UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 06−A y 06−B

Hipérbola, parábola y sus elementos

Semana del Viernes 25 al Miércoles 30 de Abril

1. **Si la ecuación dada representa a una hipérbola, encontrar su centro, sus focos y sus vértices. Además, encontrar las ecuaciones de su eje focal, de su eje conjugado y de sus asíntotas, y esbozar su gráfico:**

   a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

   b) $(3x)^2 - (2y)^2 = 1$

   c) $36y^2 - x^2 + 6x - 24y - 41 = 0$

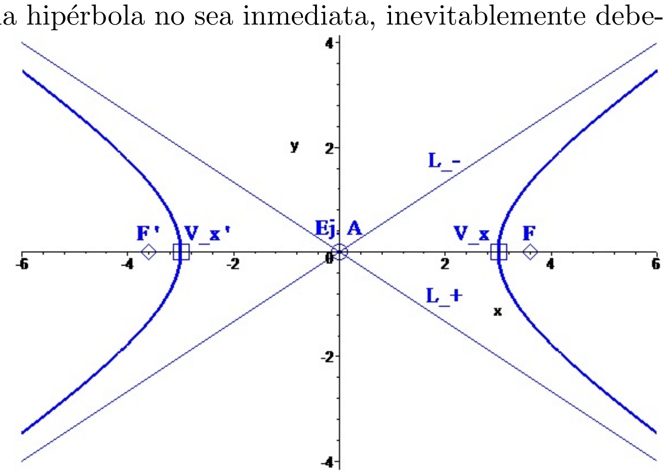
Solución:

Como paso previo para la resolución de los ejercicios, cabe mencionar que la ecuación de la hipérbola será vista únicamente en su forma principal:

$$\textbf{Horizontal}: \boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \longrightarrow \text{Asíntotas}: \boxed{\frac{(x-h)}{a} \pm \frac{(y-k)}{b} = 0}$$

$$\textbf{Vertical}: \boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \longrightarrow \text{Asíntotas}: \boxed{\frac{(y-k)}{a} \pm \frac{(x-h)}{b} = 0}$$

Por ello, para los casos en que la ecuación de la hipérbola no sea inmediata, inevitablemente debemos ***completar cuadrados***.



Para a):

En este caso vemos que la ecuación de la hipérbola ya está en su forma canónica. Además, tenemos que $h = 0$, $k = 0$, $a = 3$, $b = 2$ y además vemos que la hipérbola es horizontal.

Independiente de los valores de a y de b, se tiene que $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$; luego, $c = \sqrt{13}$ ($\approx 3{,}61$).

Para las asíntotas de la hipérbola, dado que es horizontal, se tiene:

$$l_+ : \ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x \qquad\qquad l_- : \ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x$$

Con todo lo anterior, se puede concluir que **la ecuación** $x^2/9 - y^2/4 = 1$ **representa a una hipérbola de centro** $(h,k) = (0,0)$ **con focos** $F = (h+c,k) = (\sqrt{13},0)$ **y** $F' = (h-c,k) = (-\sqrt{13},0)$ **y de vértices** $V_x = (h+a,k) = (3,0)$ **y** $V_x' = (h-a,k) = (-3,0)$**.**

El gráfico de esta elipse se puede ver en la Figura de color AZUL.

Para b):

$$(3x)^2 - (2y)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad 9x^2 - 4y^2 = 1$$

