UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 01−A

Sistemas de Ecuaciones y Matrices

Semana del Viernes 21 al Jueves 27 de Marzo

Sistemas de Ecuaciones Lineales:

1. Resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales: $\begin{cases} 2x + y - z &= 4 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x + y + z &= 7 \end{cases}$

Solución: Escribimos la Matriz Asociada al Sistema de Ecuaciones Lineales dado, resultando:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Recordando las Operaciones Elementales, aplicamos a la primera matriz las siguientes Operaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)^{f_1 \leftrightarrow f_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) f_2 - f_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)_{f_3 - 2f_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \end{array}\right)_{f_3 + f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -16 \end{array}\right)_{(-1/3)f_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 16/3 \end{array}\right)^{f_1 - f_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 16/3 \end{array}\right)^{f_1 - f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 23/3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 16/3 \end{array}\right)$$

Al escribir el Sistema de Ecuaciones Lineales asociado a la última Matriz, se obtiene:

$$\begin{cases} x = 23/3 \\ y = -6 \\ z = 16/3 \end{cases}$$

Se concluye que **existe una única solución para el Sistema de Ecuaciones dado** $\square$.

2. Resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales: $\begin{cases} 2x-2y-z &= 0 \\ 2y+z &= 2 \\ 2x-4y-2z &= -2 \end{cases}$

Solución: Al Sistema de Ecuaciones Lineales dado le asociamos su respectiva Matriz, para luego resolverlo mediante Operaciones Elementales; es decir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)^{(1/2)f_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)_{f_3-2f_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right)_{f_3+f_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)(1/2)f_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Al escribir el Sistema de Ecuaciones Lineales asociado a la última Matriz, se obtiene:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + (1/2)z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - (1/2)z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Como los valores posibles de y son infinitos ($y \in \mathbb{R}$), se concluye que **existen infinitas soluciones para el Sistema de Ecuaciones Lineales dado** $\square$.

3. Resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales: $\begin{cases} 2x-2y-z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \\ 2x-4y-2z &= -2 \end{cases}$

Solución: Al Sistema de Ecuaciones Lineales dado le asociamos su respectiva Matriz, para luego resolverlo mediante Operaciones Elementales; es decir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)^{(1/2)f_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)_{f_3-2f_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right)(1/2)f_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right)_{f_3+f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Vemos que la tercera fila representa a la ecuación $\boxed{0 = -2}$, lo cual es una contradicción. Esto nos lleva a concluir que **no existe solución para el Sistema de Ecuaciones Lineales dado** $\square$.

EN LA GUÍA SUBIDA A U−CURSOS SE PUEDEN ENCONTRAR MÁS EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Balanceo de Reacciones Químicas:

4. Balancear la siguiente reacción química:

$$\mathrm{K} + \mathrm{B_2O_3} \longrightarrow \mathrm{K_2O} + \mathrm{B}$$

Solución:

Supondremos válida la ***Ley de Conservación de la Materia***, por lo que buscamos x, y, z, w (coeficientes moleculares) tales que el número de átomos en ambos lados de la reacción sea el mismo:

$$\boxed{x\mathrm{K} + y\mathrm{B_2O_3} \longrightarrow z\mathrm{K_2O} + w\mathrm{B}} \longrightarrow \begin{cases} x = 2z & (\mathrm{K}) \\ 2y = w & (\mathrm{B}) \\ 3y = z & (\mathrm{O}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2y - w = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Al Sistema de Ecuaciones Lineales obtenido le asociamos su respectiva Matriz, para luego resolverlo mediante Operaciones Elementales; es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} (1/2)f_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{f_3 - 3f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} (-1)f_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}^{f_1 + 2f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Al escribir el Sistema de Ecuaciones Lineales asociado a la última Matriz, se obtiene:

$$\begin{cases} x - 3w = 0 \\ y - (1/2)w = 0 \\ z - (3/2)w = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3w \\ y = (1/2)w \\ z = (3/2)w \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Como los valores posibles de w son infinitos (todos los números reales), entonces **existen infinitas soluciones para el Sistema de Ecuaciones Lineales**. Aquí basta considerar que, según la Ley de Conservación de la Materia, los coeficientes moleculares siempre deben ser números enteros positivos.

En este caso, haciendo $\boxed{w = 2}$ se obtiene:

$$x = 6$$
$$y = 1$$
$$z = 3$$

Finalmente, la reacción queda:

$$\boxed{6\mathrm{K} + \mathrm{B_2O_3} \longrightarrow 3\mathrm{K_2O} + 2\mathrm{B}} \quad \square.$$

Ejercicios propuestos:

5. Balancear la reacción química: $\mathrm{CH_4} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}$

6. Balancear la reacción química: $\mathrm{C_3H_8} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}$

7. Balancear la reacción química: $\mathrm{FeS_2} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{Fe_2O_3} + \mathrm{SO_2}$