UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 07−A y 07−B

Dominio, Recorrido y Álgebra de Funciones

Semana del Lunes 05 al Jueves 08 de Mayo

1. Para las siguientes funciones, determinar si existe la imagen de 4. Si existe, calcularla y si no, justificar por qué no existe:

a) $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$

b) $g : [3, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{8 - x}$

Solución:

Una función asocia a un elemento x (preimagen) otro valor $f(x)$ (imagen), ***siempre y cuando*** x ***pertenezca al conjunto de partida*** (dominio).
Es decir, $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathrm{Cod}(f)$ y $f(x)$ existe siempre y cuando $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Para a):
Vemos que el dominio de la función es $\mathrm{Dom}(f) = [1, 2]$ y que $4 \notin \mathrm{Dom}(f)$; luego, ***no es posible calcular la imagen de 4 (no existe*** $f(4)$***)***.

Para b):
Vemos que $\mathrm{Dom}(f) = [3, 7]$ y que $4 \in \mathrm{Dom}(f)$; luego, ***existe*** $f(4)$:

$$f(x) = \frac{1}{8 - x} \quad \longrightarrow \quad f(4) = \frac{1}{8 - 4} = \frac{1}{4} \ \square.$$

2. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones determinan a la variable "y" como función de la variable "x". Para aquellas en que no sea posible, restringir cada variable a un intervalo en que sí sea posible:

a) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$ *b)* $x^2 - y^2 = 1$ *c)* $x^2 + y^2 = 1$

Solución:

Para determinar y como función de x, debemos ordenar esta ecuación de tal forma de despejar y (con ello, diremos que $y = f(x)$, lo cual nos daría la regla de asignación de f).

Para a):

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0 \quad \longrightarrow \quad (y^2 - 6y + 9) - 9 - 8x + 17 = 0 \quad \longrightarrow \quad (y - 3)^2 = 8x - 8$$

$$\longrightarrow \quad (y - 3)^2 = 8(x - 1) \quad \longrightarrow \quad (y - 3)^2 = 4(2)(x - 1)$$

Antes de resolver el problema, observemos que la ecuación dada representa a una parábola horizontal con vértice $(1, 3)$ y eje focal $y - 3 = 0 \longrightarrow y = 3$, que abre hacia la derecha ($p = 2 > 0$).

En este paso, lo que seguiría es aplicar raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación; sin embargo, debemos asegurarnos de que es posible hacerlo.

Vemos que ***un número elevado al cuadrado siempre es positivo o cero*** (en este caso, $(y-3)^2 \geq 0$); luego, como el lado derecho es igual al lado izquierdo, entonces tambin debe ser positivo o cero. En este caso, **estamos haciendo una RESTRICCIÓN al dominio**:

$$8(x-1) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad x-1 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x \geq 1}$$

$$\text{Es decir,} \qquad \boxed{\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}} \quad (\ \mid :\ \text{tal que})$$

Con esto, ya determinamos todos los valores de x para los que es posible sacar raíz cuadrada; sin embargo, aún falta por determinar cuál es la raíz cuadrada del lado izquierdo.

Cuando uno calcula $\sqrt{(4)^2}$, rápidamente simplificamos el cuadrado con la raíz y decimos $\sqrt{(4)^2} = (4)$; sin embargo, si hiciéramos lo mismo para $\sqrt{(-4)^2}$, diríamos que $\sqrt{(-4)^2} = (-4)$, lo cual es falso. Entonces, se dice que la raíz cuadrada se comporta de la siguiente manera:

- Si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$. Ejemplo: $\sqrt{(4)^2} = 4$, $\sqrt{(0)^2} = 0$.
- Si $x \leq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$. Ejemplo: $\sqrt{(-4)^2} = -(-4) = 4$, $\sqrt{(0)^2} = -(0) = 0$.

Aplicando lo anterior a la expresión $(y-3)^2$, tenemos **DOS CASOS**:

- Si $y-3 \geq 0$, entonces $\sqrt{(y-3)^2} = y-3$.
- Si $y-3 \leq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -(y-3) = -y+3 = 3-y$.

Ahora, contemplando la restricción para x y los dos casos para y, se obtiene:

- Si $x \geq 1$ e $y-3 \geq 0$:

$$\sqrt{(y-3)^2} = \sqrt{8(x-1)} \quad \longrightarrow \quad y-3 = 2\sqrt{2}\sqrt{x-1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = 2\sqrt{2}\sqrt{x-1}+3}$$

- Si $x \geq 1$ e $y-3 \leq 0$:

$$\sqrt{(y-3)^2} = \sqrt{8(x-1)} \quad \longrightarrow \quad 3-y = 2\sqrt{2}\sqrt{x-1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = 3-2\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$$

En este caso, si se hiciera el gráfico de estas funciones, obtendríamos que la primera función es exactamente la parte superior de la parábola (desde el eje de simetría hacia arriba), mientras que la segunda función corresponde a la parte inferior de la parábola (del eje de simetría hacia abajo).