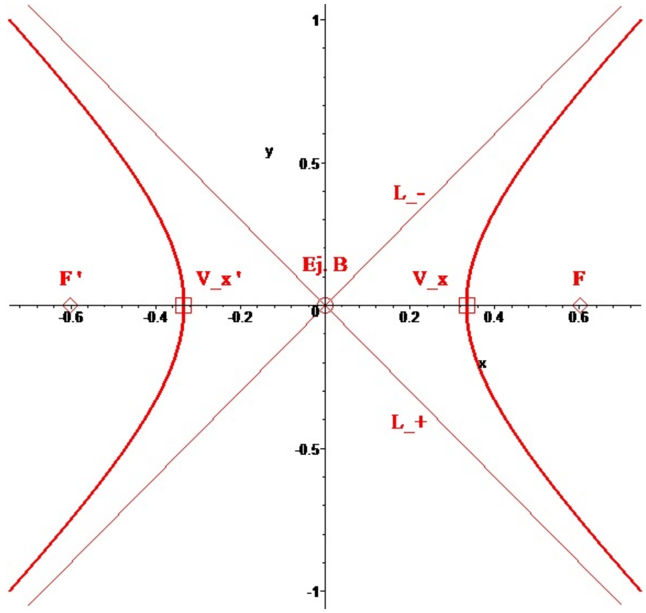
$$\longrightarrow \quad \frac{(x-0)^2}{(1/3)^2} - \frac{(y-0)^2}{(1/2)^2} = 1$$

Luego, tenemos que $h = 0$, $k = 0$, $a = 1/3$, $b = 1/2$ y además vemos que la hipérbola es horizontal.

Independiente de los valores de a y de b, se tiene que $c^2 = a^2 + b^2 = (1/9) + (1/4) = 13/36$; luego, $c = \sqrt{13}/6$ ($\approx 0{,}6$).

Para las asíntotas de la hipérbola, dado que es horizontal, se tiene:

$$l_+ : \ \frac{x}{1/3} + \frac{y}{1/2} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x$$
$$l_- : \ \frac{x}{1/3} - \frac{y}{1/2} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x$$



Con todo lo anterior, se puede concluir que **la ecuación** $(3x)^2 - (2y)^2 = 1$ **representa a una hipérbola de centro** $(h,k) = (0,0)$ **con focos** $F = (h+c,k) = (\sqrt{13}/6, 0)$ **y** $F' = (h-c,k) = (-\sqrt{13}/6, 0)$ **y de vértices** $V_x = (h+a,k) = (1/3, 0)$ **y** $V_x' = (h-a,k) = (-1/3, 0)$**.**

El gráfico de esta hipérbola se puede ver en la Figura de color ROJO.

Para c):

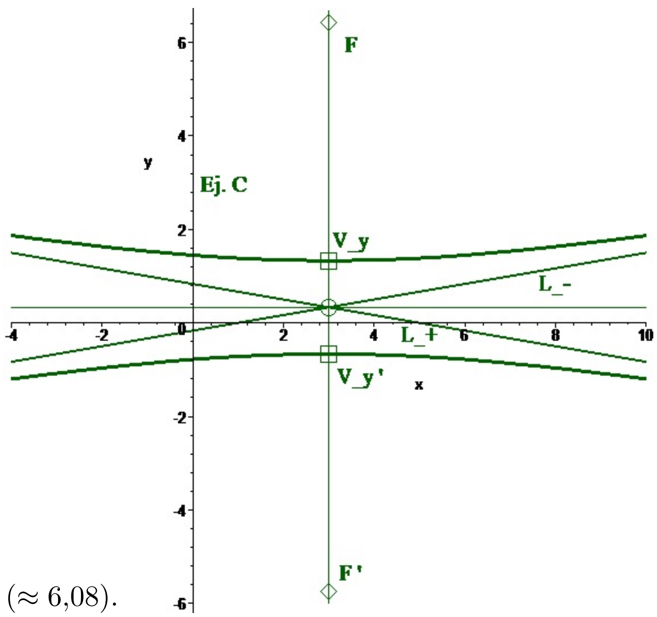
$$36y^2 - x^2 + 6x - 24y - 41 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 36(y^2 - (2/3)y) - (x^2 - 6x) - 41 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 36(y^2 - 2(1/3)y + (1/9)) - (x^2 - 6x + 9)$$
$$-(36 \cdot (1/9)) - ((-1) \cdot 9) - 41 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 36(y - (1/3))^2 - (x-3)^2 = 36$$

$$\longrightarrow \quad \frac{(y-(1/3))^2}{1} - \frac{(x-3)^2}{6^2} = 1$$



Luego, tenemos que $h = 3$, $k = 1/3$, $a = 1$, $b = 6$ y además vemos que la hipérbola es vertical.

