UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 12−A y 12−B

Más sobre Límites y Continuidad

Semana del Viernes 06 al Jueves 12 de Junio

1. **Calcular los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{7-x}{|x-7|}$ *b)* $\lim\limits_{y\to 3} \dfrac{\frac{1}{y}-\frac{1}{3}}{y-3}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-3}-1}{\sqrt{x^2-3}-1}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt[8]{x+80}}{3-\sqrt[4]{x+80}}$

Solución: **Para a)**

$(x\to 7^-)$ quiere decir $(x\to 7 \ \wedge \ x<7)$; luego, $x-7<0$, por lo que $|x-7| = -(x-7) = 7-x$.
Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{7-x}{|x-7|} = \lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{\cancel{7-x}}{\cancel{7-x}} = 1$.

Para b):

$$\lim_{y\to 3} \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{3}}{y-3} = \lim_{y\to 3} \frac{\frac{3-y}{3y}}{y-3} = \lim_{y\to 3} \frac{\frac{-\cancel{(y-3)}}{3y}}{\cancel{y-3}} = \lim_{y\to 3} \frac{-1}{3y} = \frac{-1}{9}$$

Para c):

En este caso, el límite se puede resolver observando que $\sqrt{x^2-3} = \left(\sqrt[4]{x^2-3}\right)^2$.

Para hacer más visible lo anterior, hacemos el cambio $\boxed{u = \sqrt[4]{x^2-3}}$. Vemos que si x tiende a 2, entonces u tiende a $\sqrt[4]{(2)^2-3} = \sqrt[4]{1} = 1$. Además, $u^2 = \left(\sqrt[4]{x^2-3}\right)^2 = \sqrt{x^2-3}$. **Todo lo hecho en este párrafo se denomina CAMBIO DE VARIABLE** (notar que el problema se podía resolver sin el cambio de variable, sólo que a veces puede ayudar a visualizar mejor alguna propiedad).

El cambio de variable se aplicará como sigue:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x^2-3}-1}{\sqrt{x^2-3}-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^2-1} = \lim_{u\to 1} \frac{\cancel{u-1}}{(u+1)\cancel{(u-1)}} = \lim_{u\to 1} \frac{1}{(u+1)} = \frac{1}{2}$$

Para d):

En este caso, el límite se puede resolver observando que $\sqrt[4]{x+80} = \left(\sqrt[8]{x+80}\right)^2$.

Al igual que en el ejercicio anterior, hacemos el cambio $\boxed{u = \sqrt[8]{x+80}}$. Vemos que si x tiende a 1, entonces u tiende a $\sqrt[8]{(1)+80} = \sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$. Además, $u^2 = \left(\sqrt[8]{x+80}\right)^2 = \sqrt[4]{x+80}$.

Aplicando el cambio de variable, se obtiene:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3}-\sqrt[8]{x+80}}{3-\sqrt[4]{x+80}} = \lim_{u\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}-u}{3-u^2} = \lim_{u\to\sqrt{3}} \frac{\cancel{\sqrt{3}-u}}{(\sqrt{3}+u)\cancel{(\sqrt{3}-u)}} = \lim_{u\to\sqrt{3}} \frac{1}{(\sqrt{3}+u)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(= \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad \square.$$

2. Estudiar la continuidad de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} |x-2|+3 & \text{si } x<0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x>2 \\ 2-x & \text{si } x<2 \end{cases}$$

Como $|x-2|$ aparece solo cuando $x<0$, se cumple que $x<2$; así, $|x-2| = 2-x$. Luego:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} 2-x+3 & \text{si } x<0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x<0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Con ello, debemos analizar la continuidad de f en tres casos:

$$\boxed{a<0} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 5-x = 5-a \ \wedge\ f(a) = 5-a \quad \longrightarrow \quad \boxed{f \text{ es continua en } [-\infty, 0[}$$

$$\boxed{a>0} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x+5 = a+5 \ \wedge\ f(a) = a+5 \quad \longrightarrow \quad \boxed{f \text{ es continua en }]0, +\infty[}$$

$$\boxed{a=0} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 5-x = 5 \ \wedge\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+5 = 5 \ \wedge\ f(0) = (0)+5$$

$$\longrightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5 \ \wedge\ f(0) = 5 \quad \longrightarrow \quad \boxed{f \text{ es continua en } 0}$$

Por lo tanto, vemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$ $\square$.

3. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1<x<3 \\ -2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **, determinar los valores de** $a \in \mathbb{R}$ **y** $b \in \mathbb{R}$ **para los que** f **es continua en todo** $\mathbb{R}$**.**

Solución: Sabemos que 2 es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que es continua en $]-\infty, -1[$; luego, f es continua en $]-\infty, -1[$. Además, se tiene que -2 es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que es continua en $]3, +\infty[$; luego, f es continua en $]3, +\infty[$. Por otra parte, f es continua en $]-1, 3[$, ya que si $-1<c<3$, se tiene que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} ax+b = a(c)+b$ y además $f(c) = a(c)+b$.

Luego, para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, solo falta verificar que sea continua en $x=-1$ y $x=3$:

$$\boxed{x=-1} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 2 = 2 \quad \wedge \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} ax+b = -a+b \quad \wedge \quad f(-1) = 2$$

Luego, la función será continua en $x=-1$ si $-a+b=2$.

$$\boxed{x=3} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b \quad \wedge \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} -2 = -2 \quad \wedge \quad f(3) = -2$$

Luego, la función será continua en $x=3$ si $3a+b=-2$. Resolviendo el Sistema de Ecuaciones (de la forma que prefiera), se obtiene que f será continua en $x=-1$ y $x=3$ (y, por consiguiente, en todo $\mathbb{R}$) si $a=-1$ y $b=1$ $\square$.