Ayudantía 13 de noviembre

November 13, 2018

Espacio L^p

Sea E medible. Se define

$$F^p(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \mid \int_E |f|^p < \infty, \, f \, medible \right\}$$

En F^p, se define la relación $f \sim g \iff f = g \, ctp$. Al cuociente se le llama L^p y resulta un espacio de Bannach (normado y completo). Recuerde que la norma se define por

$$||f||_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$$

$$||f||_\infty = \inf \{ a \in \mathbb{R} : m(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) = 0 \}$$

Recuerdos

1. Si $f \in L^p$ entonces $\forall \epsilon > 0$ existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{[-\tau,\tau]^c} |f|^p < \epsilon$
2. Si $f \in L^p$, entonces $\int_E |f|^p = \sup \left\{ \int_E \varphi \mid \varphi \text{ simple de soporte compacto(finito) y } \varphi < |f|^p \right\}$

Ejercicio 1

Sea $f \in L^p(E)$ y $\epsilon > 0$. Muestre que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall A \subseteq E$ con $m(A) < \delta$ se tiene que

$$\int_A |f|^p < \epsilon$$

Solución

$I)$ Si f es acotada y no negativa

Existe $M > 0$ tal que $0 < f < M$. Dado $\epsilon > 0$, considere $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$. Se tiene que si $mA < \delta$, entonces

$$\int_A |f| \leq \int_A M = M \cdot mA < \epsilon$$

$II)$ Para $f \geq 0$ medible

Existe una sucesión de funciones acotadas tales que $f_n \to f$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & si \, f(x) < n \\ n & \end{cases}$$

Note que $f_n \leq f_{n+1} \leq f$. Por el Teorema de convergencia monótona se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$,

$$\int_E f - f_n < \epsilon/2$$

Además, note que f_N es acotada y positiva, luego, por lo anterior, existe $\delta > 0$ tal que $mA < \delta \implies \int_A f_N \leq \epsilon/2$

Así,

$$\int_A |f| = \int_A f = \int_A f - f_N + \int_A f_N \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$III)$ $f \in L^1$

Ahora, recuerde que $f^+, f^- \geq 0$. Por lo anterior, dados $\epsilon > 0$,

$\exists \delta_1 > 0$ tal que $mA < \delta_1 \implies \int_A f^+ < \epsilon/2$

$\exists \delta_2 > 0$ tal que $mA < \delta_2 \implies \int_A f^- < \epsilon/2$

Así, con $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $mA < \delta$, entonces

$$\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^- < \epsilon$$

$IV)$ $f \in L^p$

Si $f \in L^p$, entonces $|f|^p \in L^1$. Luego $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,$ tal que $mA < \delta \implies \int_A |f|^p < \epsilon$.

Ejercicio 3

Demuestre que si $f \in L^p(E)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $B \subseteq E$ de medida finita tal que

$$\int_{E\setminus B} |f|^p < \epsilon$$

Solución

Recuerde que

$$\int_E |f|^p = \sup\left\{\int_E \varphi, \varphi \,\texttt{simple de soporte finito y } \varphi \leq |f|^p\right\}$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe φ de soporte finito (digamos B) tal que $\varphi \leq |f|^p$ y

$$\int_E |f|^p - \varphi < \epsilon$$

Ahora, como $|f|^p - \varphi > 0$ y $E \setminus B \subseteq E$, entonces

$$\int_{E\setminus B} |f|^p - \varphi < \epsilon$$

Además, note que $\varphi|_{E\setminus B} = 0$, luego

$$\int_{E\setminus B} |f|^p = \int_{E\setminus B} |f|^p - \varphi + \int_{E\setminus B} \varphi < \epsilon$$

Ejercicio 4

Teorema de Riemann Lebesgue

Muestre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot sen(nx) = 0$

SOLUCIÓN

Sea $\epsilon > 0$. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\exists \tau \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{[-\tau,\tau]^c} |f| < \epsilon$$

Denótese por $K = [-\tau, \tau]$. Como $0 \leq |f(x)| |sen(nx)| \leq |f(x)|$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_K |f(x) sen(nx)| < \epsilon/3$$