Independiente de los valores de a y de b, se tiene que $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 36 = 37$; luego, $c = \sqrt{37}$ ($\approx 6{,}08$).

Para las asíntotas de la hipérbola, dado que es vertical, se tiene:

$$l_+ : \ \frac{(y-1/3)}{1} + \frac{(x-3)}{6} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{x}{6} + \frac{5}{6}$$
$$l_- : \ \frac{(y-1/3)}{1} - \frac{(x-3)}{6} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{x}{6} - \frac{1}{6}$$

Con todo lo anterior, se puede concluir que **la ecuación** $36y^2 - x^2 + 6x - 24y - 41 = 0$ **representa a una hipérbola de centro** $(h,k) = (3, 1/3)$ **con focos** $F = (h+c,k) = (3, 1/3 + \sqrt{37})$ **y** $F' = (h-c,k) = (3, 1/3 - \sqrt{37})$ **y de vértices** $V_y = (h, k+a) = (3, 4/3)$ **y** $V_y' = (h, k-a) = (3, -2/3)$**.**

El gráfico de esta elipse se puede ver en la Figura de color VERDE $\square$.

2. Si la ecuación dada representa a una parábola, encontrar su vértice, su foco, y su directriz. Además, encontrar la ecuación de su eje de simetría y esbozar su gráfico:

a) $x^2 + 8y = 0$

b) $x - 1 = 2(y+4)^2$

c) $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

d) $x^2 - 4y - 4 = 0$

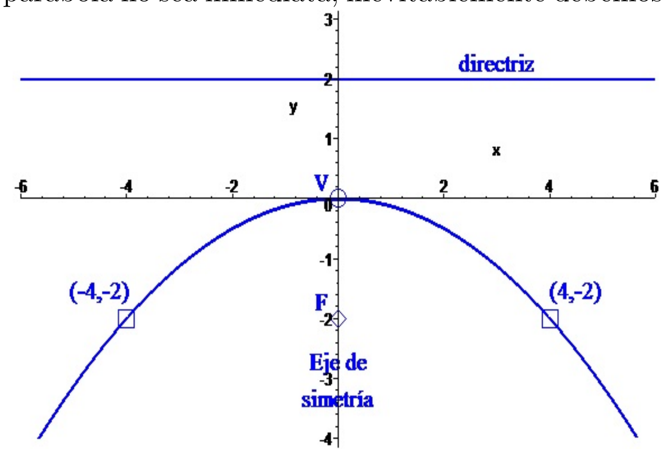
Solución:

Como paso previo para la resolución de los ejercicios, cabe mencionar que la ecuación de la parábola será vista únicamente en su forma principal:

$$\textbf{Horizontal}: \boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)} \longrightarrow \begin{cases} \text{Abre hacia la derecha} & \text{si } p > 0 \\ \text{Abre hacia la izquierda} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$\textbf{Vertical}: \boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)} \longrightarrow \begin{cases} \text{Abre hacia arriba} & \text{si } p > 0 \\ \text{Abre hacia abajo} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Por ello, para los casos en que la ecuación de la parábola no sea inmediata, inevitablemente debemos ***completar cuadrados***.



