Ayudantía 09 de noviembre

November 9, 2018

Espacio L^p

Sea E medible. Se define

$$F^p(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \mid \int_E |f|^p < \infty,\, f\, medible \right\}$$

En F^p, se define la relación $f \sim g \iff f = g\, ctp$. Al cuociente se le llama L^p y resulta un espacio de Bannach

Ejercicio 1

Sea $f \in L^p(E)$ y $\epsilon > 0$. Muestre que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall A \subseteq E$ con $m(A) < \delta$ se tiene que

$$\int_A |f|^p < \epsilon$$

Solución

$I)$ Si f es acotada y no negativa

Existe $M > 0$ tal que $0 < f < M$. Dado $\epsilon > 0$, considere $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$. Se tiene que si $mA < \delta$, entonces

$$\int_A |f| \leq \int_A M = M \cdot mA < \epsilon$$

$II)$ Para $f \geq 0$ medible

Existe una sucesión de funciones acotadas tales que $f_n \to f$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & si\, f(x) < n \\ n & \end{cases}$$

Note que $f_n \leq f_{n+1} \leq f$. Por el Teorema de ocnvergencia monótona se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$,

$$\int_E f - f_n < \epsilon/2$$

Además, note que f_N es acotada y positiva, luego, por lo anterior, existe $\delta > 0$ tal que $mA < \delta \implies \int_A f_n \leq \epsilon/2$

Así,

$$\int_A |f| = \int_A f = \int_A f - f_N + \int_A f_N \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$III)$ $f \in L^1$

Ahora, recuerde que $f^+, f^- \geq 0$. Por lo anterior, dados $\epsilon > 0$,

$\exists \delta_1 > 0$ tal que $mA < \delta_1 \implies \int_A f^+ < \epsilon/2$

$\exists \delta_2 > 0$ tal que $mA < \delta_2 \implies \int_A f^- < \epsilon/2$

Así, con $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $mA < \delta$, entonces

$$\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^- < \epsilon$$

$IV)$ $f \in L^p$

Si $f \in L^p$, entonces $|f|^p \in L^1$. Luego $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,$ tal que $mA < \delta \implies \int_A |f|^p < \epsilon$.

Ejercicio 3

Demuestre que si $f \in L^p(E)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $B \subseteq E$ de medida finita tal que

$$\int_{E \setminus B} |f|^p < \epsilon$$

Solución

Recuerde que

$$\int_E |f|^p = \sup\left\{\int_E \varphi, \varphi \, \text{simple de soporte finito y } \varphi \leq |f|^p\right\}$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe φ de soporte finito (digamos B) tal que $\varphi \leq |f|^p$ y

$$\int_E |f|^p - \varphi < \epsilon$$

Ahora, como $|f|^p - \varphi > 0$ y $E \setminus B \subseteq E$, entonces

$$\int_{E \setminus B} |f|^p - \varphi < \epsilon$$

Además, note que $\varphi|_{E \setminus B} = 0$, luego

$$\int_{E \setminus B} |f|^p = \int_{E \setminus B} |f|^p - \varphi + \int_{E \setminus B} \varphi < \epsilon$$

Ejercicio 4

Teorema de Riemann Lebesgue

Muestre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot sen(nx) = 0$

Solución

Sea $\epsilon > 0$. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\exists \tau \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{[-\tau, \tau]^c} |f| < \epsilon$$

Denótese por $K = [-\tau, \tau]$. Como $0 \leq |f(x)|\,|sen(nx)| \leq |f(x)|$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_K |f(x)\,sen(nx)| < \epsilon/3$$

Ahora, como $f \in L^1(\mathbb{R})$, en particular $f \in L^1(K)$, luego $\exists \varphi$ simple tal que

$$\int_K |f - \varphi| < \epsilon/3$$

y, como φ es simple, entonces $\exists M \geq 0$ tal que $|\varphi| \leq M$. Así,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,sen(nx)\right| &\leq \left|\int_K f(x)\,sen(nx)\right| + \left|\int_{K^c} f(x)\,sen(nx)\right| \\
&\leq \left|\int_K f(x)\,sen(nx)\right| + \epsilon/3 \\
&\leq \left|\int_K (f(x) - \varphi)\,sen(nx)\right| + \left|\int_K \varphi sen(nx)\right| + \epsilon/3 \\
&\leq \left|\int_K f(x) - \varphi\right| + \left|\int_K \varphi sen(nx)\right| + \epsilon/3 \\
&\leq \left|\int_K \varphi sen(nx)\right| + 2\epsilon/3 \\
&\leq M\left|R\int_K sen(nx)\right| + 2\epsilon/3 \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Ahora, note que $R\int_K sen(nx) = \frac{1}{n}2cos(\tau)$, luego

$$\left|R\int_K sen(nx)\right| \leq \frac{2}{n}$$

Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\left|R\int_K sen(nx)\right| \leq \epsilon/3M$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,sen(nx) = 0$$

Ejercicio 5

Muestre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)$

$I)$ $f = \chi_E$, con E medible.

Se tiene que $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \chi_E = mE = m(E-t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E-t}$

Ahora, note que $\chi_{E-t}(x) = 1 \iff \chi_E(x+t) = 1$, por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E-t}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x+t) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)$$

$II)$ Para f simple, digamos $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+t) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x+t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i}(x+t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\end{aligned}$$

$III)$ Para $f \geq 0$ medible

Recuerde que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x), \varphi \text{ simple de soporte finito y } \varphi(x) \leq f(x)\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t), \varphi \text{ simple de soporte finito y } \varphi(x+t) \leq f(x+t)\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\end{aligned}$$

$IV)$ Para $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x+t) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x+t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\end{aligned}$$

Observación: Tomando $g = f \cdot \chi_A$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x+t)$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \cdot \chi_A(x+t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \cdot \chi_{A-t}(x) \\ &= \int_{A-t} f(x+t)\end{aligned}$$

Corolario: Si f es $T-$periódica, entonces

$$\int_{[0,nT]} f(x) = n \int_{[0,T]} f(x)$$