Para b):

Antes de resolver el problema, observemos que la ecuación dada representa a una hipérbola horizontal de centro $(0,0)$, con $a = b = 1$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ y eje focal $y - 0 = 0$.

Procediendo por analogía al caso anterior, se tiene:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad y^2 = x^2 - 1$$

$$\textbf{Restricción al dominio}: \ x^2 - 1 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad (x+1)(x-1) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 & \text{y} \ \ x-1 \geq 0 \\ & \text{ó} \\ x+1 \leq 0 & \text{y} \ \ x-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq -1 & \text{y} \ \ x \geq 1 \\ & \text{ó} \\ x \leq -1 & \text{y} \ \ x \leq 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x \geq 1 \ \text{ ó } \ x \leq -1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1\}}$$

Casos:

- Si $y \geq 0$, entonces $\sqrt{y^2} = y$.
- Si $y < 0$, entonces $\sqrt{y^2} = -y$.

Contemplando la restricción y los casos, se obtiene:

- Si $x \geq 1$ ó $x \leq -1$, y además $y \geq 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2-1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = \sqrt{x^2-1}}$$

- Si $x \geq 1$ ó $x \leq -1$, y además $y \leq 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2-1} \quad \longrightarrow \quad -y = \sqrt{x^2-1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = -\sqrt{x^2-1}}$$

En este caso, si se hiciera el gráfico de estas funciones, obtendríamos que la primera función es exactamente la parte superior de las dos ramas de la hipérbola (desde el eje focal hacia arriba), mientras que la segunda función corresponde a la parte inferior de ambas ramas de la hipérbola (del eje focal hacia abajo).

Para c):

Antes de resolver el problema, observemos que la ecuación dada representa a una circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio $r = 1$.

Procediendo por analogía al caso anterior, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$$

$$\textbf{Restricción al dominio}: \ 1 - x^2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad (1+x)(1-x) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 1+x \geq 0 & \text{y} \quad 1-x \geq 0 \\ & \text{ó} \\ 1+x \leq 0 & \text{y} \quad 1-x \leq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq -1 & \text{y} \quad 1 \geq x \ (\text{solución} -1 \leq x \leq 1) \\ & \text{ó} \\ x \leq -1 & \text{y} \quad 1 \leq x \ (\text{no tiene solución}) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}}$$

Casos:

- Si $y \geq 0$, entonces $\sqrt{y^2} = y$.
- Si $y < 0$, entonces $\sqrt{y^2} = -y$.

Contemplando la restricción y los casos, se obtiene:

- Si $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = \sqrt{1-x^2}}$$

- Si $-1 \leq x \leq 1$ e $y \leq 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \quad \longrightarrow \quad -y = \sqrt{1-x^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = -\sqrt{1-x^2}}$$

En este caso, si se hiciera el gráfico de estas funciones, obtendríamos que la primera función es exactamente la semicircunferencia superior (desde el eje X hacia arriba), mientras que la segunda función corresponde a la semicircunferencia inferior (del eje X hacia abajo) $\square$.

3. Si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ **, determinar el dominio y la imagen (recorrido) más amplios para** f**.**

Solución:

El dominio más amplio (dominio máximo o maximal) corresponde al conjunto de todos los elementos x para los que $f(x)$ está "bien definida" (es decir, $f(x) \in \mathrm{Cod}(f)$).

Escrito como conjunto, se tiene $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathrm{Cod}(f)\}$.

En el problema, vemos que:

$$\mathrm{Dom}(f) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+3} \in \mathbb{R}\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \neq 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, -3[\ \cup\ ]-3, +\infty[}$$

Luego, el recorrido (más amplio) corresponde al conjunto de todos los elementos $f(x)$ para los que x esté en el dominio recién encontrado.

Escrito como conjunto, se tiene $\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathrm{Cod}(f) \mid y = f(x)\ ,\ x \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

En el problema, vemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{x+3}\ ,\ x \neq -3\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y(x+3) = x-1\ ,\ x \neq -3\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid xy + 3y = x - 1\ ,\ x \neq -3\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid x - xy = 3y + 1\ ,\ x \neq -3\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid x(1-y) = 3y + 1\ ,\ x \neq -3\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3y+1}{1-y}\ ,\ x \neq -3\ ,\ y \neq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f) =]-\infty, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[} \quad \square.$$

4. Si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **, determinar el dominio y la imagen (recorrido) más amplios para** f**.**

Solución:

$$\mathrm{Dom}(f) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R}\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \neq 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x-2}\ ,\ x \neq 2\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y(x-2) = x\ ,\ x \neq 2\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid xy - 2y = x\ ,\ x \neq 2\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid xy - x = 2y\ ,\ x \neq 2\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid x(y-1) = 2y\ ,\ x \neq 2\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2y}{y-1}\ ,\ x \neq 2\ ,\ y \neq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f) =]-\infty, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[} \quad \square.$$

5. Determinar la imagen (recorrido) para $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ 2x-3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ **.**

Solución:

En primer lugar, debemos notar que $\mathrm{Dom}(f)$ corresponderá a todos los valores de x contemplados en los casos; es decir, $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$.

