Ayudantía 26 de octubre

October 25, 2018

Ejercicio 1

Sea $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función medible y acotada. Sea $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t)=\int_{[0,1]}\frac{h(x)}{1+t^2x}dx$$

$a)$ Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\psi\left(\frac{1}{n}\right)$

$b)$ Demuestre que ψ es continua

Solución

Defínase $f_n(x)=\dfrac{h(x)}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2x}$. Note que $\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2x}$ es continua en $[0,1]$ y por lo tanto es medible. Además, como $h(x)$ es medible, entonces cada $f_n(x)$ es medible. Como h es acotada, existe $M\geq 0$ tal que $\forall x\in[0,1],\ |h(x)|\leq M$. Note que para $x\in[0,1]$,

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2x}\leq 1$$

Así,

$$|f_n(x)|\leq M$$

Es decir, las f_n están uniformemente acotadas en $[0,1]$. Por otro lado, note que

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=h(x)$$

Así, por el teorema de convergencia acotada,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\,dx=\int_{[0,1]}h(x)\,dx$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\psi\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{[0,1]}h(x)\,dx$$

$b)$

Sea $t\in\mathbb{R}$. Sea (t_n) sucesión que converge t. Veremos que

$$\lim_{n\to\infty}\psi(t_n)=\psi(t)$$

Para eso, sean $g_n(x) = \dfrac{h(x)}{1+tn^2x}$. Análogamente al caso anterior, cada g_n es medible. Y, de nuevo, se tiene que para $x \in [0,1]$,

$$|g_n(x)| \leq M$$

Es decir, son uniformemente acotadas. Por otra parte, sea

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, z \mapsto \frac{h(x)}{1+z^2x}$$

Note que g es continua, luego

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n) = g(t) = \frac{h(x)}{1+t^2x}$$

Observando que para $x \in [0,1]$, $g(t_n) = g_n(t)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{h(x)}{1+t^2x}$$

Así, por el teorema de convergencia acotada

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n(x) = \int_{[0,1]} \frac{h(x)}{1+t^2x} = \psi(t)$$

y como

$$\int_{[0,1]} g_n(x)\,dx = \psi(t_n)$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = \psi(t)$$

Ejercicio 2

Demuestre que la integral $\displaystyle\int_{[0,1]} x^{-3/4}$ es finita.

Solución

La idea es tener en mente el teorema de convergencia monótona. Describiremos $f(x)$ para $x \in (\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}]$. y esto motivará la definición de la sucesión de simples (f_k).

Note que $x^{-1/2} = n \iff x \in (\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}]$. Así,

$$f(x) = n^{3/2} \iff x \in (\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}]$$

Así, defínase, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k = \sum_{n=1}^{k} n^{3/2} \chi_{(\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}]}$$

Note que cada f_k es medible. Además, $f_{k+1} \geq f_k$ y $f_k \geq 0$. Finalmente, note que $f_k \to f$ CTP #En 0 f no está definida.

Por el teorema de convergencia monótona,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k = \int_{[0,1]} f$$

Calculando $\int_{[0,1]} f_k$ explícitamente, obtenemos una cota superior para $\int_{[0,1]} f$:

Se tiene que

$$\int_{[0,1]} f_k = \sum_{n=1}^{k} n^{3/2} \cdot m\left((\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}] \right) = 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)} < 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Por lo tanto

$$\int_{[0,1]} f = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Ejercicio 3

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+2x}{5-x}} & x \in K \\ n & x \in \text{intervalos de largo } 3^{-n} \end{cases}$

Calcule $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)$

Solución

Idea

Para calcular $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)$, separaremos la integral en la parte de Cantor y el resto, esto es,

$$\int_{[0,1]} f = \int_{K} f + \int_{K^c \bigcap [0,1]} f$$

Calculamos el primer sumando:

Recuerde que $mK = 0$, luego si acotamos el argumento de la integral está listo. En efecto, note que

$$\sqrt{\frac{1+2x}{5-x}} \leq 1$$

Así,

$$0 \leq \int_{K} f \leq \int_{K} 1 = mK = 0$$

Calculamos el segundo sumando:

Construiremos una sucesión de funciones f_n tales que $f_n \to f \cdot \chi_{K^c}$ puntualmente y, con el teorema de convergencia monótona, se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = \int_{[0,1]} f \cdot \chi_{K^c} = \int_{k^c \bigcap [0,1]} f \qquad (*)$$

Sea $I_{k,i}$ el $k-$ésimo intervalo ,de largo 3^{-i} , retirado durante la construcción de Cantor. Defínase

$$A_i = \bigcup_{k=1}^{2^{i-1}} I_{k,i}$$

y, para cada n, sea

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \chi_{A_i}$$

Note que cada f_n es medible (es simple). Además, note que $f_n \to f\cdot\chi_{K^c}$ puntualmente. Además, note que $f_{n+1} \geq f_n$ y, por último, para cada n, $f_n \geq 0$. Luego, por el teorema de convergencia monótona, se tiene la ec. $(*)$

Ahora calculamos explícitamente $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n$

Primero, note que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$mA_i = \sum_{k=1}^{2^{i-1}} m\left(I_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{2^{i-1}} 3^{-i} = 2^{i-1} \cdot 3^{-i}$$

Luego $\int_{[0,1]} f_n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot mA_i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - {}^{2}/{}_{3}\right)^2} = 3$$

Por lo tanto, $\int_{[0,1]} f = 3$