UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 03−A

Ecuaciones e Intersección de Rectas

más Controles 1 y 2

Semana del Viernes 04 al Jueves 10 de Abril

Ecuaciones de la Recta:

1. **Considerar la recta con ecuación vectorial** $\boxed{\vec{x} = (-2,1) + \lambda(5,-3) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}}$ **.**

   a) **Encontrar un vector $\vec{n}$ y una constante C tales que la recta sea representada por la ecuación $\vec{n} \bullet \vec{x} = C$.**

   b) **Considerando el vector $\vec{n}$ encontrado en a), encontrar un vector $\vec{p}$ tal que la ecuación $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ represente a la misma recta.**

Solución: **Para a):**

Para determinar el vector $\vec{n}$ pedido, basta con encontrar algún vector que sea perpendicular al vector director de la recta:

$$\boxed{\vec{n} = (x_2, y_2) \quad , \quad \vec{d} = (5,-3)} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n} \perp \vec{d} \longleftrightarrow \vec{n} \bullet \vec{d} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad (x_2, y_2) \bullet (5,-3) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad 5x_2 - 3y_2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{y_2 = \frac{5}{3}x_2}$$

La ecuación obtenida representa a una recta perpendicular a la recta dada. Luego, basta con tomar cualquier punto perteneciente a esta recta y ya se obtiene el vector $\vec{n}$ buscado:

$$\boxed{x_2 = 3 \quad , \quad y_2 = 5} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\vec{n} = (3,5)}$$

Finalmente, para determinar la constante C, se tiene:

$$\vec{x} = (-2,1) + \lambda(5,-3) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{x} = (-2 + 5\lambda \ , \ 1 - 3\lambda)}$$

$$\vec{n} \bullet \vec{x} \quad = \quad (3,5) \bullet (-2 + 5\lambda \ , \ 1 - 3\lambda) \quad = \quad 3(-2 + 5\lambda) + 5(1 - 3\lambda) \quad = \quad -6 \cancel{+15\lambda} + 5 \cancel{-15\lambda}$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{\vec{n} \bullet \vec{x} = C = -1}$$

Para b):

Basta con considerar para esto el mismo vector posición de la recta; es decir:

$$\boxed{\vec{p} = (-2,1)} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) \quad = \quad (3,5) \bullet ((\cancel{(-2,1)} + \lambda(5,-3)) \cancel{-(-2,1)}) \quad = \quad (3,5) \bullet (5\lambda, -3\lambda)$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) \quad = \quad 15\lambda - 15\lambda = 0 \ \ \square.$$

Intersección de Rectas:

2. Encontrar los puntos de intersección de las rectas $\boxed{(x-5, y-2) \bullet (1,2) = 0}$ **y** $\boxed{(x,y) \bullet (1,1) = 2}$ **.**

Solución: Primero reescribimos las ecuaciones, calculando los productos:

$$\begin{cases} x+y & = 2 \\ (x-5)+2(y-2) & = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y & = 2 \\ x+2y-5-4 & = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y & = 2 \\ x+2y & = 9 \end{cases}$$

Así, hemos obtenido un Sistema de Ecuaciones Lineales que nos permitirá determinar los puntos que buscamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{array}\right)_{f_2 - f_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)^{f_1 - f_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Luego, se concluye que **las rectas dadas se intersectan en el punto** $(-5,7)$ $\square$.

Ejercicios del Control 1:

3. Clasificar el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales según sus soluciones, en términos de los valores de $k \in \mathbb{R}$. En los casos en que la solución exista, determinarlas.

$$\begin{cases} kx+y+z & = 2k-1 \\ x+ky+z & = k^2 \\ x+y+kz & = 3-2k \end{cases}$$

Solución: Obtendremos la forma escalonada de la Matriz Ampliada; es decir:

$$(\text{A|B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & 1 & k & 3-2k \end{array}\right)^{f_1 \leftrightarrow f_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 2k-1 \end{array}\right) f_2 - f_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & k^2+2k-3 \\ k & 1 & 1 & 2k-1 \end{array}\right)$$

- $k = 0$

$$(\text{A|B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)_{f_3 + f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{rango(A)} = 3 \\ \text{rango(A|B)} = 3 \\ n = 3 \\ \textbf{Solución Única} \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} (-1)f_2 \\ (1/2)f_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) f_2 + f_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)^{f_1 - f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Luego, la solución para $k = 0$ será $\boxed{x = 4\ ,\ y = 1\ ,\ z = -2}$.

- $k \neq 0$

$$(\text{A|B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & k^2+2k-3 \\ k & 1 & 1 & 2k-1 \end{array}\right)_{f_3 - kf_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & k^2+2k-3 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 2k^2-k-1 \end{array}\right)$$

- $k \neq 0$, $k = 1$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \text{rango(A)} = 1 \\ \text{rango(A|B)} = 1 \\ n = 3 \\ \textbf{Infinitas soluciones} \end{array}}$$

Se tiene $\boxed{x + y + z = 1 \quad \longrightarrow \quad x = 1 - y - z}$.

