Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Ayudantía
Termodinámica

20 de Noviembre del 2016

Profesor: Patricio Fuentealba.
Ayudante: Jaime Clark.

Problema 1

Dos sistemas particulares (denotados por (1) y (2)) poseen las siguientes ecuaciones de estado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^1} &= \frac{3R}{2}\frac{N^1}{U^1}, \\ \frac{1}{T^2} &= \frac{5R}{2}\frac{N^2}{U^2}, \end{aligned}$$

en donde R es la constante de los gases. Existen 2 moles en el primer sistema y 3 en el segundo. Estos dos sistemas son separados por una pared diatérmica y en conjunto poseen una energía $U = U^1 + U^2 = 2{,}5\text{x}10^3$ J. ¿Cuál es la energía interna de cada sistema al alcanzar el equilibrio?

Al ser separados por una pared diatérmica, sólo existe un flujo de calor entre un sistema y otro hasta que se alcanza el equilibrio termodinámico. Supongamos que la pared es rígida e impermeable (esto significa que no hay cambio en los volumenes del sistema y tampoco hay intercambio de partículas). Tal como ya ha sido explicado, los parámetros extensivos maximizan la entropía, por lo tanto, en equilibrio una variación de la energía no puede provocar cambios en la entropía, o sea se debe cumplir que $dS = 0$, al ser la entropía extensiva podemos escribirla como

$$dS = dS^1 + dS^2,$$

o dicho de otro modo

$$dS = \left(\frac{\partial S^1}{\partial U^1}\right)_{V^1,N^1} dU^1 + \left(\frac{\partial S^2}{\partial U^2}\right)_{V^2,N^2} dU^2 = 0,$$

Notemos que podemos reescribir la ecuación anterior en base a las temperaturas del sistema, a saber

$$dS = \frac{1}{T^1}dU^1 + \frac{1}{T^2}dU^2 = 0. \tag{1}$$

Ahora, para la condición del sistema en equilibrio, la energía NETA del sistema debe permanecer constante, esto significa que $U^1 + U^2 = cte$, por lo tanto

$$dU^1 = -dU^2,$$

de esta manera la ecuación (1) queda

$$dS = \left(\frac{1}{T^1} - \frac{1}{T^2}\right) dU^1$$

,
de acá se obtiene algo que era bastante intuitivo, que la condición de equilibrio viene dada por $T^1 = T^2$. A partir de esto, y sabiendo que $N^1 = 2$ y $N^2 = 3$, obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{3R}{U^1} &= \frac{15R}{2U^2}, \\ U^2 &= \frac{5U^1}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

A partir de (2) y la información que nos dan de la suma de las energías, obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incognitas, por lo tanto al reemplazar todo, obtenemos los valores de las respectivas energías.

Problema 2

Tres cilindros son conectados por pistones como muestra la figura abajo. La razón entre sus areas transversales es $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 3$. Los pistones se conectan tales que sus desplzamientos son iguales. Las paredes de los cilindros son diatérmicas y están conectadas por una barra conductora de calor. Si el sistema está aislado, encuentre la raźon entre las presiones del sistema en equilibrio.

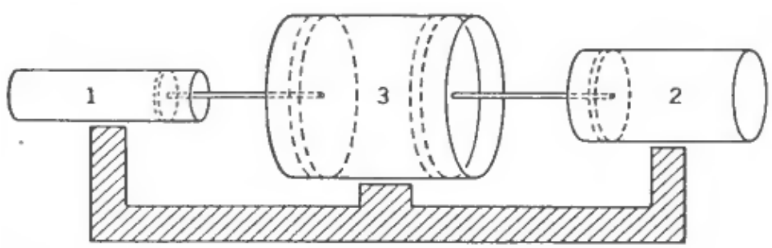

Figura 1: Esquema de 3 cilindros conectados por pistones.

Este problema es sencillo si se entiendio la idea del problema 1, ya que es trabajar con la condición de equilibrio para la entropia, esta vez considerando que hay contribución mecánica en el problema. Si son cuidadoso con como plantean la ecuación, usando las relaciones termodinámicas que se pueden obtener de $S = S(E, V, N)$, deben llegar a

$$dS = \frac{1}{T^1}dU^1 + \frac{1}{T^2}dU^2 + \frac{1}{T^3}dU^3 + \frac{P^1}{T^1}dV^1 + \frac{P^2}{T^2}dV^2 + \frac{P^3}{T^3}dV^3 = 0, \tag{3}$$

nuevamente, como la energía neta se debe conservar, se deduce que

$$dU^1 + dU^2 + dU^3 = 0,$$

luego (3) queda

$$dS = \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^1}\right) dU^2 + \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T^1}\right) dU^3 + \frac{P^1}{T^1}dV^1 + \frac{P^2}{T^2}dV^2 + \frac{P^3}{T^3}dV^3 = 0. \tag{4}$$

Ahora notemos que los volumenes tampoco son independientes, luego si consideramos el largo del sistema como L y x_i con $i = 1, 2, 3, 4$ como las variaciones de las posiciones de cada pistón (noten que el cilindro 2, tiene dos pistones, por eso que el índice i llega hasta 4), entonces las variaciones de cada volumen serán

$$
\begin{aligned}
dV^1 &= A_1 x_1, \\
dV^3 &= A_3 dx_3 - A_3 dx_2, \\
dV^2 &= -A_2 dx_4,
\end{aligned}
$$

noten que al ser pistones rígidos, o sea se desplazan lo mismo, entonces el pistón x_1 se desplaza lo mismo que x_2, de igual manera ocurre con x_3 y x_4, de manera tal que tenemos

$$
\begin{aligned}
dV^1 &= A_1 x_1, \\
dV^3 &= \frac{A_3}{A_2}(-dV^2) - \frac{A_3}{A_1} dV^1, \\
dV^2 &= -A_2 dx_3,
\end{aligned}
$$

al reemplazar todo en (5) se obtiene

$$
dS = \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^1}\right) dU^2 + \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T^1}\right) dU^3 + \left(\frac{P^1}{T^1} - \frac{3P^3}{T^3}\right) dV^1 + \left(\frac{P^2}{T^2} - \frac{3P^3}{2T^3}\right) dV^2 = 0. \quad (5)
$$

Finalmente como cada variación debe ser independiente entre si, cada coeficiente debe ser cero por separado para que se cumpla que $dS = 0$, lo que implica que

$$
T^1 = T^2 = T^3,
$$

y

$$
\begin{aligned}
P^1 &= 3P^3, \\
2P^2 &= 3P^3,
\end{aligned}
$$