UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 04−A

Trigonometría y Descomposición de vectores

Semana del Viernes 11 al Jueves 17 de Abril

1. Determinar los siguientes valores trigonométricos:

a) $\operatorname{sen}(-45^{o})$

b) $\tan(-60^{o})$

c) $\operatorname{sen}(30^{o}) - 2\tan(45^{o})$

d) $\operatorname{sen}^2(45^{o}) - \cos(-60^{o})\tan(-60^{o})$

e) $\operatorname{sen}(120^{o})$

Solución: **Para a):** $\operatorname{sen}(-45^{o}) = \operatorname{sen}(0^{o} - 45^{o}) = -\operatorname{sen}(45^{o}) = -\sqrt{2}/2$

O bien, $\operatorname{sen}(-45^{o}) = \operatorname{sen}(270^{o} + 45^{o}) = -\cos(45^{o}) = -\sqrt{2}/2$

Para b): $\tan(-60^{o}) = \tan(0^{o} - 60^{o}) = -\tan(60^{o}) = -\sqrt{3}$

O bien, $\tan(-60^{o}) = \tan(270^{o} + 30^{o}) = -\operatorname{cotan}(30^{o}) = -\sqrt{3}$

Para c): $\operatorname{sen}(30^{o}) - 2\tan(45^{o}) = (1/2) - 2(1) = -3/2$

Para d):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(45^{o}) - \cos(-60^{o})\tan(-60^{o}) &= (\sqrt{2}/2)^2 - (\cos(0^{o} - 60^{o}))(\tan(0^{o} - 60^{o}))\\ &= 1/2 - (\cos(60^{o}))(-\tan(60^{o})) = 1/2 - (1/2)(-\sqrt{3}) = -(\sqrt{3} - 1)/2\end{aligned}$$

Para e): $\operatorname{sen}(120^{o}) = \operatorname{sen}(90^{o} + 30^{o}) = \cos(30^{o}) = -\sqrt{3}/2$

O bien, $\operatorname{sen}(120^{o}) = \operatorname{sen}(180^{o} - 60^{o}) = \operatorname{sen}(60^{o}) = -\sqrt{3}/2 \ \square$.

2. Determinar los valores de $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ si se sabe:

a) $\cos(\alpha) = 1/3 \quad \text{y} \quad -90^{o} < \alpha < 0^{o}$

b) $\cos(\alpha) = -4/5 \quad \text{y} \quad 90^{o} < \alpha < 180^{o}$

c) $\cos(\alpha) = -2/3 \quad \text{y} \quad -180^{o} < \alpha < 0^{o}$

Solución: **Para a):**

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - (1/3)^2 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2(\alpha) = 8/9 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \pm(2\sqrt{2}/3)$$

Como α está en el cuadrante IV, entonces $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$; luego, $\operatorname{sen}(\alpha) = -(2\sqrt{2}/3)$.
Con ello:

$$\tan(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha) = (-2\sqrt{2}/3) \ / \ (1/3) = -2\sqrt{2}$$

Para b):

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}^2(\alpha)=1-(-4/5)^2 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}^2(\alpha)=9/25 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}(\alpha)=\pm(3/5)$$

Como α está en el cuadrante II, entonces $\operatorname{sen}(\alpha)>0$; luego, $\operatorname{sen}(\alpha)=(3/5)$.
Con ello:

$$\tan(\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)=(3/5)\ /\ (-4/5)=-3/4$$

Para c):

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}^2(\alpha)=1-(-2/3)^2 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}^2(\alpha)=5/9 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}(\alpha)=\pm(\sqrt{5}/3)$$

Como α puede estar en los cuadrantes III ó IV, vemos que $\operatorname{sen}(\alpha)<0$; luego, $\operatorname{sen}(\alpha)=-(\sqrt{5}/3)$.
Además, vemos que $\cos(\alpha)<0$, por lo que α está en el cuadrante III ; luego:

$$\tan(\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)=-\sqrt{5}/-2=\sqrt{5}/2\ \ \square.$$

3. Escribir el vector $\vec{v}=(4,-4)$ en la forma $(\ \|\vec{v}\|\cos(\alpha),\|\vec{v}\|\operatorname{sen}(\alpha)\ )$

Solución: Primero encontramos la norma del vector:

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

Para determinar el ángulo, podemos usar dos métodos:

$$\textbf{Forma I}:\ (\ 4\sqrt{2}\cos(\alpha),4\sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha)\ )=(4,-4)\quad\rightarrow\quad \begin{cases}\cos(\alpha) & =1/\sqrt{2}\\ \operatorname{sen}(\alpha) & =-1/\sqrt{2}\end{cases}\quad\rightarrow\quad \alpha=-45^{\circ}$$

$$\textbf{Forma II}:\ \tan(\alpha)=4/-4=-1\quad\rightarrow\quad \text{el vector }(4,-4)\text{ está en el cuadrante IV}\quad\rightarrow\quad \alpha=-45^{\circ}$$

Finalmente, $\boxed{(4,-4)=(\ 4\sqrt{2}\cos(-45^{\circ})\ ,\ 4\sqrt{2}\operatorname{sen}(-45^{\circ})\ )}$ $\square$.

4. Descomponer el vector $\vec{v}=(-3,4)$ como suma de dos vectores: uno paralelo a la recta $2x+3y=1$ y uno perpendicular a dicha recta.

Solución: Sabemos que el vector director de la recta será paralelo a ella:

$$3y=-2x+1\quad\rightarrow\quad y=-(2/3)x+(1/3)\quad\rightarrow\quad \begin{cases}x=2 & \rightarrow y=-1\\ x=-1 & \rightarrow y=1\end{cases}\quad\rightarrow\quad \vec{d}=(-1,1)-(2,-1)=(-3,2)$$

Luego, un vector perpendicular a la recta será perpendicular al vector director; basta con $\vec{n}=(2,3)$.
Ahora, debemos hacer $\boxed{(-3,4)=\alpha(-3,2)+\beta(2,3)}$. Esto lo podemos hacer de dos formas:

$$\textbf{Forma I}:\ \alpha=\frac{(-3,4)\bullet(-3,2)}{(-3,2)\bullet(-3,2)}=\frac{9+8}{9+4}=\frac{17}{13}\quad,\quad \beta=\frac{(-3,4)\bullet(2,3)}{(2,3)\bullet(2,3)}=\frac{-6+12}{4+9}=\frac{6}{13}$$

$$\textbf{Forma II}:\ \begin{cases}-3\alpha+2\beta & =-3\\ 2\alpha+3\beta & =4\end{cases}\quad\rightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c}-3 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{array}\right)(-1/3)f_1\ \sim\ \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{array}\right)f_2-2f_1\ \sim\ \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & 1\\ 0 & 13/3 & 2\end{array}\right)$$

$$(3/13)f_2\ \sim\ \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & 1\\ 0 & 1 & 6/13\end{array}\right)f_1+(2/3)f_2\ \sim\ \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 17/13\\ 0 & 1 & 6/13\end{array}\right)\quad\rightarrow\quad \begin{cases}\alpha & =17/13\\ \beta & =6/13\end{cases}$$

Finalmente, $\boxed{(-3,4)=(17/13)(-3,2)+(6/13)(2,3)}$ $\square$.