# Ayudantía viernes 12 de oct

October 11, 2018

Ejercicio 1

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $E$ medible. Muestre que si $f$ es mon´otona entonces es medible.

Idea

SPG, supondremos que $f$ es creciente. Para $a \in \mathbb{R}$, consideramos el conjunto $A := \{x \in E \mid f(x) < a\}$ y veremos que es medible.

Soluci´on

Caso 1: $A$ es no vacío y acotado superiormente

Caso 2: $A$ es no vacío y no acotado superiormente

Caso 3: $A$ es vacío (En este caso, $A$ es trivialmente medible)

Caso 1:

Sea $\alpha := supA$. Hay dos posibilidades

$i)$ $\alpha \in A$. Veremos que $A = (-\infty, \alpha] \bigcap E$ (medible)

En efecto, si $x \in (-\infty, \alpha] \bigcap E$, entonces $x \leq \alpha$ y $x \in E$. Como $f$ es creciente,

$$f(x) \leq f(\alpha) < a \ \wedge \ x \in E$$

Por lo tanto, $x \in A$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces $x \leq \alpha$ y $x \in E$, es decir, $x \in (-\infty, \alpha] \bigcap E$

$ii)$ $\alpha \notin A$. Veremos que $A = (-\infty, \alpha) \bigcap E$

En efecto, si $x \in (-\infty, \alpha) \bigcap E$, entonces $x < \alpha$ y $x \in E$. Ahora, como $\alpha = supA$, entonces

$$\forall \epsilon > 0, \exists \beta \in A, \alpha - \epsilon < \beta < \alpha$$

Note que la última desigualdad es estricta porque $\alpha \notin A$. Así, para $\epsilon = \dfrac{\alpha - x}{2}$, la desigualdad anterior queda

$$\frac{\alpha + x}{2} < \beta < \alpha$$

Como $\alpha = supA$, entonces lo anterior (junto con que $\beta \in A$) implica que

$$x < \beta < a$$

Aplicando $f$ se concluye que $x \in A$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces $x < supA = \alpha$ y $x \in E$. Con eso se concluye.

Caso 2: Veremos que $A = E$ (medible)

En efecto, si $A \setminus E \neq \emptyset$, entonces sea $x \in E \setminus A$, esto es, $x \in E$ y $f(x) \geq a$. Ahora, note que si existiese un $y \in A$ con $y > x$, entonces se tendría que $f(y) > f(x) \geq a$ (contradicción). Luego, $\forall y \in A$, $y \leq x$ (Contradicción: esto dice que $x$ es cota superior de $A$).

Así, $A \setminus E = \emptyset$ y como $A \subseteq E$, entonces $A = E$.

Ejercicio 2

Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible con $E$ medible. Sea $A = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^*(B) \text{ medible }\}$. Muestre que $A$ es $\sigma-$álgebra.

Solución

$i)$ $\mathbb{R} \in A$. Directo pues $f^*(\mathbb{R}) = E$

$ii)$ $A$ es cerrado bajo complementos:

Sea $B \in A$. Se tiene que $f^*(B)$ es medible y luego $(f^*(B))^c$ es medible. Veremos que $f^*(B^c) = (f^*(B))^c$

En efecto,

$$\begin{aligned} x \in (f^*(B))^c &\iff x \notin f^*(B) \\ &\iff f(x) \notin B \\ &\iff f(x) \in B^c \\ &\iff x \in f^*(B^c) \end{aligned}$$

$iii)$ $A$ es cerrado bajo uniones numerables

Para $i \in \mathbb{N}$, sean $B_i \in A$. Note que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f^*(B_i)$ es medible. Luego $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f^*(B_i)$ es medible.

Veremos que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f^*(B_i) = f^*\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)$, lo que implicará que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i \in A$.

En efecto,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^*(B_i) &\iff \exists j \in \mathbb{N}, x \in f^*(B_j) \\ &\iff \exists j \in \mathbb{N}, f(x) \in B_j \\ &\iff f(x) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \\ &\iff x \in f^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Sean $D, E$ conjunto medible. Sea $f : D \bigcup E \to \mathbb{R}$. Muestre que $f$ medible $\iff$ $f|_D \wedge f|_E$ medibles

Solución

$\Longrightarrow$: Veremos que para $a \in \mathbb{R}$, $(f|_D)^*(a,\infty)$ y $(f|_E)^*(a,\infty)$ son medibles.

