UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 11−A y 11−B

Álgebra de Límites y Continuidad

más la resolución del Taller de Límites y Continuidad

Semana del Viernes 30 de Mayo al Jueves 05 de Junio

1. Usar propiedades de los límites laterales para determinar los siguientes límites, si existieran:

a) $\lim\limits_{t\to -3^+} \sqrt{9-t^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x-5}{2|x-5|}$

Solución: **Para a)**

$(t \to -3^+)$ quiere decir $(t \to -3 \ \wedge \ t > -3)$.

Considerando (al menos en forma intuitiva) el gráfico de la función $9-t^2$ o bien completando desigualdades, se puede ver que $9-t^2 \to 0 \ \wedge 9-t^2 > 0$. Luego, es lícito calcular $\sqrt{9-t^2}$ (es decir, la raíz está bien definida).

Por lo tanto, $\lim\limits_{t\to -3^+} \sqrt{9-t^2} = \sqrt{0} = 0$.

Para b):

$(x \to 5^-)$ quiere decir $(x \to 5 \ \wedge \ x < 5)$.

Como $x < 5$, se tiene que $x-5 < 0$, por lo que $|x-5| = -(x-5)$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x-5}{2|x-5|} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\cancel{x-5}}{-2\cancel{(x-5)}} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-1}{2} \quad \square.$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1}$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

Solución: **Para a)**

$$\begin{cases} x \text{ es continua en } \mathbb{R} \\ -3 \text{ es continua en } \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \quad x-3 \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ (suma de funciones continuas)}$$

$$\begin{cases} x^2 \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ (producto de funciones continuas)} \\ 1 \text{ es continua en } \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \quad x^2+1 \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

El cuociente de funciones continuas será continuo si ambas funciones son continuas **y además si la función que divide no es nula**. En este caso, vemos que $x^2 \geq 0$, por lo que $x^2+1 \geq 1$; es decir, $x^2+1 \neq 0$ (para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x-3 \text{ es continua en } \mathbb{R} \\ x^2+1 \text{ es continua en } \mathbb{R} \\ x^2+1 \neq 0 \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \quad f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1} \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

Para b):

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2>0 \\ -(x+2) & \text{si } x+2<0 \end{cases}$$

Vemos que debido a lo anterior, se tiene:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} & \text{si } x>-2 \\ \dfrac{-\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} & \text{si } x<-2 \\ 0 & \text{si } x=-2 \end{cases} \quad\longrightarrow\quad \boxed{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>-2 \\ -1 & \text{si } x<-2 \\ 0 & \text{si } x=-2 \end{cases}}$$

Con ello, debemos analizar la continuidad de f en tres casos:

$$\boxed{a>-2} \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 1 = 1 \ \wedge\ f(a)=1 \longrightarrow \boxed{f \text{ es continua en } [-2,+\infty[}$$

$$\boxed{a<-2} \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} -1 = -1 \ \wedge\ f(a)=-1 \longrightarrow \boxed{f \text{ es continua en }]-\infty,-2[}$$

$$\boxed{a=-2} \longrightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} -1 = -1 \ \wedge\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} 1 = 1$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x) \longrightarrow \boxed{f \text{ NO es continua en } -2}$$

Por lo tanto, vemos que f es continua en $\mathbb{R}-\{-2\} =]-\infty,-2[\ \cup\ ]-2,+\infty[$ $\square$.

3. Sea $a\in\mathbb{R}$. Considerar el conjunto de funciones:

$$f_a:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f_a(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x\leq 2 \\ ax^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Determinar los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los que f_a es continua (en todo $\mathbb{R}$).

Solución: Sabemos que x es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que es continua en $]-\infty,2[$ y en $]2,+\infty[$. Además, independiente del valor de $a\in\mathbb{R}$, se tiene que a es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que es continua en $]2,+\infty[$. Luego:

- x^3 es continua en $]-\infty,2[$ (producto de funciones continuas)
- ax^2 es continua en $]2,+\infty[$ (producto de funciones continuas)

Luego, para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$, solo falta verificar que sea continua en $x=2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^3 = \left(\lim_{x\to 2^-} x\right)^3 = (2)^3 = 8 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} ax^2 = \left(\lim_{x\to 2^-} a\right)\left(\lim_{x\to 2^-} x\right)^2 = a(2)^2 = 4a \\ f(2) &= (2)^3 = 8 \end{aligned}$$

Luego, la función será continua en $x=2$ (y, por consiguiente, en todo $\mathbb{R}$) si $4a=8$; es decir, si $a=2$ $\square$.

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

b) $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

Solución: **Para a):**

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}\ (\text{tipo } 0/0) = \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+2)}{(x+5)\cancel{(x-5)}} = \lim_{x\to 5} \frac{x+2}{x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 5} x+2}{\lim\limits_{x\to 5} x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 5} x + \lim\limits_{x\to 5} 2}{\lim\limits_{x\to 5} x + \lim\limits_{x\to 5} 5} = \frac{5+2}{5+5} = \frac{7}{10}$$

Para b):

$$\lim_{u\to -2} \frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}\ (\text{tipo } 0/0) = \lim_{u\to -2} \frac{u(u^2+4u+4)}{(u-3)(u+2)} = \lim_{u\to -2} \frac{u(u+2)^{\cancel{2}}}{(u-3)\cancel{(u+2)}} = \lim_{u\to -2} \frac{u(u+2)}{(u-3)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{u\to -2} u(u+2)}{\lim\limits_{u\to -2} u-3} = \frac{\left(\lim\limits_{u\to -2} u\right)\left(\lim\limits_{u\to -2} u+2\right)}{\lim\limits_{u\to -2} u + \lim\limits_{u\to -2} -3} = \frac{(-2)\cancelto{0}{(-2+2)}}{(-2)+(-3)} = \frac{0}{-5} = 0$$