Luego, como $y \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$, se obtiene que las soluciones para $k = 1$ serán:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha & , \ \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}}$$

- $k \neq 0$, $k \neq 1$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & k^2+2k-3 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 2k^2-k-1 \end{array}\right)_{f_3+f_2} \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & k^2+2k-3 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 3k^2+k-4 \end{array}\right)$$

Recordando que $k \neq 1$, vemos que:

$\star$ $\boxed{k^2 + 2k - 3 = (k+3)(k-1)}$ $\star$ $\boxed{3k^2 + k - 4 = (3k+4)(k-1)}$ **(VERIFICAR)**

$\star$ $\boxed{2 - k - k^2 = -(k^2 + k - 2) = -(k+2)(k-1) = (k+2)(1-k)}$

- $k \neq 0$, $k \neq 1$, $k = -2$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3-2k \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \text{rango(A)} = 2 \\ \text{rango(A|B)} = 3 \\ \textbf{No hay solución} \end{array}}$$

- $k \neq 0$, $k \neq 1$, $k \neq -2$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & (k+3)(k-1) \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) & (3k+4)(k-1) \end{array}\right) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \text{rango(A)} = 3 \\ \text{rango(A|B)} = 3 \\ \textbf{Solución Única} \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} \left(\dfrac{1}{k-1}\right) f_2 \\ \left(\dfrac{1}{(k+2)(1-k)}\right) f_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & 1 & -1 & k+3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4-3k}{k+2} \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1 - kf_3 \\ f_2 + f_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & k-3 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{k^2+2k+10}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4-3k}{k+2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_1 - f_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \dfrac{3k-4}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{k^2+2k+10}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4-3k}{k+2} \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x &= \dfrac{3k-4}{k+2} \\ y &= \dfrac{k^2+2k+10}{k+2} \qquad \text{para } k = -2, 1, 0 \\ z &= \dfrac{4-3k}{k+2} \end{cases}} \qquad \square.$$

4. **Clasificar el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales según sus soluciones, en términos de los valores de $p \in \mathbb{R}$. En los casos en que la solución exista, determinarlas.**

$$\begin{cases} px + y + z &= p^2 \\ x + py + z &= 3 - 2p \\ x + y + pz &= 2p - 1 \end{cases}$$

Solución: **Ejercicio.**

Ejercicios del Control 2:

5. **Considerar los puntos $A = (2\sqrt{3} + 1\ ,\ -2 - 3\sqrt{3})$, $B = (5/2, -17/4)$ y $C = (1, -2)$.**

   a) **Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por B. Tratar de simplificar (factorizar) el vector director.**

   b) **Determinar si C pertenece a la recta que pasa por A y B o no.**

Solución: **Para a):**

Para determinar la ecuación vectorial de la recta pedida, basta con usar como vector director a $(B - A)$ y como vector posición a B; es decir:

$$\begin{aligned} B - A = &\quad (\frac{5}{2} - 2\sqrt{3} - 1, -\frac{17}{4} + 2 + 3\sqrt{3}) \quad = \quad (\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}, -\frac{9}{4} + 3\sqrt{3}) \\ = &\quad (\frac{6}{4} - \frac{8}{4}\sqrt{3}, -\frac{9}{4} + \frac{12}{4}\sqrt{3}) \quad = \quad (\frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{4} - \frac{8\sqrt{3}}{4}, -\frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4}) \\ = &\quad \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3} - 8, -3\sqrt{3} + 12) \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{4}(2(\sqrt{3} - 4), -3(\sqrt{3} - 4)) \quad = \quad \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 4)}{4}(2, -3) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \vec{d} = (2, -3) \quad \text{y} \quad \vec{p} = B = (5/2, -17/4) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{x} = (5/2, -17/4) + \lambda(2, -3)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para b):

Para que C pertenezca a la recta encontrada en **a)**, basta verificar que el vector $(C - B)$ sea paralelo al vector director de la recta:

$$C - B = (1 - 5/2, -2 + 17/4) = (-3/2, 9/4) = (-6/4, 9/4) = (3/4)(-2, 3) = (3/4)\vec{d}$$

Así, obtenemos que $\boxed{C - B = (3/4)\vec{d} \quad \longrightarrow \quad C = \vec{p} + (3/4)\vec{d}}$

Vemos que el punto C cumple la ecuación de la recta y, por lo tanto, pertenece a ella $\square$.

6. **Considerar los puntos $A = (3\sqrt{3} - 1\ ,\ 2 - 2\sqrt{3})$, $B = (5/4, 1/2)$ y $C = (-1, 2)$.**

   a) **Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por B. Tratar de simplificar (factorizar) el vector director.**

   b) **Determinar si C pertenece a la recta que pasa por A y B o no.**

Solución: **Ejercicio.**