Ayudantía 5.10

October 8, 2018

Ejercicio 0

Demuestre que K es separable (tiene un denso numerable)

Solución

Sea $E = \{$extremos de los intervalos retirados para construir $K\}$

Note que, claramente, E es numerable.

Para ver que es denso, veremos que dado $x \in K$ y ϵ positivo, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \bigcap E \neq \emptyset$

Supondremos que ϵ es menor que $1/2$ (de otro modo, es fácil).

En tal caso, $(x-\epsilon, x]$ ó $[x, x+\epsilon)$ están contenidos en $[0,1]$. SPG, supondremos el segundo caso:

Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{3^{n_0}} < \epsilon$. Por lo tanto en la construcción de C_{n_0}, $[x, x+\epsilon) \supset$(trozito que contiene a x) y, por lo tanto, contiene un punto de E (El extremo derecho de ese trozito). Así, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \bigcap E \neq \emptyset$ y se concluye.

Ejercicio 1

Todo numerable tiene medida externa nula

Idea

Encontraremos un cubrimiento del conjunto numerable tal que su medida sea tan pequeña como se quiera.

Solución

Sea $N = \{x_i \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable. Sea $\epsilon > 0$. Defina

$$I_i = \left(x_i - \epsilon \cdot 2^{-(i+1)}, x_i + \epsilon \cdot 2^{-(i+1)}\right)$$

Note que $l\left(I_i\right) = 2^{-i} \cdot \epsilon$. Además, se tiene que $m^* N \leq \sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right) = \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^i = \epsilon$.

Por lo tanto, $m * N = 0$

Corolario: La medida de $\mathbb{Q}$ es cero; El intervalo $[0,1]$ no es numerable.

Ejercicio 2

Muestre que si $m * A = 0$, entonces $m * (A \bigcup B) = m * B$ y $m * (A \bigcap B) = 0$

Solución

Para el primero: Note que $B \subseteq A \bigcup B$. Por monotonía,

$$m * B \leq m * \left(A \bigcup B\right)$$

Por otro lado, por la subaditividad

$$m*\left(A\bigcup B\right)\leq m*A+m*B=m*B$$

Luego

$$m*\left(A\bigcup B\right)=m*B$$

Para el segundo: Note que $A\bigcap B\subseteq A$, luego por monotonía

$$m*\left(A\bigcap B\right)\leq m*A=0$$

Luego $m*(A\bigcap B)=0$

Ejercicio 3

Muestre que si $m*A=0$ entonces A^c es denso en $\mathbb{R}$.

Idea

Para ver que A^c es denso en $\mathbb{R}$ veremos que toda bola intersecta con A^c de manera no trivial. Por contradicción.

Solución

Suponga que $\exists x\in\mathbb{R}$ y $\exists\epsilon>0$ tal que $B\left(x,\epsilon\right)\bigcap A^c=\emptyset$. En tal caso, $B\left(x,\epsilon\right)\subseteq A$, luego

$$m*\left(B\left(x,\epsilon\right)\right)\leq m*A=0$$

Es decir,

$$2\epsilon\leq 0$$

Ejercicio 4

Demuestre que la medida externa es invariante bajo traslaciones

Idea

Notación: $A+y=\{a+y\mid a\in A\}$

Mostraremos que $m*(A+y)\leq m*A\leq m*(A+y)$. Usaremos un cubrimiento de A para obtener uno de $A+y$

Solución

Dado $\epsilon>0$, existe intervalos I_i tales que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}I_i\supseteq A$ y como $m*A$ es un ínfimo,

$$\sum_{\mathbb{N}}l\left(I_i\right)\leq m*A+\epsilon$$

Defina $I_i^{'}=I_i+y$. Note que $l\left(I_i^{'}\right)=l\left(I_i\right)$ y que $\bigcup\limits_{\mathbb{N}}I_i\supseteq A+y$. Luego

$$m*\left(A+y\right)\leq\sum_{\mathbb{N}}l\left(I_i'\right)=\sum_{\mathbb{N}}l\left(I_i\right)\leq m*A+\epsilon$$

De donde

$$m*\left(A+y\right)\leq m*A$$

Análogamente, podemos partir del conjunto $A+y$ y restar y para obtener A, de donde

$$m*A=m*\left(A+y\right)$$

Ejercicio 5

Sea $A = \mathbb{Q} \bigcap [0,1]$. Muestre que si A está cubierto por una cantidad finita de intervalos I_i, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} l\left(I_i\right) \geq 1$$

Idea

A partir de un cubrimiento de A, encontrarmos uno para $\overline{A} = [0,1]$

Solución

Primero, note que $m * \overline{A} = 1$

Suponga que $A \subseteq \bigcup^{n} I_i$. Luego, $\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup^{n} I_i}$. Como la cantidad de intervalos es finita, se tiene que

$$\overline{\bigcup^{n} I_i} \subseteq \bigcup^{n} \overline{I_i}$$

(Ver contraejemplo abajo: cuando la cantidad de intervalos es infinita no es cierto.)

