UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 04−B

Más sobre Descomposición de vectores

Semana del Viernes 11 al Jueves 17 de Abril

1. Determinar para los siguientes vectores su componente paralela y perpendicular al vector $(3,2)$:

a) $(6,5)$ *b)* $(\sqrt{2},1)$

Solución: La resolución de los problemas *a)* y *b)* se hará mostrando los dos métodos, al igual que en la Ayudantía 04−A:

Para a): Un vector perpendicular al $(3,2)$ es el $(-2,3)$; buscamos $(6,5)=\alpha(3,2)+\beta(-2,3)$:

$$\textbf{Forma I}: \alpha=\frac{(6,5)\bullet(3,2)}{(3,2)\bullet(3,2)}=\frac{18+10}{9+4}=\frac{28}{13}\quad,\quad \beta=\frac{(6,5)\bullet(-2,3)}{(-2,3)\bullet(-2,3)}=\frac{-12+15}{4+9}=\frac{3}{13}$$

$$\textbf{Forma II}: \begin{cases}3\alpha-2\beta &=6\\ 2\alpha+3\beta &=5\end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{array}\right)(1/3)f_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{array}\right) f_2-2f_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & 2\\ 0 & 13/3 & 1\end{array}\right)$$

$$(3/13)f_2 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & 2\\ 0 & 1 & 3/13\end{array}\right) f_1+(2/3)f_2 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 28/13\\ 0 & 1 & 3/13\end{array}\right) \rightarrow \begin{cases}\alpha &=28/13\\ \beta &=3/13\end{cases}$$

Finalmente, $\boxed{(6,5)=(28/13)(3,2)+(3/13)(-2,3)}$.

Para b): Al igual que para a), buscamos $(\sqrt{2},1)=\alpha(3,2)+\beta(-2,3)$:

$$\textbf{Forma I}: \alpha=\frac{(\sqrt{2},1)\bullet(3,2)}{(3,2)\bullet(3,2)}=\frac{3\sqrt{2}+2}{9+4}=\frac{3\sqrt{2}+2}{13}\quad,\quad \beta=\frac{(\sqrt{2},1)\bullet(-2,3)}{(-2,3)\bullet(-2,3)}=\frac{-2\sqrt{2}+3}{4+9}=\frac{3-2\sqrt{2}}{13}$$

$$\textbf{Forma II}: \begin{cases}3\alpha-2\beta &=\sqrt{2}\\ 2\alpha+3\beta &=1\end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & \sqrt{2}\\ 2 & 3 & 1\end{array}\right)(1/3)f_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & \sqrt{2}/3\\ 2 & 3 & 1\end{array}\right) f_2-2f_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & \sqrt{2}/3\\ 0 & 13/3 & \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}\end{array}\right)(3/13)f_2 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2/3 & \sqrt{2}/3\\ 0 & 1 & \dfrac{3-2\sqrt{2}}{13}\end{array}\right) f_1+(2/3)f_2 \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \dfrac{3\sqrt{2}+2}{13}\\ 0 & 1 & \dfrac{3-2\sqrt{2}}{13}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases}\alpha &=\dfrac{3\sqrt{2}+2}{13}\\ \beta &=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{13}\end{cases}$$

Finalmente, $\boxed{(\sqrt{2},1)=\left(\dfrac{3\sqrt{2}+2}{13}\right)(3,2)+\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{13}\right)(-2,3)}$ $\square$.

2. Escribir los vectores dados en la forma ($\|\vec{v}\|\cos(\alpha), \|\vec{v}\|\operatorname{sen}(\alpha)$):

a) $(2\sqrt{3}, 2)$

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Solución: **Para a):** Primero encontramos la norma del vector:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

Para determinar el ángulo, podemos usar dos métodos:

$$\textbf{Forma I}: (\ 4\cos(\alpha), 4\operatorname{sen}(\alpha)\ ) = (2\sqrt{3}, 2) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \cos(\alpha) & = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & = 1/2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \alpha = 30^{\text{o}}$$

$$\textbf{Forma II}: \ \tan(\alpha) = 2/2\sqrt{3} = 1/\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \text{el vector } (2\sqrt{3}, 2) \text{ está en el cuadrante I} \quad \rightarrow \quad \alpha = 30^{\text{o}}$$

Finalmente, $\boxed{(2\sqrt{3}, 2) = (\ 4\cos(30^{\text{o}})\ ,\ 4\operatorname{sen}(30^{\text{o}})\ )}$ $\square$.

Para b): Primero encontramos la norma del vector:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

Para determinar el ángulo, podemos usar dos métodos:

$$\textbf{Forma I}: (\ 2\cos(\alpha), 2\operatorname{sen}(\alpha)\ ) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \cos(\alpha) & = 1/\sqrt{2} \\ \operatorname{sen}(\alpha) & = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^{\text{o}}$$

$$\textbf{Forma II}: \ \tan(\alpha) = \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{el vector } (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ está en el cuadrante I} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^{\text{o}}$$

Finalmente, $\boxed{(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (\ 2\cos(45^{\text{o}})\ ,\ 2\operatorname{sen}(45^{\text{o}})\ )}$ $\square$.