Dado que la función está definida por casos (también llamados ***tramos***), debemos analizar ambos **CASOS** por separado:

- Si $x > 0$, entonces $f_+(x) = x^2 + 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rec}(f_+) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\ ,\ x > 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y - 1 = x^2\ ,\ x > 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \sqrt{y-1} = x\ ,\ x > 0\ ,\ y - 1 > 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f_+) =]1, +\infty[}$$

- Si $x \leq 0$, entonces $f_-(x) = 2x - 3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rec}(f_-) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2x - 3\ ,\ x \leq 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y + 3 = 2x\ ,\ x \leq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{y+3}{2} = x\ ,\ x \leq 0\ ,\ y + 3 \leq 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -3\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f_-) =]-\infty, -3]}$$

Luego, el recorrido se obtiene considerando ambos casos; es decir:

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}(f_+)\ \cup\ \mathrm{Rec}(f_-) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Rec}(f) =]-\infty, -3]\ \cup\ [1, +\infty[} \quad \square.$$

6. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ **y** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ **, determinar las siguientes funciones y su respectivo dominio:**

a) $f + g$ *b)* fg *c)* f/g

Solución:

El dominio de cualquier "mezcla" de dos funciones corresponde al conjunto en que ambas funciones estén bien definidas; esto se logra con la intersección de los dominios de ambas funciones.

En este caso, vemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

Para a):

$$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \longrightarrow \quad (f+g)(x) = (2x+1) + (x^2-1) \quad \longrightarrow \quad \boxed{(f+g)(x) = x^2 + 2x}$$

Para b):

$$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \longrightarrow \quad (fg)(x) = (2x+1)(x^2-1) \quad \longrightarrow \quad \boxed{(fg)(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1}$$

Para c):

Aquí se debe hacer una **RESTRICCIÓN al dominio**, ya que $g(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f/g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\ ,\ x \in \mathrm{Dom}(g)\ ,\ g(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\ ,\ x \in \mathrm{Dom}(g)\ ,\ x^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\ ,\ x \in \mathrm{Dom}(g)\ ,\ (x+1)(x-1) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\ ,\ x \in \mathrm{Dom}(g)\ ,\ x \neq -1\ ,\ x \neq 1\} \\ &=]-\infty, -1[\ \cup\ ]-1, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow (f/g)(x) = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} \longrightarrow \boxed{(f/g)(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}} \quad \square.$$

7. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 20$ **y** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/x & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$ **, determinar las siguientes funciones y su respectivo dominio:**

a) $f + g$ *b)* fg *c)* f/g

Solución:

Vemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = [0, +\infty[$ (dado por los tramos de g).

Para a):

$$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, +\infty[$$

Cabe destacar que cuando la "mezcla" de funciones se calcula para funciones por tramos, se debe hacer la operación tramo por tramo; es decir:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} (3x-20)+(2x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (3x-20)+(2/x) & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ (3x-20)+(3) & \text{si } 4 \leq x \end{cases} \longrightarrow \boxed{(f+g)(x) = \begin{cases} 5x-20 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{3x^2-20x+2}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3x-17 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}}$$

Para b):

$$\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, +\infty[$$

$$(fg)(x) = \begin{cases} (3x-20)(2x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (3x-20)(2/x) & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ (3x-20)(3) & \text{si } 4 \leq x \end{cases} \longrightarrow \boxed{(fg)(x) = \begin{cases} 6x^2-40x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 6-\dfrac{40}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 9x-60 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}}$$

Para c):

$$\textbf{Restricción al dominio} : g(x) \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x \neq 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/x \neq 0 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3 \neq 0 & \text{si } 4 \leq x \end{cases} \longrightarrow \boxed{x \neq 0}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{0\} =]0, +\infty[$$

$$(f/g)(x) = \begin{cases} (3x-20)/(2x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ (3x-20)/(2/x) & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ (3x-20)/(3) & \text{si } 4 \leq x \end{cases} \longrightarrow \boxed{(f/g)(x) = \begin{cases} (3/2)-(10/x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ (3/2)x^2-10x & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ x-(20/3) & \text{si } 4 \leq x \end{cases}} \quad \square.$$