Ayudantía 23 de octubre

October 23, 2018

Recuerdos:

Lema de aproximación por simples

Sea f una función medible y acotada en E, esto es, existe $M \geq 0$ tal que, en E, $|f| \leq M$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existen funciones simples φ_ϵ y ψ_ϵ definidas en E tales que, en E,

$$\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon$$

y

$$0 \leq \psi_\epsilon - \varphi_\epsilon < \epsilon$$

Ejercicio 1

Muestre que la función de Dirichlet es L-integrable, pero no R-integrable

Recuerdo: Para $E_1 \subseteq E$, $\int_{E_1} f = \int_E f \cdot \chi_{E_1}$

Solución

Defina $f : [0,1] \to \{0,1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ la función de Dirichlet.

Como ejercicio, ver que no es R-integrable en $[0,1]$. Ahora, el conjunto $E = \mathbb{Q} \bigcap [0,1]$ tiene medida nula. La función de Dirichlet f es la restricción a $[0,1]$ de la función característica χ_E, luego f es integrable (función simple) en $[0,1]$ y

$$\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} 1 \cdot \chi_E = \int_E 1 = 1 \cdot m(E) = 0$$

Ejercicio 2

Sea f una función acotada y medible en un conjunto de media finita E. Entonces f es integrable en E.

Recuerdo: Lema de aproximación por simples

Solución

Veremos que $\inf \left\{ \int_E \psi \mid \psi \,\text{simple}\ \psi \geq f \right\} = \sup \left\{ \int_E \varphi \mid \varphi \text{ simple } \varphi \leq f \right\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el lema de aproxiamción por simples, tomando $\epsilon = 1/n$, existen dos funciones simples φ_n y ψ_n definidas en E tales que en E,

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

y, también en E

$$0 \leq \psi_n - \varphi_n \leq 1/n$$

Por la monotonía y linealidad de la integral para funciones simples,

$$0 \leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n = \int_E [\psi_n - \varphi_n] \leq {}^1\!/_n \cdot m(E)$$

Pero note que (por def de supremo e ínfimo, simplemente)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf\left\{\int_E \psi \mid \psi \,\texttt{simple}\ \psi \geq f\right\} - \sup\left\{\int_E \varphi \mid \varphi\ \texttt{simple}\ \varphi \leq f\right\} \\ &\leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n \leq {}^1\!/_n \cdot m(E) \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cada n y además $m(E)$ es finito, entonces las integrales superior e inferior coinciden y por lo tanto f es integrable.

Ejercicio 3

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones medible y acotadas en E (de medida finita). Suponga que para cada n, $f_n \to f$ uniformemente. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Solución

La idea es mostrar que $\forall \epsilon > 0$, a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, se cumple que $\left|\int_E f - \int_E f_n\right| < \epsilon$.

Primero, note que f es medible al ser límite de funciones medible.

Sea $\epsilon > 0$ y considere $\dfrac{\epsilon}{m(E)}$. Como $f_n \to f$ uniformemente, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$,

$$||f - f_n||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{m(E)}$$

Luego

$$\begin{aligned} \left|\int_E f - \int_E f_n\right| &= \left|\int_E f_n - f\right| \\ &\leq \int_E |f - f_n| \\ &\leq ||f - f_n||_\infty\, m(E) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Ejercicio 4 y 5 (1 ayt 11)

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible y no negativa. Demuestre que existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simple no negativas y de soporte finito tales que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

Recuerdo: Soporte finito: $m(\{x \in E \mid \varphi_n(x) \neq 0\}) < \infty$

Solución

Para $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n \cdot 2^n\}$, defínase

$$E_{n,i} = f^*\left([(i-1)\,2^{-n}, i \cdot 2^{-n})\right)$$

Aparte, defínase

$$E_{n,0} = f^*\left([n,\infty)\right)$$

Ahora, defínase

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} (i-1)\cdot 2^{-n}\chi_{E_{n,i}\bigcap[-n,n]} + n\chi_{E_{n,0}\bigcap[-n,n]}$$

Note que para cada n, $\varphi_n \geq 0$; $\varphi_n\mid_{[-n,n]^c}= 0$; φ_n es simple y, además, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$.

Ahora, sea $x \in E$. Veremos que $|f(x) - \varphi_n(x)| \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $f(x) < n$. Además, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq n_1$, $-m < x < m$. Para que se cumplan ambas condiciones, sea $n_2 = max\{n_1, n_0\}$. Es decir, $\forall n \geq n_2$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \leq & n \\ & \wedge & \\ |x| & < & n \end{array}$$

Luego, $\forall n \geq n_2$, $\exists i$ tal que $x \in E_{n,i}$. Es decir, $\exists i$ tal que $f(x) \in [(i-1)\,2^{-n}, i\cdot 2^{-n})$ y $\varphi_n(x) = (i-1)\,2^{-n}$

Luego $\forall n \geq n_2$, $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq 2^{-n}$ y $2^{-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 6 (Teorema de convergencia acotada)

Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto de medida finita E. Suponga que existe $M \geq 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq M$. Muestre que si $f_n \to f$ puntualmente, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$$

Solución

Recuerde que el límite (puntal) de una sucesión de medibles es medible, esto es, f es medible. Además, note que $|f| \leq M$. Queremos probar que para n grande,

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| < \epsilon$$

Sea $A \subseteq E$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{array}{rcl} \int_E f_n - \int_E f & = & \int_E (f_n - f) \\ & = & \int_A (f_n - f) + \int_{E\setminus A} f_n + \int_{E\setminus A} (-f) \end{array}$$

Luego

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \leq \int_A |f_n - f| + 2M\cdot m(E\setminus A)$$

Por el teorema de Egorof, existe $A \subseteq E$ tal que $f_n \to f$ uniformemente (en A) y $m(E\setminus A) < \dfrac{\epsilon}{4M}$. Esto es, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$,

$$|f_n - f| < \frac{\epsilon}{2m(E)} \quad (en\, A)$$

Luego, para todo $n \geq N$,

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| < \epsilon$$