Para a):

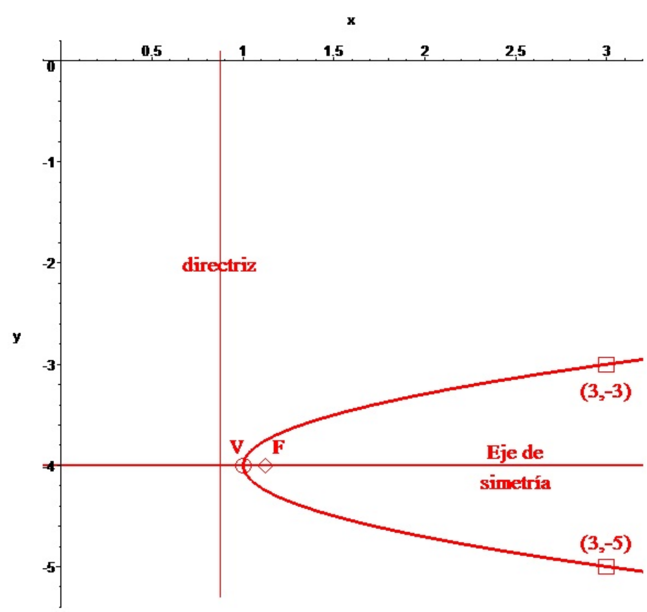
En este caso se tiene:

$$x^2 + 8y = 0 \quad \longrightarrow \quad (x-0)^2 = 4(-2)(y-0)$$

Luego, **la ecuación** $x^2+8y=0$ **representa a una parábola vertical de vértice** $(h,k) = (0,0)$**, que abre hacia abajo (**$p = -2 < 0$**):**

- Su foco es $F = (h, k+p) = (0,-2)$.
- Su eje de simetría es $x - h = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$.
- Su directriz es $y - k = -p \quad \longrightarrow \quad y = 2$.

El gráfico de esta parábola se puede ver en la Figura de color AZUL.



Para b):

$$x-1 = 2(y+4)^2 \quad \longrightarrow \quad (y-(-4))^2 = 4(1/8)(x-1)$$

Luego, **la ecuación** $x - 1 = 2(y+4)^2$ **representa a una parábola horizontal de vértice** $(h,k) = (1,-4)$**, que abre hacia la derecha (**$p = 1/8 > 0$**):**

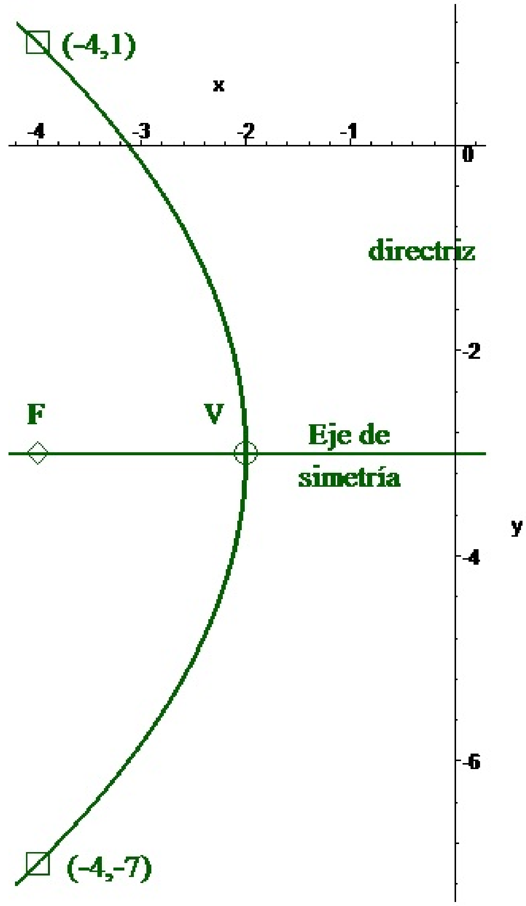
- Su foco es $F = (h+p, k) = (9/8, -4)$.
- Su eje de simetría es $y - k = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -4$.
- Su directriz es $x - h = -p \quad \longrightarrow \quad x = 7/8$.

El gráfico de esta parábola se puede ver en la Figura de color ROJO.

