UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 13−A y 13−B

Derivadas y su Operatoria

más la resolución del Taller de Derivadas

Semana del Viernes 13 al Jueves 19 de Junio

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones por operatoria:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x}$

e) $f(x) = x^5(x + 1)^{19}$

f) $f(x) = (3 - x^2)(x + 11)^{12/5}$

g) $f(x) = \left(\sqrt{x^3 + 5}\right)^{5/2}$

Solución: **Para a):**

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2x - 5 + 0 \longrightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 + 4x - 5}$$

Para b):

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^3 + 8) - (x^2 - 4)(3x^2)}{(x^3 + 8)^2} = \frac{2x^4 + 16x - 3x^4 + 12x^2}{(x^3 + 8)^2} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-x^4 + 12x^2 + 16x}{(x^3 + 8)^2}}$$

Para c):

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2 - 4) - (x - 2)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2 - 4 - 2x^2 + 4x}{((x + 2)(x - 2))^2} = \frac{-x^2 + 4x - 4}{(x + 2)^2(x - 2)^2} = \frac{-\cancel{(x-2)^2}}{(x + 2)^2\cancel{(x - 2)^2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2}}$$

Para d):

$$f'(x) = \frac{((1/2)x^{-1/2})(x) - (\sqrt{x} - \sqrt{3})(1)}{x^2} = \frac{(1/2)x^{1/2} - \sqrt{x} + \sqrt{3}}{x^2} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-(1/2)\sqrt{x} + \sqrt{3}}{x^2}}$$

Para e):

$$f'(x) = (5x^4)(x+1)^{19} + (x^5)(19(x+1)^{18} \cdot 1) = x^4(x+1)^{18}(5(x+1) + 19x) \longrightarrow \boxed{f'(x) = x^4(x + 1)^{18}(24x + 5)}$$

Para f):

$$f'(x) = (-2x)(x+11)^{12/5} + (3-x^2)(\frac{12}{5}(x+11)^{7/5} \cdot 1) \longrightarrow \boxed{f'(x) = -2x(x + 11)^{12/5} + \frac{12}{5}(x + 11)^{7/5}(3 - x^2)}$$

Para g):

$$f'(x)=\frac{5}{2}(\sqrt{x^3+5})^{3/2}\cdot\frac{1}{2}(x^3+5)^{-1/2}\cdot 3x^2=\frac{15}{4}x^2\left((x^3+5)^{1/2}\right)^{3/2}(x^3+5)^{-1/2}=\frac{15}{4}x^2(x^3+5)^{3/4}(x^3+5)^{-1/2}$$

$$\longrightarrow\quad \boxed{f'(x)=\frac{15}{4}x^2(x^3+5)^{1/4}}\quad \square.$$

2. Calcular la derivada de $f(x)=\dfrac{2x^3+5+\frac{1}{2}x(3-x^2)}{\sqrt{x}}$

Solución: Para intentar simplificar el problema, pensemos en que f resulta ser el cuociente de dos funciones, $\boxed{g(x)=2x^3+5+\frac{1}{2}x(3-x^2)}$ y $\boxed{h(x)=\sqrt{x}}$. Con ello, se tiene:

- $g'(x)=6x^2+\dfrac{1}{2}(3-x^2)+\dfrac{1}{\cancel{2}}x(-\cancel{2}x)=(6x^2-x^2)+\dfrac{3-x^2}{2}=\dfrac{10x^2+3-x^2}{2}=\boxed{\dfrac{9x^2+3}{2}=g'(x)}$
- $\boxed{h'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}}$
- $g(x)=2x^3+5+\dfrac{x(3-x^2)}{2}=2x^3+5+\dfrac{3x-x^3}{2}=\dfrac{4x^3+10+3x-x^3}{2}=\boxed{\dfrac{3x^3+3x+10}{2}=g(x)}$

Luego, usamos la Regla del Cuociente para obtener:

$$f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{(h'(x))^2}=\frac{\left(\frac{9x^2-3}{2}\right)(\sqrt{x})-\left(\frac{3x^3+3x+10}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{9x^2\sqrt{x}-3\sqrt{x}}{2}-\frac{3x^3+3x+10}{4\sqrt{x}}}{x}$$

En este caso, seguir simplificando el resultado ya es opción personal $\square$.

Resolución del Taller:

Sean f y g dos funciones derivables, tales que $f(4)=8$, $f'(4)=7$ y $g'(8)=5$:

1. Decidir si es posible calcular la derivada de $g\circ f$ en $x=4$. De ser así, calcular dicha derivada y en caso contrario, justificar por qué no se puede.
2. Decidir si es posible calcular $\left(\sqrt{3+g(f(x))}\right)'$ para x=4. De ser posible, calcular dicha derivada y en caso contrario, justificar por qué no se puede.

Solución: **Para 1:**

Como f es derivable en $x=4$ y g es derivable en $f(4)=8$, entonces, por Regla de la Cadena, la función $g\circ f$ es derivable en $x=4$. Luego, su derivada vale:

$$\boxed{(g\circ f)'(4)=g'(f(4)\cdot f'(4)=g'(8)\cdot 7=5\cdot 7=35}$$

Para 2:

Supondremos por un momento que la función $\left(\sqrt{3+g(f(x))}\right)'$ es derivable. En ese caso, por Regla de la Cadena, su derivada debiera valer:

$$\left(\sqrt{3+g(f(4))}\right)'=\frac{1}{2}(3+g(f(4)\ )\ )^{-1/2}\cdot(0+g'(f(4))\cdot f'(4))=\frac{1}{2}(3+g(8)\ )^{-1/2}\cdot(g'(8)\cdot 7)=\frac{1}{2}(3+g(8)\ )^{-1/2}\cdot(5\cdot 7)$$

Sin embargo, el resultado final depende de $g(8)$, valor que no conocemos. Por lo tanto, con la información disponible, no es posible calcular la derivada de la función dada en $x=4$ $\square$.