En efecto, note que como $f$ es medible, $f^*(a,\infty)$ es medible. Además,

$$\begin{aligned} (f|_D)^*(a,\infty) &= f^*(a,\infty) \bigcap D \text{ (medible)} \\ (f|_E)^*(a,\infty) &= f^*(a,\infty) \bigcap E \text{ (medible)} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: Veremos que para $a \in \mathbb{R}$, $f^*(a,\infty)$ es medible.

Para eso, veremos que $f^*(a,\infty) = (f|_D)^*(a,\infty) \bigcup (f|_E)^*(a,\infty)$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} x \in f^*(a,\infty) &\iff x \in D \bigcup E \ \wedge \ f(x) > a \\ &\iff x \in D \ \wedge \ f(x) > a \ \vee \ x \in E \ \wedge \ f(x) > a \\ &\iff x \in (f|_D)^*(a,\infty) \bigcup (f|_E)^*(a,\infty) \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones medible con dominio común $E$. Muestre que $F(x) := \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$ y $G(x) := \inf_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$ son medibles.

Solución

Para ver que $F$ es medible, veremos que el conjunto $\{x \in E \mid F(x) \leq a\}$ es intersecci´on numerable de medible.

Primero, note que como cada $f_i$ es medible, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, $\{x \in E \mid f_i \leq a\}$ es medible. Ahora, note que

$$\begin{aligned} x \in \{x \in E \mid F(x) \leq a\} &\iff F(x) \leq a \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N},\ f_i(x) \leq a \\ &\iff x \in \bigcap_{\mathbb{N}} \{x \in E \mid f_i(x) \leq a\} \end{aligned}$$

An´alogamente, $G$ es medible porque

$$\begin{aligned} x \in \{x \in E \mid G(x) \geq a\} &\iff G(x) \geq a \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N},\ f_i(x) \geq a \\ &\iff x \in \bigcap_{\mathbb{N}} \{x \in E \mid f_i(x) \geq a\} \end{aligned}$$

Corolario: Si $f$ es medible, entonces las siguientes son medibles

$$\begin{aligned} |f| &:= max\{f, -f\} \\ f^{+} &:= max\{f, 0\} \\ f^{-} &:= max\{-f, 0\} \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Sea $(f_n)$ sucesi´on de funciones medibles con dominio com´un $E$. Muestre que si $f_n \to f$ puntualmente CTP, entonces $f$ es medible

Soluci´on

Sea $D$ el conjunto en el cual la suc. no converge. Note que

$$\begin{aligned} x \in \{x \in E \mid f(x) < a\} &\iff f(x) < a \\ &\iff (\exists i \in \mathbb{N}, \forall n \geq i,\ f_n(x) < a)\ \vee\ (x \in \{x \in D \mid f(x) < a\}) \\ &\iff \left(\exists i \in \mathbb{N},\ x \in \bigcap_{n\geq i} \{x \in E \mid f_n(x) < a\}\right)\ \vee\ (x \in \{x \in D \mid f(x) < a\}) \\ &\iff \left(x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq i}, \{x \in E \mid f_n(x) < a\}\right) \bigcup\ \{x \in D \mid f(x) < a\} \end{aligned}$$

Como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq i}, \{x \in E \mid f_n(x) < a\}$ es medible y $\{x \in D \mid f(x) < a\}$ tiene medida nula, se concluye.

Ejercicio 6

Sea $g : E \to \mathbb{R}$ medible. Considere $f : E \to \mathbb{R}$. Muestre que si $f = g$ CTP, entonces $f$ es medible.

Solución

Sea $a \in \mathbb{R}$. Note que

$$\begin{aligned} x \in \{x \in E \mid f(x) > a\} &\iff g(x) > a \vee f(x) \neq g(x) \\ &\iff x \in \{x \in E \mid g(x) > a\} \vee x \in \{x \mid f(x) \neq g(x)\} \end{aligned}$$

Y como $x \in \{x \in E \mid g(x) > a\}$ es medible y $x \in \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula, se concluye.