Para c):

$$y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$$
$$\longrightarrow \quad (y^2 + 6y + 9) - 9 + 25 = -8x$$
$$\longrightarrow \quad (y+3)^2 = -8x - 16$$
$$\longrightarrow \quad (y-(-3))^2 = 4(-2)(x-2)$$

Luego, **la ecuación** $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$ **representa a una parábola horizontal de vértice** $(h, k) = (-2, -3)$**, que abre hacia la izquierda** $(p = -2 < 0)$**:**



- Su foco es $F = (h + p, k) = (-4, -3)$.
- Su eje de simetría es $y - k = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -3$.
- Su directriz es $x - h = -p \quad \longrightarrow \quad x = 0$.

El gráfico de esta parábola se puede ver en la Figura de color VERDE.

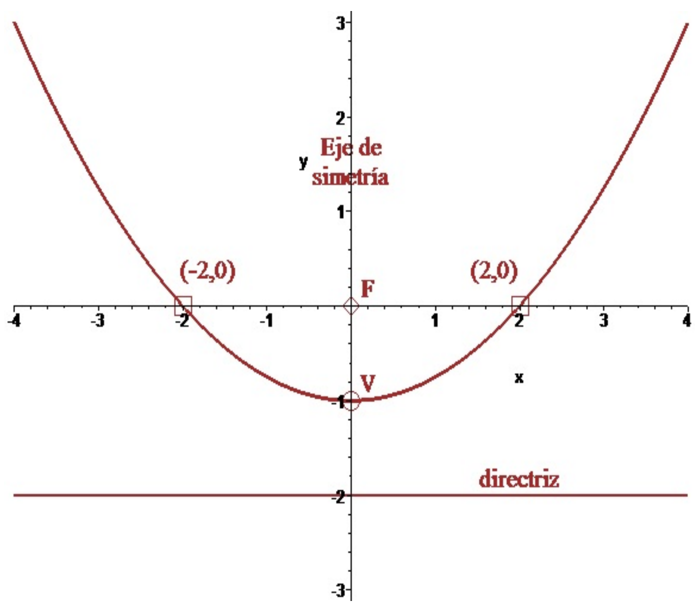
Para d):

$$x^2 - 4y - 4 = 0$$
$$\longrightarrow \quad x^2 = 4y + 4$$
$$\longrightarrow \quad (x-0)^2 = 4(1)(y-(-1))$$

Luego, **la ecuación** $x^2 - 4y - 4 = 0$ **representa a una parábola vertical de vértice** $(h, k) = (0, -1)$**, que abre hacia arriba** $(p = 1 > 0)$**:**

- Su foco es $F = (h, k + p) = (0, 0)$.
- Su eje de simetría es $x - h = 0 \ \rightarrow \ x = 0$.
- Su directriz es $y - k = -p \quad \longrightarrow \quad y = -2$.

El gráfico de esta parábola se puede ver en la Figura de color CAFÉ $\square$.



3. Determinar en cada caso la cónica indicada y encontrar sus elementos:

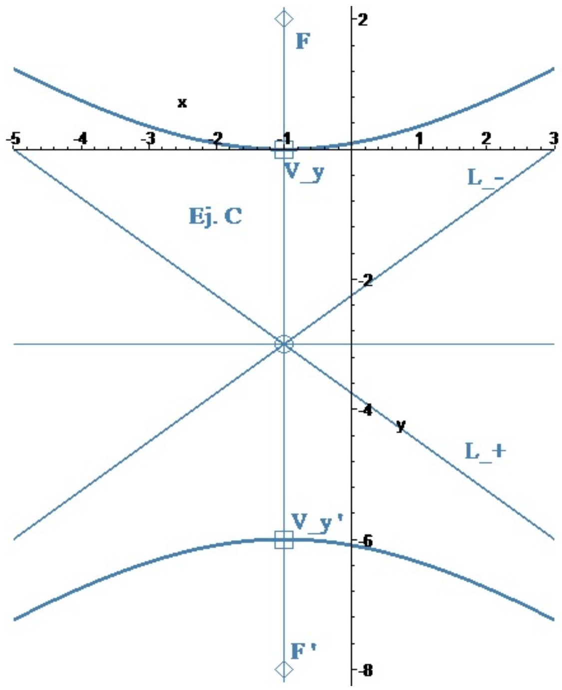
a) Hipérbola de centro $(-1,-3)$, con (-1,0) como uno de sus vértices y con $3x+4y+15=0$ como una de sus asíntotas.