Ahora, como $f \in L^1(\mathbb{R})$, en particular $f \in L^1(K)$, luego $\exists \varphi$ simple tal que

$$\int_K |f - \varphi| < \epsilon/3$$

y, como φ es simple, entonces $\exists M \geq 0$ tal que $|\varphi| \leq M$. Así,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x) sen(nx)\right| &\leq \left|\int_K f(x) sen(nx)\right| + \left|\int_{K^c} f(x) sen(nx)\right| \\
&\leq \left|\int_K f(x) sen(nx)\right| + \epsilon/3 \\
&\leq \left|\int_K (f(x) - \varphi) sen(nx)\right| + \left|\int_K \varphi sen(nx)\right| + \epsilon/3 \\
&\leq \left|\int_K f(x) - \varphi\right| + \left|\int_K \varphi sen(nx)\right| + \epsilon/3 \\
&\leq \left|\int_K \varphi sen(nx)\right| + 2\epsilon/3 \\
&\leq M\left|R\int_K sen(nx)\right| + 2\epsilon/3 \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Ahora, note que $R\int_K sen(nx) = \frac{1}{n} 2cos(\tau)$, luego

$$\left|R\int_K sen(nx)\right| \leq \frac{2}{n}$$

Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\left|R\int_K sen(nx)\right| \leq \epsilon/3M$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) sen(nx) = 0$$

Ejercicio 5

Muestre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)$

$I)$ $f = \chi_E$, con E medible.

Se tiene que $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \chi_E = mE = m(E-t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E-t}$

Ahora, note que $\chi_{E-t}(x)=1 \iff \chi_E(x+t)=1$, por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)=\int_{\mathbb{R}} \chi_{E-t}(x)=\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x+t)=\int_{\mathbb{R}} f(x+t)$$

$II)$ Para f simple, digamos $f=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$,

Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x+t) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x+t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i}(x+t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \end{aligned}$$

$III)$ Para $f \geq 0$ medible

Recuerde que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x), \varphi \text{ simple de soporte finito y } \varphi(x) \leq f(x)\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t), \varphi \text{ simple de soporte finito y } \varphi(x+t) \leq f(x+t)\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \end{aligned}$$

$IV)$ Para $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x+t) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x+t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \end{aligned}$$

Observación: Tomando $g=f\cdot\chi_A$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)=\int_{\mathbb{R}} g(x+t)$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{A} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\cdot\chi_A(x+t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\cdot\chi_{A-t}(x) \\ &= \int_{A-t} f(x+t) \end{aligned}$$

Corolario: Si f es $T-$periódica, entonces

$$\int_{[0,nT]} f(x)=n\int_{[0,T]} f(x)$$

Ejercicio 6

Sea $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ y $f \in L^{1}(\mathbb{R})$. Muestre que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |g(x)(f(x+t)-f(x))| = 0$$

Solución

Como $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, existe $M>0$ tal que $|g(x)|<M$ ctp.

Como $f \in L^{1}(\mathbb{R})$, entonces existe h continua de soporte finito $[a,b]$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f-h| < \epsilon/3$$

de donde

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-h(x+t)| < \epsilon/3$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|f(x+t)-f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|f(x+t)-h(x+t)| + \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x)-f(x)| + \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x+t)-h(x)| \\ &= (*)\end{aligned}$$

Ahora, como h es continua, $\lim\limits_{t\to 0} h(x+t)-h(x)=0$.

Sea (t_n) sucesión que converge a cero. Sean

$$\varphi_n = |g(x)|\,|h(x+t_n)-h(x)|$$

Sea $r = máx\,|t_n|$. Note que $\varphi_n \mid_{[a-r,b+r]^c} = 0$. Denotemos por $K=[a-r,b+r]$. Como h es continua de soporte compacto, existe $N>0$ tal que $|h|<N$. Luego

$$\begin{aligned}|\varphi_n| &= |g(x)|\,|h(x+t)-h(x)| \\ &\leq M\cdot 2N < \infty\end{aligned}$$

Es decir, φ_n son uniformemente acotadas en K (de medida finita). Luego, por el TCA

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K} \varphi_n = 0$$

pues $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$.

Y como $\int_{K^c} \varphi_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 0$.

Así, $\exists \delta>0$ tal que si $|t|<\delta$ entonces $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x+t)-h(x)| < \epsilon/3$.

Por lo tanto, para $|t|<\delta$, se tiene que

$$(*) < \epsilon$$

y se concluye que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x+t)-h(x)| = 0$$

Ejercicio 7

Sea $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto f(x,t)$ tal que, fijando $t \in [0,1]$, defínase $f_t : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,t)$ medible. Sea $\varphi(x) = \lim_{t\to 0} f_t(x)$.

Suponga que $\forall t \in [0,1]$, existe $g \in L^1([0,1])$ tal que $|f(x,t)| \le g(x)$.

