Ayudantía 9.10

October 9, 2018

Ejercicio 1 (Conjunto no medible)

Considere $E \subseteq [0,1]$. Defínase, en E, la relación de equivalencia

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

Denótese por C_E al conjunto formado al tomar sólo un elemento de cada clase. Muestre que C_E es no medible. La idea es usar el siguiente lema:

Lema: Sea E un conjunto acotado y medible de números reales. Suponga que existe un conjunto de reales Λ tal que

$i)$ Λ es acotado

$ii)$ Λ es infinito numerable

$iii)$ La colección $\{\lambda + E\}_{\lambda \in \Lambda}$ es disjunto

Entonces se tiene que $m(E) = 0$

Demostración

Por contradicción: suponga que $mE > 0$.

Por la aditividad numerable,

$$m\left[\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + E)\right)\right] = \sum_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda + E)$$

Note que como E y Λ son acotados, entonces el conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + E)$ es acotado, de donde el lado izquierdo de arriba es finito. Ahora, recuerde que $m(\lambda + E) = m(E) > 0$. Pero, como Λ es infinito numerable, pero el lado derecho debe ser finito, entonces $mE = 0$

OBS: Que la diferencia entre dos puntos en C_E no sea racional se puede escribir como: para cualquier conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}$, $\{\lambda + C_E\}_{\lambda \in \Lambda}$ es disjunta.

Ejercicio 2

Muestre que si $m * A = 0$, entonces $m * (A \bigcup B) = m * B$ y $m * (A \bigcap B) = 0$

Solución

Para el primero: Note que $B \subseteq A \bigcup B$. Por monotonía,

$$m * B \leq m * \left(A \bigcup B\right)$$

Por otro lado, por la subaditividad

$$m * \left(A \bigcup B\right) \leq m * A + m * B = m * B$$

Luego

$$m*\left(A\bigcup B\right)=m*B$$

Para el segundo: Note que $A\bigcap B\subseteq A$, luego por monotonía

$$m*\left(A\bigcap B\right)\leq m*A=0$$

Luego $m*(A\bigcap B)=0$

Ejercicio 3

Demuestre que la medida externa es invariante bajo traslaciones

Idea

Notación: $A+y=\{a+y\mid a\in A\}$

Mostraremos que $m*(A+y)\leq m*A\leq m*(A+y)$. Usaremos un cubrimiento de A para obtener uno de $A+y$

Solución

Dado $\epsilon>0$, existe intervalos I_i tales que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}I_i\supseteq A$ y como $m*A$ es un ínfimo,

$$\sum_{\mathbb{N}}l\left(I_i\right)\leq m*A+\epsilon$$

Defina $I_i^{'}=I_i+y$. Note que $l\left(I_i^{'}\right)=l\left(I_i\right)$ y que $\bigcup\limits_{\mathbb{N}}I_i\supseteq A+y$. Luego

$$m*(A+y)\leq\sum_{\mathbb{N}}l\left(I_i'\right)=\sum_{\mathbb{N}}l\left(I_i\right)\leq m*A+\epsilon$$

De donde

$$m*(A+y)\leq m*A$$

Análogamente, podemos partir del conjunto $A+y$ y restar y para obtener A, de donde

$$m*A=m*(A+y)$$

Funciones Medibles

Ejercicio 4

Sea $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, con E medible. Muestre que f es medible sss para cada abierto $\mathcal{O}$, el conjunto $f^*\left(\mathcal{O}\right)$ es medible.

Solución

$\Longleftarrow:$ En este caso, se tiene que para cada $c\in\mathbb{R}$, $f^*\left(c,\infty\right)$ es medible, luego f es medible.

$\Longrightarrow:$ Sea $\mathcal{O}$ abierto. Podemos escribir $\mathcal{O}$ como unión numerable de intervalos abiertos y acotados $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ donde cada I_k se puede expresar como $B_k\bigcap A_k$, con $B_k=(-\infty,b_k)$ y $A_k=(a_k,\infty)$ (se deja como ejercicio). Ahora, como f es medible, entonces para cada k, $f^*\left(B_k\right)$ y $f^*\left(A_k\right)$ son medibles. Como el conjunto de medible forma una $\sigma-$álgebra, entonces $f^*\left(\mathcal{O}\right)$ es medible, pues

$$f^*\left(\mathcal{O}\right)=f^*\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\bigcap A_k\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^*\left(B_k\right)\bigcap f^*\left(A_k\right)$$

Ejercicio 5

Recuerde que si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ es medible.

Muestre que el recíproco no es cierto.

Idea

Solución

Sea P un no medible en $[0,1]$. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \chi_P(x) - x \cdot \chi_{P^c}(x)$. Note que f es inyectiva, luego $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \beta,\ f^*(\alpha) = \{\beta\}$, es decir, se cumple que $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ es medible. Pero $f^*(\mathbb{R}^+) = P$, que no es medible y luego f no es medible (Por el ejercicio anterior)

Ejercicio 6

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un denso. Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\forall \alpha \in D, \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ es medible. Muestre que f es medible

Idea

Mostraremos que para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$ es medible. Para eso, tomaremos una sucesión de puntos de D que convergan al punto a

Solución

Sea $a \in \mathbb{R}$. Como D es denso en $\mathbb{R}$, existe una sucesión creciente (α_n) tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = a$.

Denótese por $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha_n\}$. Veamos que cada E_n es medible y que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$.

En efecto, como f es medible, cada E_n es medible. Ahora, note que como (α_n) es creciente, entonces $E_{n+1} \subseteq E_n$. Así, $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, f(x) > \alpha_n \iff f(x) \geq a$. Así,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}.$$

y se concluye.

Ejercicio 7

Sean f, g funciones medibles en E que son finitas ctp. Muestre que $f + g$ es medible.

Solución

Sea $x \in E$. Note que $f(x) + g(x) < c \iff f(x) < c - g(x) \iff \exists q \in \mathbb{Q} : f(x) < q < c - g(x)$. Luego

$$\{x \in E \mid f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \in E \mid g(x) < c - q\} \bigcap \{x \in E \mid f(x) < q\} \Big)$$

Así, $\{x \in E \mid f(x) + g(x) < c\}$ es medible. Por lo tanto, $f + g$ es medible.