También podemos precisar mejor algo ya sabido: para $r,s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, el conjunto $A = \{t \in \mathbb{Q} : r < t < s\}$ es infinito, porque no tiene máximo ni mínimo. Debe estar claro que el recíproco del resultado recién demostrado es falso: un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ puede tener máximo y mínimo; es lo que le ocurre, por ejemplo, al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

3.2. Conjuntos numerables

Hasta ahora hemos clasificado los conjuntos finitos atendiendo a su número de elementos. A continuación estudiamos una familia de conjuntos que engloba los finitos y los que pueden verse como los conjuntos infinitos más "pequeños".

Se dice que un conjunto A es *numerable* cuando $A = \emptyset$ o existe una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$. Equivalentemente, A es numerable cuando es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N}$. En particular, está claro que todo conjunto finito es numerable, pero el recíproco es falso: $\mathbb{N}$ es numerable, pero es infinito.

Los conjuntos infinitos y numerables son precisamente los que ahora nos interesan. Como ejemplo, pensemos en el conjunto de los números *pares*: $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. La aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to P$, definida por $\sigma(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es biyectiva, luego P es equipotente a $\mathbb{N}$. Informalmente podríamos decir que, contra lo que pudiera parecer, los conjuntos P y $\mathbb{N}$ tienen el mismo "tamaño". Pues bien, veremos enseguida que a todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ les ocurre lo mismo que a P. Más concretamente:

- *Si A es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe una aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to A$, que tiene la siguiente propiedad:*

$$n,m \in \mathbb{N}, \ n < m \quad \Longrightarrow \quad \sigma(n) < \sigma(m) \tag{2}$$

Intuitivamente hablando, la aplicación σ, que definiremos por inducción, "enumera de forma creciente" los elementos de A. El principio de buena ordenación nos dice que A tiene mínimo, luego podemos definir $\sigma(1) = \min A$. Debemos ahora explicar, para cada $n \in \mathbb{N}$, la forma de obtener $\sigma(n+1)$ a partir de $\sigma(n)$. Como A es infinito, no puede estar contenido en el conjunto finito $\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant \sigma(n)\}$, luego $\{a \in A : \sigma(n) < a\} \neq \emptyset$ y el principio de buena ordenación nos permite definir: $\sigma(n+1) = \min\{a \in A : \sigma(n) < a\}$. Así pues, hemos definido por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to A$, y veremos que σ tiene todas las propiedades deseadas, empezando por comprobar (2).

Es claro que $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otra forma, la afirmación

$$\sigma(n) < \sigma(n+k) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{P_k}$$

es cierta para $k = 1$. Pero suponiendo que se cumple P_k para un $k \in \mathbb{N}$, tenemos obviamente $\sigma(n) < \sigma(n+k) < \sigma(n+k+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego se cumple P_{k+1}. Esto prueba por inducción que se verifica P_k para todo $k \in \mathbb{N}$. Dados $n,m \in \mathbb{N}$ con $n < m$, bastará tomar $k = m - n \in \mathbb{N}$ para obtener que $\sigma(n) < \sigma(m)$.

De (2) se deduce claramente que σ es inyectiva y sólo nos queda probar que también es sobreyectiva. Para ello, razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que $\sigma(\mathbb{N}) \neq A$ para llegar a una contradicción.

El principio de buena ordenación permite tomar $z = \text{mín}\,\big(A \setminus \sigma(\mathbb{N})\big)$. De $z \neq \sigma(1) = \text{mín}\,A$ deducimos que $\text{mín}\,A < z$, luego el conjunto $\{a \in A : a < z\}$ no es vacío. Además es finito, pues está contenido en el conjunto finito $\{n \in \mathbb{N} : n < z\}$, así que dicho conjunto tendrá máximo: sea $x = \text{máx}\{a \in A : a < z\}$. Es claro que $x < z$, luego $x \notin A \setminus \sigma(\mathbb{N})$ y por tanto $x \in \sigma(\mathbb{N})$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \sigma(n)$.

