Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Álgebra
1er semestre de 2024

Ayudantía 6
Relaciones de orden y relaciones de equivalencia

22/04/2024–25/04/2024

Objetivos:

- Conocer ejemplos de relaciones de orden y equivalencia definidas en algún conjunto.
- Determinar clases de equivalencia.
- Utilizar definición de cardinalidad para demostrar numerabilidad de conjuntos.

Ejercicios Propuestos

1. Para $n \in \mathbb{N}$ se define:
$$P_n = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = n\}$$
Es decir, P_n es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de cardinalidad n.
   a) Pruebe que P_n es siempre numerable.
   b) Si $P_f = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ es finito }\}$ entonces P_f es numerable.

2. Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:
$$(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Longleftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$$
para cierto $k \in \mathbb{Z}$.
   a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   b) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$
   c) Pruebe que $A = [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$

3. Sobre un conjunto de proposiciones $\mathcal{P}$ lógicas se define la relación $\mathcal{R}$ dada por
$$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \Longleftrightarrow q]$$
Además, para $p, q \in \mathcal{P}$ se dice que $p = q$ si y sólo si $p \iff q$.
   a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden sobre $\mathcal{P}$.
   b) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.