Así, $\overline{A} \subseteq \bigcup^{n} \overline{I}_i$. Así,

$$1 = m * A \leq m * \left(\bigcup^{n} \overline{I_i} \right) \leq \sum^{n} l\left(\overline{I_i}\right) = \sum^{n} l\left(I_i\right)$$

Contraejemplo

Sea $I_i = \left(-1 + \frac{1}{2i}, 1 - \frac{1}{2i}\right)$. Se tiene que $1 \in \overline{\bigcup_{\mathbb{N}} I_i}$ pero $1 \notin \bigcup_{\mathbb{N}} \overline{I}_i$.

Ejercicio 6

Muestre que el conjunto de Cantor tiene medida nula

Solución

Previo

Sea $F_0 = \{1\}$, $F_j = \{3s-2, 3s\}$, donde $s \in F_{j-1}$ y $j = 1, 2, \ldots$. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} F_1 &= \{1,3\} \\ F_2 &= \{1,3,7,9\} \end{aligned}$$

Consideremos la construcción del conjunto de Cantor. Llamemos $E_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (tercio del medio). Así,

$$C_1 = [0,1] \setminus E_1$$

Sean $E_2^1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $E_2^2 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ (tercios del medio de los trozitos de C_1). Así,

$$C_2 = C_1 \setminus \left(E_2^1 \bigcup E_2^2\right)$$

En general, se define $E_n^j = \left(\frac{3s_j - 2}{3^n}, \frac{3s_j - 1}{3^n}\right)$, para $s_j \in F_{n-1}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ y $n = 1, 2, \ldots$. y llamemos

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} E_n^j$$

De aquí, note que $m(E_n) = 2^{n-1} \cdot \dfrac{1}{3^n}$, pues cada E_n^j tiene medida $\dfrac{1}{3^n}$ y en E_n hay 2^{n-1} intervalos.

Así, el conjunto de Cantor es

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

IDEA

0) Verificar que es medible.

1) Escribiremos $K = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ y usaremos el hecho de que la medida de la resta es la resta de las medidas

SOLUCIÓN

0) En efecto, se ve que cada C_k es medible al ser unión finita de medibles. y luego C será medible al ser intersección numerable de medibles

1) Se tiene que $K = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$, luego

$$\begin{aligned} mK &= m\left([0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \\ &= m([0,1]) - m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \end{aligned}$$

Note que esto es cierto pues $m\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) < \infty$. Así,

$$\begin{aligned} m(C) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Considere $E \subseteq [0,1]$. Defínase, en E, la relación de equivalencia

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

Denótese por C_E al conjunto formado al tomar sólo un elemento de cada clase. Muestre que C_E es no medible. La idea es usar el siguiente lema:

Lema: Sea E un conjunto acotado y medible de números reales. Suponga que existe un conjunto de reales Λ tal que

$i)$ Λ es acotado

$ii)$ Λ es infinito numerable

$iii)$ La colección $\{\lambda + E\}_{\lambda \in \Lambda}$ es disjunto

Entonces se tiene que $m\left(E\right)=0$

Demostración

Por contradicción: suponga que $mE>0$.

Por la aditividad numerable,

$$m\left[\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\lambda+E\right)\right)\right]=\sum_{\lambda\in\Lambda}m\left(\lambda+E\right)$$

Note que como E y Λ son acotados, entonces el conjunto $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\lambda+E\right)$ es acotado, de donde el lado izquierdo de arriba es finito. Ahora, recuerde que $m\left(\lambda+E\right)=m\left(E\right)>0$. Pero, como Λ es infinito numerable, pero el lado derecho debe ser finito, entonces $mE=0$

OBs: Que la diferencia entre dos puntos en C_E no sea racional se puede escribir como: para cualquier conjunto $\Lambda\subseteq\mathbb{Q}$, $\left\{\lambda+C_E\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ es disjunta.