

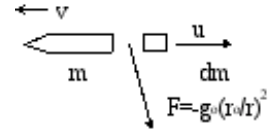
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Electrodinámica: Tarea N° 4

Profesor: Alejandro Valdivia

Ayudante: Rafael Medina

1. Considere desde el punto de vista del centro de masa que pasa cuando un cohete acelera bajo la fuerza de gravedad. El cohete al acelerar envía masa dm a velocidad \mathbf{u} (en cierta dirección) como se observa en la Fig.
 - a) Use el principio del centro de masa para encontrar la ecuación de movimiento bajo la fuerza externa? (hay un termino proporcional dm/dt). Ayuda: use diferenciales y tome el limite $dm \rightarrow 0$
 - b) asuma que nuestro cohete convierte con 100% de eficiencia la masa en energía. Asumiendo una aceleración de g . Cuanta masa se necesita para llegar a la estrella mas cercana.
 - c) Compare este gasto con el gasto necesario para superar la fuerza de gravedad de la tierra, y el sol.



2. Ecuación de movimiento para el problema de Kepler ($n=1$)

- a) Definamos el vector de Laplace-Runge-Lenz

$$A = p \times L - mk \frac{r}{|r|}$$

- 1) Pruebe que es una constante de movimiento.
- 2) Además $A \cdot L = 0$
- 3) Pruebe que $A \cdot r = Ar \cos \theta = p_\theta^2 - mkr$. Use estas relación para encontrar otra derivación de la ecuación para r . Que valor tiene A ?
- 4) Escriba A en termino de la energía E y p_θ .

3. Supongamos que tenemos una densidad de partículas en el campo gravitatorio $\rho(r)$. Demuestre que podemos definir el campo gravitacional a través del teorema de Gauss

$$\nabla \cdot g = 4\pi G\rho$$

- a) El polvo en el sistema solar se puede modelar como una densidad uniforme. Demuestre que esto corresponde a una fuerza $F = -mCr$.
- b) Agregue esta fuerza a la producida por el sol y encuentre las orbitas circulares
- c) Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones y muestre que se puede aproximar como una elipse que precesa. Encuentre la frecuencia de precesión
4. Asuma el potencial (este es el potencial, reducido por los electrones en orbitas internas, que ven los electrones de las orbitas exteriores ... screened potential)

$$U(r) = -k \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

- a) Cuales son las posibles trayectorias (en termino de E y p_θ)
- b) Cuando son órbitas circulares posibles?
- c) Encuentre el periodo de pequeñas oscilaciones cercanas a estas órbitas circulares.
- d) Las orbitas son en general cerradas?
- e) Compruebe numéricamente lo dicho hasta ahora.
5. Tome el potencial $U(r) = \begin{cases} 0 & \rightarrow r > a \\ -V_o & \rightarrow r \leq a \end{cases}$
- a) Encuentre una expresión para el ángulo de escatering.
- b) Demuestre que este resultado es idéntico con la refracción de ondas electromagnéticas por una esfera de radio a y con índice de refracción

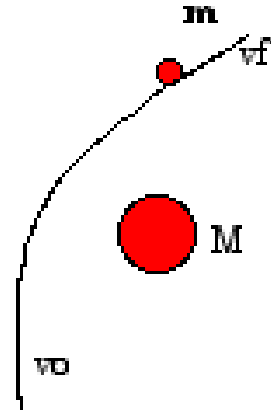
$$n = \sqrt{\frac{E + V_o}{E}}$$

- c) Encuentre el área eficaz diferencial? Como se calcularía el área eficaz total?

6. Problema del impulso planetario a un satélite. Tomemos un planeta de masa M que se mueve en línea recta a velocidad V_o (en x) en el sistema de coordenadas del laboratorio. El satélite de masa $m \ll M$ se mueve bajo la fuerza de gravedad del planeta. (a) Que pasa con

$$\frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 + U(\vec{r}, t).$$

Explique? (b) Escriba la transformación al sistema inercial que se mueve inicialmente con el planeta, encuentre las ecuaciones de movimiento. Cuál es relación de conservación de energía en este sistema? (c) Utilice esta relación en $r \rightarrow \infty$ en este sistema y re-escriba en termino de variables del sistema del laboratorio para probar que el satélite puede ganar energía cinética luego de un encuentro con un planeta (también la puede perder). (d) Cuanto es el máximo de energía cinética que el satélite puede ganar? (e) Si puede ganar energía, de donde sale?



item Un planeta de masa m se mueve en una órbita circular alrededor de una estrella de masa M_0 . En cierto instante, la estrella explota, eyectando parte de su superficie a una velocidad mucho mayor que la del movimiento del planeta, de modo que esta pérdida de masa puede ser considerada espontánea. El remanente de la estrella tiene masa $M \gg m$. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del planeta luego de la explosión? ¿Qué tipo de órbitas se obtienen para distintos valores de M ?

Para el caso en que la nueva órbita sea elíptica, evalúe la razón en el cambio del período de la órbita.

7. Considere un problema de dos cuerpos que se puede describir en termino de un potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

Encuentre la ecuación que describe las orbitas de escatering $\theta(r)$. Para un momento angular $p_\theta^2 > 2\mu\alpha$ encuentre la condición para la cual la partícula realiza n revoluciones con respecto al origen. Demuestre que es independiente de $E > 0$.

8. Un modelo de interacción nuclear es el potencial de Yukahua

$$U = A \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

Considere la colisión de dos partículas iguales. Calcule la sección eficaz diferencial $\sigma(\theta, E)$ en el sistema relativo de la colisión y en el sistema del laboratorio. Calcule la sección eficaz total.

9. Escatering caótico. Asumamos un potencial

$$V(x, y) = x^2 y^2 e^{-(x^2 + y^2)}$$

Calcule el tiempo de escatering y el ángulo de escatering, dependiendo de la energía y el (o los) parametros de impacto.

10. Considere un átomo compuesto de un electrón relativista que se mueve en el campo electrostático de un ion pesado de carga Ze que esta en el origen. Veremos que hay un valor critico de Z_c tal que no existe una solución estable para $Z > Z_c$ lo que hace que la tabla periódica sea finita en Z (118 hasta hoy). Demuestre que el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}$$

genera la ecuación de movimiento apropiada para la partícula libre con el momento $\vec{p} \rightarrow m\gamma\vec{v}$ y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}}$$

Construya el Lagrangiano total que incluye la interacción electrostática. Encuentre el Hamiltoniano y determine si es constante. Encuentre la trayectoria. Tenemos orbitas periódica? Cerradas? A diferencia del caso no-relativista, hay condiciones para la cual el electrón puede chocar con el ion. Cual es la condición? Que restriccion podria esta relacion imponer en la carga maxima que puede tener un nucleo relativista?