Ejercicios

Síntesis

El conjunto de Cantor, K, tiene interior vacío, no es numerable y tiene medida nula

Ejericio 2

Demuestre que el interior de K es vacío

Previo: En C_n, los intervalos (cerrados) tienen largo $\frac{1}{3^n}$.

IDEA:

1. Por contradicción: Se asume que el interior es no vacío; esto implicará que un C_{n_0} contiene un intervalo demasiado grande

SOLUCIÓN

* Construimos un intervalo de largo 2ϵ dentro de K

Supongamos que $intK \neq \emptyset$ y sea $x \in intK$. Así, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq K$.

Note que el intervalo anterior tiene largo 2ϵ.

* Vemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que este intervalo no cabe en C_{n_0}

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < 2\epsilon$. Así, obtenemos la siguiente contradicción:

$$B(x,\epsilon) \subseteq K \subseteq C_{n_0}$$

Ejericio 3

Sea M un espacio métrico no vacío y completo tal que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, donde cada P_n es cerrado. Muestre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $intP_{n_0} \neq \emptyset$

Recuerdo (Teorema de Baire): Sea M un espacio métrico completo. Sea $F \subseteq M$ con $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde cada F_n es cerrado y tiene interior vacío. Entonces

$$intF = \emptyset$$

IDEA:

Por contradicción via teorema de Baire: sólo basta notar que M, al ser abierto, es igual a su interior.

Ejericio 4

Sea M un espacio métrico completo tal que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con cada F_n cerrado. Muestre que el conjunto

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} int(F_n)$$

es un abierto denso en M.

IDEA:

0. Notar que A es abierto al ser unión de abiertos.

1. Para demostrar que A es denso, se muestra que para todo U abierto de M, $U\bigcap A\neq\emptyset$. Para mostrar lo anterior, veremos que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $U\bigcap intF_{n_0}\neq\emptyset$. Para eso, mostraremos que $int\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\neq\emptyset$.

En efecto, como M es completo, el abierto U de M es homeomorfo a un espacio métrico completo (Ver Lima), digamos $U\overset{\varphi}{\cong}V$. La idea, ahora, es mostrar que $int\varphi\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\neq\emptyset$ y, como φ es homeo, esto implicará que $int\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\neq\emptyset$ (En efecto, como φ es homeo, $\varphi^*\left(int\varphi\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\right)\subseteq\varphi^*\left(\varphi\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\right)\subseteq U\bigcap F_{n_0}$. Además, $\varphi^*\left(int\varphi\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\right)$ es abierto, luego $\varphi^*\left(int\varphi\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\right)\subseteq int\left(U\bigcap F_{n_0}\right)$)

En efecto: Note que $U=U\bigcap M=U\bigcap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(U\bigcap F_n\right)$. Note que para cada n, $U\bigcap F_n$ es cerrado en U.

Ahora, se tiene que $V=\varphi(U)=\varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(U\bigcap F_n\right)\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\varphi\left(U\bigcap F_n\right)$. Es decir, escribimos V (un esp métrico completo) como unión de cerrados, luego uno de ellos debe tener interior no vacío, es decir, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$int\varphi\left(U\bigcap F_{n_0}\right)\neq\emptyset$$

con eso se concluye.

Ejericio 5

Sea M un espacio métrico completo y numerable. Muestre que su subconjunto de puntos aislados es denso.

Solución

Idea:

Sea $N=\{x\in M: x\,\text{es aislado}\}$. Veremos que N se escribe como unión numerable de interiores de cerrados que cubren a M (y por el ejercicio anterior, será denso)

Primero, note que como M es numerable, entonces $M=\bigcup_{a_i\in M}\{a_i\}$ (M es unión numerable de cerrados).

Considere $A=\bigcup_{a_i\in M}int\{a_i\}$. Veremos que $A=N$. Note que $int\{a_i\}=\emptyset$ a menos que a_i sea punto aislado. Así,

$$A=\bigcup_{a_i\in N}int\{a_i\}=N$$

Se concluye que N es denso en M.

Ejericio 6

Definición previa: Defina $F'=\left\{\lim_{n\to\infty}y_n : y_n\in F,\,\text{sucesión}\right\}$

Sea $F\subseteq\mathbb{R}$. Muestre que si $F=F'$, entonces F es no numerable

Solución

Idea:

Se demuestra por contradicción

1. Primero se muestra que F es completo: para eso, se muestra que toda sucesión de Cauchy en F tiene un límite en F

2. Se supone que F es numerable. Con lo anterior, se obtienen las hipótesis del problema 5, es decir, que el conjunto de puntos aislados de F es denso en F. Esto contradice que todo punto de F es límite de una sucesión propia.

Veamos:

1. Sea $(a_n) \subseteq F$ sucesión de Cauchy propia. Como $F = F'$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \in F' = F$. (Note que ese límite existe en $\mathbb{R}$, a priori). Así, F es completo: toda suc. de Cauchy tiene el límite en él.

Ahora, 2. Si F fuese numerable, entonces su conjunto de puntos aislados sería denso. Pero como F no tiene puntos aislados (cada punto de F es límite de una sucesión), entonces F no puede ser numerable.

Ejercicio 7

Demostrar que K es no numerable

Idea

Basta demostrar que todo elemento del conjunto de Cantor es límite de una sucesión propia (por el problema 6)

1. Se muestra que los puntos extremos de intervalos retirados (spg, los extremos superiores) son límites de una sucesión de puntos en K.

2. Se muestra lo mismo para puntos que no son extremos.

Veamos:

1. Sea $x \in K$ punto extremo superior de un intervalo retirado: digamos que (α, x) fue retirado en la construcción de C_k, para algún k. Sea $\beta_1 \in [0,1]$ tal que $[x, \beta_1] \in C_k$ (β_1 q sea el extremo derecho del trozito que empieza en x). Análogamente, se defínase β_2 como el extremo derecho de trozito al formar C_{k+1}. Así, se obtiene una sucesión de puntos en K que converge a x.

2. Si x no es extremo de un intervalo retirado: entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existen a_n, b_n tales que $x \in (a_n, b_n) \subseteq [a_n, b_n] \subseteq C_n$. Como $(a_n - b_n) = \dfrac{1}{3^n}$ y $a_n < x < b_n$, obtenemos dos sucesiones propias que convergen a x.

Se concluye que K no es numerable.