UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 02−B

Vectores y Ecuaciones de la Recta

Semana del Viernes 28 de Marzo al Jueves 03 de Abril

Vectores:

1. Determinar si los pares de vectores dados son paralelos o no:

a) $(1/2, 3)$ y $(-3, -18)$ *b)* $(\sqrt{3}, \sqrt{8})$ y $(\sqrt{2/3}, 4/3)$

Solución: **Para a):**

- $(1/2, 3) = (1/2)(1, 6)$
- $(-3, -18) = (-3)(1, 6) = (-6)(1/2, 3)$

Luego, como uno de los vectores es un ponderado del otro, se concluye que **los vectores dados son paralelos**.

Para b):

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\sqrt{3}\ ,\ 4\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{8}\right)$$

Luego, como el segundo vector es un ponderado del primero, se concluye que **los vectores dados son paralelos** $\square$.

2. Determinar si los vectores $\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\ ,\ 2\right)$ **y** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ **son perpendiculares o no.**

Solución: Según lo visto en Cátedra, se tiene que:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) + (2)\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2-1}\right) + (-1) = 1 - 1 = 0$$

Luego, se concluye que **los vectores dados son perpendiculares** $\square$.

Ecuaciones de la Recta:

3. Escriba la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $(1/2, 2/3)$ y $(5/2, 7/3)$.

Solución: Escribimos la Ecuación de la Recta por dos puntos (del Colegio):

$$y - \frac{2}{3} = \frac{(7/3) - (2/3)}{(5/2) - (1/2)}\left(x - \frac{1}{2}\right) \longrightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{12} + \frac{2}{3} \longrightarrow \boxed{y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}}$$

Luego, observamos que los puntos pertenecientes a esta recta serán de la forma (x, y); sustituyendo adecuadamente, se obtiene:

$$(x, y) = \left(x\ ,\ \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}\right) = \left(x\ ,\ \frac{5}{6}x\right) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right) = x\left(1\ ,\ \frac{5}{6}\right) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right) = \frac{x}{6}(6, 5) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)$$

Cabe destacar que el vector director de la recta no es único: cualquier vector paralelo a un vector director es también un vector director.

Finalmente, hacemos $\boxed{\lambda = x/6}$, con lo que la ecuación vectorial de la recta pedida será:

$$\boxed{\vec{v} = (x, y) = \lambda(6, 5) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)\quad ,\quad \lambda \in \mathbb{R}} \quad \square.$$

4. Escribir la ecuación vectorial $\boxed{\vec{v} = (5, 2/7) + \lambda(-1/2, 3/4)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$ **como otra ecuación vectorial de recta.**

Solución: Para poner las cosas en claro, el ejercicio consiste en escribir la ecuación vectorial dada (que representa a una cierta recta) de tal forma que tenga vector director y vector posición distintos, pero que siga representando a la misma recta. Esto lo podemos conseguir tomando como vector posición a cualquier otro punto de la recta y como vector director a cualquier vector paralelo al que ya se tiene.

Procediendo según lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{v} =&\quad (5, \frac{2}{7}) + \lambda(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\
=&\quad (5, \frac{2}{7}) + \frac{\lambda}{4}(-2, 3) \\
=&\quad (5, \frac{2}{7}) + \left(\frac{\lambda}{4} + 1 - 1\right)(-2, 3) \\
=&\quad (5, \frac{2}{7}) + (-2, 3) + \left(\frac{\lambda}{4} - 1\right)(-2, 3) \\
\vec{v} =&\quad (-3, \frac{23}{7}) + \rho(-2, 3)\quad ,\quad \rho = \left(\frac{\lambda}{4} - 1\right) \in \mathbb{R} \quad \square.
\end{aligned}$$

5. Determinar la ecuación algebraica de la recta equivalente a la ecuación vectorial de recta $\vec{v} = (-9/2, 2/3) + \lambda(1/7, 1/6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución: En este caso, sumamos vectorialmente los términos del lado derecho de la ecuación:

$$\vec{v} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{2}{3}\right) + \lambda\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{9}{2} + \frac{\lambda}{7} \ , \ \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{6}\right) = (x, y)$$

Esto nos lleva a plantear el Sistema de Ecuaciones Lineales en λ:

$$\begin{cases} x & = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{\lambda}{7} \\ y & = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\lambda}{6} \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \lambda/7 = x + 9/2 & \longrightarrow & \lambda = 7x + 63/2 \\ \lambda/6 = y - 2/3 & \longrightarrow & \lambda = 6y - 4 \end{array}$$

Igualando ambas ecuaciones en λ, finalmente se obtiene:

$$7x + 63/2 = 6y - 4 \quad \longrightarrow \quad 7x - 6y + 63/2 + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{7x - 6y + 71/2 = 0} \quad \square.$$

6. Determinar una ecuación vectorial para la recta dada por la ecuación algebraica $(3/5)x + 8y - 1/3 = 0$.

Solución: En este caso, nos conviene escribir la ecuación algebraica de la recta en su forma principal:

$$(3/5)x + 8y - 1/3 = 0 \quad \longrightarrow \quad 8y = -(3/5)x + 1/3 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = -(3/40)x + 1/24}$$

Luego, observamos que los puntos pertenecientes a esta recta serán de la forma (x, y); sustituyendo adecuadamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x \ , \ -(3/40)x \ + \ 1/24) \ = \ (x \ , \ -(3/40)x) \ + \ (0 \ , \ 1/24) \ = \ x(1 \ , \ -(3/40)) \ + \ (0 \ , \ 1/24) \\ &= \ (x/40)(40, -3) \ + \ (0 \ , \ 1/24) \end{aligned}$$

Finalmente, hacemos $\boxed{\lambda = x/40}$, con lo que la ecuación vectorial de la recta pedida será:

$$\boxed{\vec{v} = (x, y) = \lambda(40, -3) \ + \ (0 \ , \ 1/24) \ \ , \ \ \lambda \in \mathbb{R}} \quad \square.$$