Guía de Ejercicios N^o 10

Matemáticas II. Semestre Primavera 2010

1. Demuestre las siguientes propiedades,

   a) Para todo $x \in [-1,1]$, $cos(Arcsenx) = \sqrt{1-x^2}$.

   b) Para todo $x \in [-1,1]$, $sen(Arcosx) = \sqrt{1-x^2}$.

   c) Para todo $x \in [-1,1]$, $tan(Arcsenx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

   d) Para todo $x \in [-1,1]$, $tan(Arcosx) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

   e) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $sen(Arctanx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   f) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $cos(Arctanx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Calcule o evalúe las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $\quad b)$ $\int \frac{1}{(4x^2+9)^2}dx$ $\quad c)$ $\int_0^3 \frac{1}{9+x^2}dx$ $\quad d)$ $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

   e) $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}dx$ $\quad f)$ $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ $\quad g)$ $\int \frac{\sqrt{9x^2-16}}{x}dx$ $\quad h)$ $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-9}}dx$

3. Calcule o evalúe, según corresponda las siguientes integrales:

   a) $\int \frac{2x+3}{x^2-1}dx$ $\quad b)$ $\int (\frac{5x}{x^2-1} + \frac{23}{\sqrt{9-x^2}})dx$ $\quad c)$ $\int Arctan(x)\ dx$

   $d)$ $\int \frac{\sqrt{4x^2+9}}{x^4}dx$ $\quad e)$ $\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}dx$ $\quad f)$ $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$

   $g)$ $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$ $\quad h)$ $\int \frac{x(2x-9)}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ $\quad i)$ $\int \frac{Arctan(x)}{1+x^2}\ dx$

4. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int \frac{x^4}{(x-1)^3}dx$ $\quad b)$ $\int \frac{x+2}{x^2-4x}dx$ $\quad c)$ $\int \frac{x^2}{x^4-2x^2-8}dx$ $\quad d)$ $\int \frac{x^2}{(x+3)^3}dx$

   e) $\int \frac{senx}{cosx[cosx-1]}dx$ $\quad f)$ $\int \frac{sec^2(x)}{tanx[tanx+1]}dx$ $\quad g)$ $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}dx$

   $h)$ $\int \frac{3cos(x)}{sen^2(x)+sen(x)-2}dx$ $\quad i)$ $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$ $\quad j)$ $\int (\frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3} + \frac{23}{x^3-x^2})dx$

5. Calcular las siguientes integrales $\int \frac{e^{4t}}{(e^{2t}-1)^3}dt$ y $\int \frac{1+lnt}{t(3+2lnt)^2}dt$

6. Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$ converge si $|x-2| < 1$ y diverge si $|x-2| > 1$.

7. Encuentre el intervalo de convergencia, incluyendo los extremos del intervalo.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Resp: [-1,1) *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{(3-x)^n}{n^3}$ Resp: [2,4] *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}(x-5)^n$ Resp: x = 5.

8. Encuentre el intervalo de convergencia, incluyendo los extremos del intervalo.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ Resp:$(-\infty, \infty)$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Resp:$(-\infty, \infty)$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ Resp:$(-\infty, \infty)$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n\sqrt{n}}$ Resp: (-2,6]

9. Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias. Analice los extremos del intervalo.

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$ Resp: (-3,1). *b)* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ Resp: $(-\infty, \infty)$.

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(\frac{x}{2})^n$ Resp: x= 0. *d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{4n}$ Resp: (-4,4).

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}(x-2)^n$ Resp: [1,3]. *f)* $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$ Resp: x = 2.

10. Pruebe que $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$ usando la expansión en serie de MacLaurin de e^x. Compare con lo tedioso que es calcular directamente la serie de MacLaurin para $f(x) = e^{-x^2}$.

11. Hallar la serie de Taylor centrada en c, para la función dada.

    a) $f(x) = cos(x)$, $c = \frac{\pi}{4}$. Resp: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}(x - \frac{\pi}{4})^n$

    b) $f(x) = ln(x)$, $c = 1$. Resp: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$

    c) $f(x) = sen(x)$, $c = \frac{3\pi}{4}$. Resp: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}(x - \frac{3\pi}{4})^n$

12. Calcule la expansión en serie de potencias de $h(x) = cos^2(x)$, usando la expansión en serie de $cos(x)$ y el hecho de que $2cos^2(x) = 1 + cos(2x)$. Resp: $\frac{1}{2}[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}]$.