Concluimos probando que $z = \sigma(n+1)$, que es la contradicción buscada. En efecto, si $a \in A$ y $x < a$, deberá ser $a \geqslant z$, pues si fuese $a < z$, la definición de x nos diría que $x \geqslant a$. Puesto que $x < z$, vemos que $z = \text{mín}\{a \in A : x < a\} = \text{mín}\{a \in A : \sigma(n) < a\} = \sigma(n+1)$, como queríamos. ■

Como consecuencia de lo recién demostrado, tenemos para los conjuntos numerables la siguiente dicotomía:

- *Todo conjunto numerable es finito o equipotente a* $\mathbb{N}$.

En efecto, si A es un conjunto no vacío y numerable, hay una aplicación inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$, con lo que $A \sim f(A)$. Si $f(A)$ es finito, también lo será A. En caso contrario, el resultado anterior nos dice que $f(A) \sim \mathbb{N}$, luego también $A \sim \mathbb{N}$. ■

Intuitivamente podríamos decir que $\mathbb{N}$ es el “más pequeño” de todos los conjuntos infinitos.

3.3. Ejemplos de conjuntos numerables

Para completar nuestro estudio preliminar de los conjuntos numerables, vamos a ver que se conservan por determinadas operaciones. En primer lugar, la siguiente afirmación es evidente:

- *Si A es un conjunto numerable y $f : B \to A$ es una aplicación inyectiva, entonces B es numerable. Equivalentemente, todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Estudiemos la imagen de un conjunto numerable mediante cualquier aplicación. Para ello, dado un conjunto B, supongamos que existe una aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{N} \to B$. Entonces, para cada $b \in B$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : g(n) = b\}$ no es vacío, luego tiene mínimo. Ello nos permite definir una aplicación $h : B \to \mathbb{N}$, sin más que escribir

$$h(b) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : g(n) = b\} \quad \forall\, b \in B$$

Por ser $g\big(h(b)\big) = b$ para todo $b \in B$, vemos que h es inyectiva, luego B es numerable.

Sea ya A un conjunto numerable y $f : A \to C$ una aplicación cualquiera. Si A es finito, $f(A)$ también será finito, luego numerable. Si A es infinito, tendremos $A \sim \mathbb{N}$, es decir, existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Entonces $g = f \circ \varphi$ es una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(A)$. Por lo demostrado anteriormente, $f(A)$ es numerable. Hemos probado lo siguiente:

- *Si A es un conjunto numerable y $f : A \to C$ una aplicación, entonces $f(A)$ es numerable.*

Pasemos ahora a considerar un producto cartesiano:

- *Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.*

Empezamos probando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Para ello basta observar que la aplicación $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\varphi(m,n) = 2^m \cdot 3^n \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$$

es inyectiva. Ello se debe a que, por ser 2 y 3 números primos, la igualdad $2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$, con $m,n,p,q \in \mathbb{N}$, implica que $m = p$ y $n = q$. Si ahora A y B son conjuntos numerables, tenemos sendas aplicaciones inyectivas $g : A \to \mathbb{N}$ y $h : B \to \mathbb{N}$. Definiendo $f(a,b) = \big(g(a), h(b)\big)$ para todo $(a,b) \in A \times B$, obtenemos una aplicación inyectiva $f : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, luego $A \times B$ es numerable, por serlo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Discutiremos ahora lo que ocurre al unir conjuntos numerables. Veamos un primer caso:

- *Si J es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y, para cada $n \in J$ tenemos un conjunto numerable B_n, entonces el conjunto $B = \bigcup_{n \in J} B_n$ es numerable.*