b) Parábola de eje VERTICAL que pase por $(0,3)$, $(3,4)$ y $(3,-3)$.

c) Parábola de eje HORIZONTAL que pase por $(0,3)$, $(3,4)$ y $(3,-3)$.

Solución:

Para a):



La hipérbola tiene centro $(h,k)=(-1,-3)$ y uno de sus vértices es $(1,0)=(h,k+a)$. Luego, $\boxed{a=3}$ y, además, la hipérbola es vertical, por lo que su ecuación será de la forma:

$$\frac{(y+3)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{b^2}=1$$

Luego, sus asíntotas estarán dadas por:

$$\frac{y+3}{3}\pm\frac{x+1}{b}=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} l_+ & : \; b(y+3)+3(x+1)=0 \\ l_- & : \; b(y+3)-3(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} l_+ & : \; 3x+by+(3b+3)=0 \\ l_- & : \; 3x-by+(3-3b)=0 \end{cases}$$

Sabemos que $3x+4y+15=0$ es asíntota; comparando, vemos que esta debiera corresponder a l_+, con $\boxed{b=4}$ y $3b+3=3(4)+3=15$. Con ello, l_- tendrá por ecuación $3x-4y-(3-3(4))=0 \rightarrow \quad 3x-4y-9=0$. Vemos también que $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

Luego, la hipérbola buscada tiene por ecuación:

$$\frac{(y+3)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$$

con focos $F=(h,k+c)=(-1,2)$ y $F'=(h,k-c)=(-1,-8)$ y vértices $V_y=(1,0)$ y $V_y'=(h,k-a)=(-1,-6)$.

El gráfico de la hipérbola buscada se puede ver en la figura de la derecha.

Para b):

La parábola debe ser vertical, por lo que su ecuación será de la forma $\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$. También sabemos que $(0,3)$, $(3,4)$ y $(3,-3)$ están en la parábola; luego:

$$\begin{cases} (0-h)^2=4p(3-k) & (1) \\ (3-h)^2=4p(4-k) & (2) \\ (3-h)^2=4p(-3-k) & (3) \end{cases} \longrightarrow \quad (2)-(3):\; 0=4p(4-k+3+k) \;\rightarrow\; 0=4p \;\rightarrow\; \boxed{p=0}$$

El resultado anterior implica $(x-h)^2=0$, por lo que $x=h$. Luego, **no hay una parábola que cumpla con lo pedido**.

Para c):

La parábola debe ser horizontal, por lo que su ecuación será de la forma $\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$. También sabemos que $(0,3)$, $(3,4)$ y $(3,-3)$ están en la parábola; luego:

$$\begin{cases} (3-k)^2 = 4p(0-h) & (1) \\ (4-k)^2 = 4p(3-h) & (2) \\ (-3-k)^2 = 4p(3-h) & (3) \end{cases}$$

$$(2)-(3): \quad (4-k)^2-(-3-k)^2 = 0 \;\longrightarrow\; 16-8k+\cancel{k^2} = 9+6k+\cancel{k^2} \;\longrightarrow\; 7 = 14k \;\longrightarrow\; \boxed{k = 1/2}$$