Para c):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\ (\text{tipo } 0/0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1-\sqrt{1-x})} \frac{(1+\sqrt{1-x})}{(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+\sqrt{1-x})}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} (1+\sqrt{1-x}) = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x} = \lim_{x\to 0} 1 + \sqrt{\lim_{x\to 0} 1-x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} x} = 1 + \sqrt{1-0} = 1+\sqrt{1} = 1+1 = 2$$

Para d):

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\ (\text{tipo } 0/0) = \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{(1-\sqrt{5-x})} \frac{(1+\sqrt{5-x})}{(1+\sqrt{5-x})} = \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{1-(5-x)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{x-4} \frac{(3+\sqrt{5+x})}{(3+\sqrt{5+x})}$$

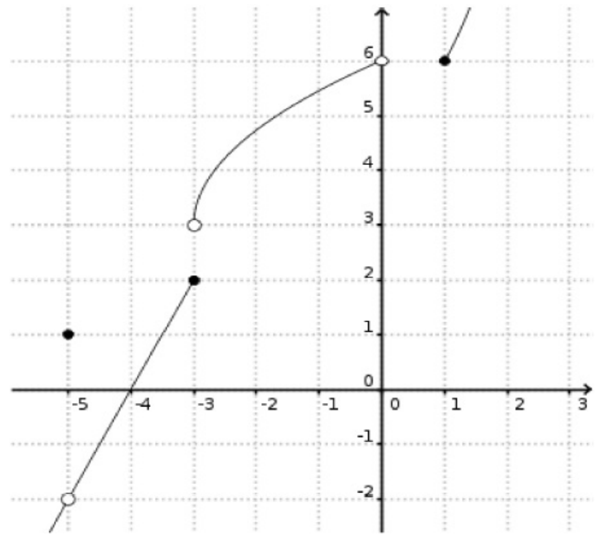
$$= \lim_{x\to 4} \frac{(9-(5+x))(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x\to 4} \frac{(-\cancel{(x-4)})(1+\sqrt{5-x})}{\cancel{(x-4)}(3+\sqrt{5+x})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = \frac{1+\sqrt{5-4}}{3+\sqrt{5+4}} = \frac{1+\sqrt{1}}{3+\sqrt{9}} = \frac{1+1}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \square.$$

Resolución del Taller:

Considerar una función f cuyo gráfico entre -6 y 3 es el de la figura adjunta. Al respecto, decida si las afirmaciones son ciertas, justificando en cada caso:

1. $\lim_{x\to -5} f(x) = 1$
2. $\lim_{x\to -5} f(x) = f(-5)$
3. f es continua en -5
4. $\lim_{x\to -3} f(x) = 2$
5. f es continua en -3
6. $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$
7. f es continua en 0
8. $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$
9. f es continua en 1



Solución: **Para 1:**

$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = -2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -5^+} f(x) = -2$$

Luego, $\boxed{\lim_{x\to -5} f(x) = -2 \neq 1}$

Por lo tanto, la afirmación es FALSA.

Para 2:

Se tiene que $f(-5) = 1$ y ya vimos que $\lim_{x\to -5} f(x) = -2$.

Luego, $\boxed{\lim_{x\to -5} f(x) \neq f(-5)}$

Por lo tanto, la afirmación es FALSA.

Para 3:

Para que f sea continua en -5, se debe cumplir:

- $-5 \in \mathrm{Dom}(f)$ (se cumple)
- Existe $\lim_{x\to -5} f(x)$ (se cumple)
- $\lim_{x\to -5} f(x) = f(-5)$ (no se cumple)

Luego, se tiene que $\boxed{f \text{ NO es continua en } -5}$. Por lo tanto, la afirmación es FALSA.

Para 4:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$$

Luego, $\boxed{\text{NO EXISTE } \lim_{x\to -3} f(x)}$. Por lo tanto, la afirmación es FALSA.

Para 5:

Para que f sea continua en -3, se debe cumplir:

- $-3 \in \mathrm{Dom}(f)$ (se cumple)
- Existe $\lim_{x\to -3} f(x)$ (no se cumple)
- $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$ (no es necesario verificarlo)

Luego, se tiene que $\boxed{f \text{ NO es continua en } -3}$. Por lo tanto, la afirmación es FALSA.

Para 6:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 6 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) \text{ NO EXISTE}$$

En este caso, por tratarse de un "borde", se tiene que el límite será igual a aquel límite lateral que se puede calcular.

Luego, $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 6}$. Por lo tanto, la afirmación es VERDADERA.

Para 7:

Para que f sea continua en 0, se debe cumplir:

- $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ (no se cumple)
- Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ (aunque exista, no sirve)
- $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (no es necesario verificarlo)

Luego, se tiene que $\boxed{f \text{ NO es continua en } 0}$. Por lo tanto, la afirmación es FALSA.

Para 8:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \text{ NO EXISTE} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 6$$

En este caso, por tratarse de un "borde", se tiene que el límite será igual a aquel límite lateral que se puede calcular.

Luego, $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 6}$. Por lo tanto, la afirmación es VERDADERA.

Para 9:

Para que f sea continua en 1, se debe cumplir:

- $1 \in \mathrm{Dom}(f)$ (se cumple)
- Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ (se cumple)
- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ (se cumple)

Luego, se tiene que $\boxed{f \text{ es continua en } 1}$. Por lo tanto, la afirmación es VERDADERA.