Para cada $n \in J$ tal que $B_n \neq \emptyset$, existe una aplicación inyectiva $\varphi_n : B_n \to \mathbb{N}$. Construimos entonces una aplicación $\varphi : B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Dado $b \in B$, se tendrá que $b \in B_n$ para algún $n \in J$ y podemos tomar $k = \min\{n \in J : b \in B_n\}$. Como $B_k \neq \emptyset$, podemos definir

$$\varphi(b) = \big(k, \varphi_k(b)\big)$$

Es casi evidente que φ es inyectiva, pero sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, luego B también es numerable. ■

La hipótesis $J \subset \mathbb{N}$ del resultado anterior es una mera formalidad, lo único importante es que tengamos un conjunto numerable:

- *Si I es un conjunto numerable no vacío y, para cada $i \in I$ tenemos un conjunto numerable A_i, entonces el conjunto $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es numerable.*

En efecto, tenemos una aplicación inyectiva $\psi : I \to \mathbb{N}$, que podemos ver como una aplicación biyectiva de I sobre el conjunto $J = \psi(I)$. Tomando $B_n = A_{\psi^{-1}(n)}$ para todo $n \in J$, el resultado anterior nos dice que el conjunto

$$B = \bigcup_{n \in J} B_n = \bigcup_{i \in I} A_i = A$$

es numerable, como queríamos demostrar. ■

El resultado anterior suele enunciarse diciendo simplemente que *toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable*.

Podemos ya dar ejemplos de conjuntos numerables que nos pueden sorprender. En primer lugar, $\mathbb{Z}$ es numerable, pues se obtiene como unión de tres conjuntos numerables: $\mathbb{N}$, $\{0\}$ y $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$. Pero aún podemos decir algo mejor:

- $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

En efecto, una vez sabido que $\mathbb{Z}$ es numerable, podemos asegurar que $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ es numerable. Consideramos entonces la aplicación $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ dada por

$$f(p,m)=\frac{p}{m}\quad\forall p\in\mathbb{Z},\,\forall m\in\mathbb{N}$$

Es evidente que f es sobreyectiva, luego $\mathbb{Q}$ es la imagen de un conjunto numerable por una aplicación. ■

Aún no han aparecido ejemplos de conjuntos no numerables. Es fácil encontrarlos usando la siguiente observación:

- *Si $\mathcal{P}(A)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, una aplicación $f:A\to\mathcal{P}(A)$ no puede ser sobreyectiva.*

Nótese que, dada una aplicación $f:A\to\mathcal{P}(A)$, para cada $a\in A$ tiene sentido preguntarse si a pertenece o no al conjunto $f(a)$. Podemos pues considerar el conjunto $B=\{a\in A : a\notin f(a)\}$, y bastará probar que B no pertenece a la imagen de f, es decir, que $f(a)\neq B$ para todo $a\in A$. En efecto, dado $a\in A$, pueden ocurrir dos casos: si $a\in B$, la definición de B nos dice que $a\notin f(a)$, luego $f(a)\neq B$; si, por el contrario, $a\notin B$, la definición de B nos dice que $a\in f(a)$ y concluimos igualmente que $f(a)\neq B$. ■

Deducimos claramente del resultado anterior que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable. Más adelante se verá también que $\mathbb{R}$ no es numerable. De hecho, se puede probar que $\mathbb{R}\sim\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3.4. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}\cup\{0\}$ sobre $\mathbb{N}$.
2. Fijado $m\in\mathbb{N}$, dar un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}\setminus I_m$.
3. Dar un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{N}$.
4. Probar que $\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^*\sim\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\sim\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
5. Probar que, para cualesquiera $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, se tiene:
$$\{t\in\mathbb{R} : 0\leqslant t\leqslant 1\}\sim\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\leqslant b\}$$
6. Usando la aplicación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
comprobar que $\mathbb{R}\sim\{x\in\mathbb{R} : |x|<1\}$.
7. Probar que $\mathbb{R}^+\sim\{x\in\mathbb{R} : 0<x<1\}$, y deducir que $\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^+$.