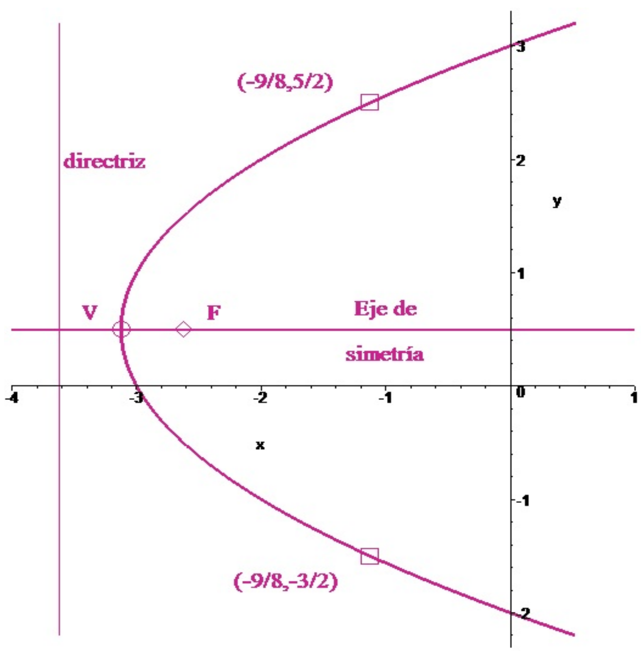
$$(2)-(1): \quad (4-\overset{1/2}{\cancel{k}})^2-(3-\overset{1/2}{\cancel{k}})^2 = 4p(3\cancel{-h+h}) \to (7/2)^2-(5/2)^2 = 12p \to p = \frac{49-25}{4\cdot 12} = \frac{24}{48} = \boxed{1/2 = p}$$

$$(1): \quad (3-\overset{1/2}{\cancel{k}})^2 = 4\overset{1/2}{\cancel{p}}(0-h) \;\longrightarrow\; (5/2)^2 = -2h \;\longrightarrow\; h = \frac{-25}{4\cdot 2} \;\longrightarrow\; \boxed{h = -25/8}$$

Luego, **la parábola buscada tiene por ecuación** $(y-(1/2))^2 = 4(1/2)(x-(-25/8))$**, es horizontal de vértice** $(h,k) = (-25/8, 1/2)$**, que abre hacia la derecha** ($p = 1/2 > 0$)**:**

- Su foco es $F = (h+p, k) = (-21/8, 1/2)$.
- Su eje de simetría es $y-k = 0 \;\to\; y = 1/2$.
- Su directriz es $x-h = -p \;\longrightarrow\; x = -29/8$.

El gráfico de esta parábola se puede ver en la Figura de la derecha $\square$.



4. Determinar la intersección entre la recta $2x+3y=0$ y la cónica $x^2-y^2=3$.

Solución:

Por mera curiosidad, vemos que la ecuación de la cónica corresponde a una hipérbola:

$$x^2-y^2 = 3 \;\longrightarrow\; \boxed{\frac{(x-0)^2}{3} - \frac{(y-0)^2}{3} = 1}$$

Por otra parte, la recta será: $2x+3y=0 \;\longrightarrow\; \boxed{y = -(2/3)x}$

Sustituyendo la ecuación de la recta en la hipérbola, se obtiene:

$$\frac{(x-0)^2}{3} - \frac{(y-0)^2}{3} = 1 \;\longrightarrow\; (x)^2-(-(2/3)x)^2 = 3 \;\longrightarrow\; x^2-(4/9)x^2 = 3 \;\longrightarrow\; (5/9)x^2 = 3$$

$$\longrightarrow\; x^2 = 3\cdot(9/5) \;\longrightarrow\; \boxed{x = \pm 3\sqrt{3/5}} \;\longrightarrow\; y = -(2/3)x = \mp(2/\cancel{3})(\cancel{3})\sqrt{3/5} \;\longrightarrow\; \boxed{y = \mp 2\sqrt{3/5}}$$

Finalmente, los puntos de intersección buscados son $A = (3\sqrt{3/5}, -2\sqrt{3/5})$ y $B = (-3\sqrt{3/5}, 2\sqrt{3/5})$ $\square$.