3. Descomponer los siguientes vectores como suma de dos vectores: uno paralelo a la recta $6x + 3y = 9$ y uno perpendicular a dicha recta.

a) $(2, 2)$

b) $(11, 1)$

c) $(-2\alpha, -\alpha)$, $\alpha \neq 0$

d) $(3 - 2\alpha, 10 - \alpha)$, $\alpha \neq 0$

Solución: Sabemos que el vector director de la recta será paralelo a ella:

$$3y = -6x + 9 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 & \rightarrow y = 3 \\ x = 1 & \rightarrow y = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \vec{d} = (0,3) - (1,1) = (-1, 2)$$

Luego, un vector perpendicular a la recta será perpendicular al vector director; basta con $\vec{n} = (2, 1)$.

Para a): $(2,2) = \alpha(-1,2) + \beta(2,1)$:

$$\textbf{Forma I}: \alpha = \frac{(2,2) \bullet (-1,2)}{(-1,2) \bullet (-1,2)} = \frac{-2+4}{1+4} = \frac{2}{5} \quad , \quad \beta = \frac{(2,2) \bullet (2,1)}{(2,1) \bullet (2,1)} = \frac{4+2}{4+1} = \frac{6}{5}$$

$$\textbf{Forma II}: \begin{cases} -\alpha + 2\beta & = 2 \\ 2\alpha + \beta & = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \underset{f_2 + 2f_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{array} \right) \underset{(1/5)f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6/5 \end{array} \right)$$

$$\underset{f_1 - 2f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \end{array} \right) \underset{(-1)f_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} \alpha & = 2/5 \\ \beta & = 6/5 \end{cases}$$

Finalmente, $\boxed{(2,2) = (2/5)(-1,2) + (6/5)(2,1)}$.

Para b): $(11,1) = \alpha(-1,2) + \beta(2,1)$:

$$\textbf{Forma I} : \alpha = \frac{(11,1)\bullet(-1,2)}{(-1,2)\bullet(-1,2)} = \frac{-11+2}{1+4} = \frac{-9}{5} \quad , \quad \beta = \frac{(11,1)\bullet(2,1)}{(2,1)\bullet(2,1)} = \frac{22+1}{4+1} = \frac{23}{5}$$

$$\textbf{Forma II} : \begin{cases} -\alpha + 2\beta & = 11 \\ 2\alpha + \beta & = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{f_2+2f_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & 23 \end{array}\right) \underset{(1/5)f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 23/5 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_1-2f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 23/5 \end{array}\right) \underset{(-1)f_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9/5 \\ 0 & 1 & 23/5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \alpha & = -9/5 \\ \beta & = 23/5 \end{cases}$$

Finalmente, $\boxed{(11,1) = (-9/5)(-1,2) + (23/5)(2,1)}$.

Para c): $(-2\alpha,-\alpha) = \alpha(-1,2) + \beta(2,1)$:

Vemos que $(-2\alpha,-\alpha) = (-\alpha)(2,1)$. Esto quiere decir que **el vector** $(-2\alpha,-\alpha)$ **es paralelo al vector** $(2,1)$ **y, por lo tanto, es perpendicular al vector** $(-1,2)$.

Con ello:

$$\alpha = \frac{(-2\alpha,-\alpha)\bullet(-1,2)}{(-1,2)\bullet(-1,2)} = \frac{(-\alpha)\overbrace{\cancel{(2,1)\bullet(-1,2)}}^{0}}{(-1,2)\bullet(-1,2)} = 0 \ , \ \beta = \frac{(-2\alpha,-\alpha)\bullet(2,1)}{(2,1)\bullet(2,1)} = \frac{(-\alpha)\cancel{(2,1)\bullet(2,1)}}{\cancel{(2,1)\bullet(2,1)}} = (-\alpha)$$

Finalmente, $\boxed{(-2\alpha,-\alpha) = (0)(-1,2) + (-\alpha)(2,1) \ , \ \alpha \neq 0}$.

Para d): $(3-2\alpha, 10-\alpha) = \alpha(-1,2) + \beta(2,1)$:

$$\alpha = \frac{(3-2\alpha,10-\alpha)\bullet(-1,2)}{(-1,2)\bullet(-1,2)} = \frac{\cancel{2\alpha} - 3 + 20 - \cancel{2\alpha}}{1+4} = \frac{17}{5}$$

$$\beta = \frac{(3-2\alpha,10-\alpha)\bullet(2,1)}{(2,1)\bullet(2,1)} = \frac{6-4\alpha+10-\alpha}{4+1} = \frac{16}{5} - \alpha$$

Finalmente, $\boxed{(3-2\alpha,10-\alpha) = \left(\frac{17}{5}\right)(-1,2) + \left(\frac{16}{5} - \alpha\right)(2,1) \ , \ \alpha \neq 0}$ $\square$.

4. **Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por (1,2) y que tiene la misma dirección que la componente perpendicular de (1,2) sobre (6,4).**

Solución: Sobre la recta que buscamos, se tiene:

- Debe pasar por $(1,2)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{p} = (1,2)}$
- Misma dirección que la componente vertical de $(1,2)$ sobre $(6,4)$ $\rightarrow$ $\vec{d} \parallel (-4,6)$ $\rightarrow$ $\vec{d} = (-4,6)$

Finalmente, la recta buscada es $\boxed{\vec{x} = (1,2) + \lambda(-4,6) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}}$ $\square$.

5. **EJERCICIO: Hallar las ecuaciones de dos rectas perpendiculares entre sí, que se intersectan en el punto (2,3) y para las que la suma de los vectores directores es (1,5).**