Muestre que

$$\lim_{t\to 0} \int_{[0,1]} f(x,t)\,dx = \int_{[0,1]} \varphi(x)\,dx$$

Solución

Sea (t_n) sucesión convergente a cero. Considere la sucesión de funciones medibles (f_{t_n}). Note que $\forall x \in [0,1]$

$$|f_{t_n}(x)| \le g(x)$$

Así, por el TCD,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_{t_n}(x) = \int_{[0,1]} \varphi(x)$$

de donde

$$\lim_{t\to 0} \int_{[0,1]} f(x,t)\,dx = \int_{[0,1]} \varphi(x)$$

Ejercicio 8

1. Muestre que $\left|\int_{[o,n]\times[0,\infty)} e^{-y^2} cos(xy)\right| < \infty$

2. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n \int_0^\infty e^{-y^2} cos(xy)\,dydx$

Solución

1. Sea $f(x,y) = e^{-y^2} cos(xy)$. Note que $|f(x,y)| \le e^{-y^2}$ y

$$\int_{[0,n]\times\mathbb{R}^+} |f(x,y)|\,(dxdy) \le \int_{[0,n]\times\mathbb{R}^+} e^{-y^2} = (*)$$

Ahora, considere la función

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} \chi_{[0,n]\times[i,i+1]}(x,y)$$

Note que $e^{-y^2} \le \varphi(x,y)$

Además, considere

$$\varphi_k(x,y) = \sum_{i=0}^{k} e^{-i^2} \chi_{[0,n]\times[i,i+1]}(x,y)$$

Note que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x,y) = \varphi(x,y)$ y que $\varphi_k \le \varphi_{k+1}$. Así, por TCM

$$\begin{aligned} \int_{[0,n]\times[0,\infty)} \varphi(x,y) &= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,n]\times[0,\infty)} \varphi_k(x,y) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} \cdot n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(*) \le n \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} < \infty$$

Así,

$$\left|\int_{[o,n]\times[0,\infty)} f(x,y)\right| < \infty$$

2. Ahora, sea $u_n = \dfrac{1}{n}\int_0^n \int_0^\infty e^{-y^2} cos(xy)\, dydx$

Por Fubini

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-y^2} cos(xy)\, dx\right) dy \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y^2} \left(\int_0^n cos(xy)\, dx\right) dy \end{aligned}$$

Ahora, $R\int_0^n cos(xy)\, dx = \dfrac{sen(xy)}{y}\; |_0^n = \dfrac{sen(yn)}{y}$. Por lo tanto,

$$u_n = \int_0^\infty e^{-y^2} \frac{sen(yn)}{y\cdot n} dy$$

Sean $\phi_n(y) = e^{-y^2} \cdot \dfrac{sen(yn)}{yn}$. Note que $\phi_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, note que para n suf. grande,

$$\left|\frac{sen(yn)}{yn}\right| \leq 1$$

de donde $|\phi_n(y)| \leq e^{-y^2}$ y esta última función es integrable. Así, por TCD

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \phi_n = 0$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

como se quería mostrar.

Ejercicio 9

Considere en $\mathbb{R}^2$ la medida de Lebesgue. Sea $f \in \mathcal{C}([a,b]\times[c,d])$. Demuestre que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,(dx\times dy) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy$$

Solución

Como f es continua y $[a,b]\times[c,d]$ es compacto, existe k tal que $|f(x,y)| < k$. Además,

$$m([a,b]\times[c,d]) = (b-a)(d-c)$$

Por lo tanto,

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y)| < \infty$$

y se concluye por Fubini

Ejercicio 10

Sea $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $h > 0$. Sea $c > 0$. Defínase $f : \mathbb{R} \times [0, c] \to \mathbb{R} : (x, t) \mapsto h(x + t)$. Demuestre que $f \in L^1(\mathbb{R} \times [0, c])$

Solución

Como $h \in L^1(\mathbb{R})$ y $h > 0$, existe (φ_k) sucesión de simples, positivas y de soporte compacto, creciente k, tales que

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = \int h$$

Digamos que

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \chi_{A_{i,k}}(x)$$

Sean $B_{i,k} \subseteq \mathbb{R} \times [0, c]$ dados por $B_{i,k} = \{(x, t) \mid x + t \in A_{i,k}\}$. Note que $mB_{i,k} = c \cdot mA_{i,k}$

Sea

$$\psi_k(x, t) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \chi_{B_{i,k}}(x, t)$$

Note que $\chi_{B_{i,k}}(x, t) = 1 \iff \chi_{A_{i,k}}(x + t) = 1$. Así,

$$f(x, t) - \psi_k(x, t) = h(x + t) - \varphi_k(x + t)$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times[0,c]} \psi_k(x, t) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} mB_{i,k} \\ &= c \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} mA_{i,k} \\ &= c \int \varphi_k \\ &< c \int h \end{aligned}$$

Además, (ψ_k) es creciente en k y $\lim_{k\to\infty} \psi_k = f$ y $\psi_k > 0$, luego por TCM

$$\lim_{k\to\infty} \int \psi_k = \int f$$

y, como $\forall k$, $\int \psi_k \leq \int h$, entonces

$$\int f \leq \int h < \infty$$