EJERCICIOS OPERADORES

1 Anagüía 6

1.1

Se define

$$\varphi : \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{K}, \quad \varphi(a) := a_8.$$

- Muestre que φ es un funcional lineal y continuo.
- Encuentre un vector $b \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $\varphi(a) = \langle a, b \rangle$ para cada a .

1.2

En la demostración del Lema de Riesz, dónde hemos utilizado la completitud del espacio de Hilbert?

1.3

Sea $\mathcal{H} := \ell^2(\{1, 2, 3, \dots\})$.

- Si $a \in \mathcal{H}$, el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es ≥ 1 .
- Si $|\lambda| < 1$ se define $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n$. Encuentre un vector $c \in \mathcal{H}$ tal que $\varphi(\cdot) = \langle \cdot, c \rangle$.
- Calcule la norma de φ .
- Si $|\lambda| < 1$ se define $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\psi(a) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \lambda^{n-1}$. Encuentre un vector $d \in \mathcal{H}$ tal que $\psi(\cdot) = \langle \cdot, d \rangle$.

1.4

Si $S \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ se tiene

$$\|S\| = \sup_{\|f\|=1, \|g\|=1} |\langle f, Sg \rangle|.$$

1.5

Se tiene $(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $S, T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$.

1.6

Si $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ se tiene $(T^*)^* = T$.

1.7

Calcule $\operatorname{Re}(S+T)$, $\operatorname{Im}(S-T)$, $\operatorname{Re}(T^*)$, $\operatorname{Im}(T^*)$, $\operatorname{Re}(ST)$, $\operatorname{Re}(T^*T)$, $\operatorname{Im}(T^*T)$.

1.8

Encuentre muchos ejemplos de operadores T tal que $\operatorname{Re} T$ y $\operatorname{Im} T$ no conmuten.

1.9

Se define el producto de Jordan

$$\bullet : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \times \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}), \quad A \bullet B := \frac{1}{2}(AB + BA).$$

- Es $\bullet$ asociativo?
- Es $\bullet$ conmutativo?
- Es $\bullet$ bilineal?
- Calcule $(A \bullet B)^*$.
- Muestre que si A, B son autoadjuntos $A \bullet B$ es autoadjunto.

1.10

Supongamos que un operador $T \in \mathbb{B}(\mathbb{K}^n)$ está dado por una matriz $(t_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$.
Qué tipo de condiciones debe cumplir la matriz para que T sea autoadjunto?

1.11

Calcule el adjunto de un operador integral.

1.12

Sean $e_1, \dots, e_N$ y $e'_1, \dots, e'_N$ dos familias finitas de vectores del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se define

$$T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad T(f) := \langle f, e_1 \rangle e'_1 + \dots + \langle f, e_N \rangle e'_N.$$

Calcule el adjunto de T .

1.13

Sea P el operador de proyección sobre el subespacio cerrado M . Calcule su adjunto.

1.14

Sea $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un isomorfismo. Calcule U^* .

1.15

Supongamos que $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ es invertible. Cuanto vale $(A^{-1})^*$?

1.16

Sea el shift unilateral

$$S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad (Sa)_n := a_{n+1}.$$

Calcule $S^*, S^m, (S^m)^*$ ($m \in \mathbb{N}$).

1.17

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. El operador $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ se llama *normal* si $AA^* = A^*A$. Son equivalentes:

- A es normal,
- los operadores $\operatorname{Re} A$ y $\operatorname{Im} A$ conmuten,
- se tiene $\|Af\| = \|A^*f\|$ para cada $f \in \mathcal{H}$.