Ayudantía 16 Nov

November 15, 2018

Ejercicio 1

1. Muestre que $\left|\int_{[o,n]\times[0,\infty)} e^{-y^2} cos\left(xy\right)\right| < \infty$

2. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n \int_0^\infty e^{-y^2} cos\left(xy\right) dydx$

Solución

1. Sea $f\left(x,y\right) = e^{-y^2} cos\left(xy\right)$. Note que $\left|f\left(x,y\right)\right| \leq e^{-y^2}$ y

$$\int_{[0,n]\times\mathbb{R}^+} \left|f\left(x,y\right)\right| \left(dxdy\right) \leq \int_{[0,n]\times\mathbb{R}^+} e^{-y^2} = (*)$$

Ahora, considere la función

$$\varphi\left(x,y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} \chi_{[0,n]\times[i,i+1]}\left(x,y\right)$$

Note que $e^{-y^2} \leq \varphi\left(x,y\right)$

Además, considere

$$\varphi_k\left(x,y\right) = \sum_{i=0}^{k} e^{-i^2} \chi_{[0,n]\times[i,i+1]}\left(x,y\right)$$

Note que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k\left(x,y\right) = \varphi\left(x,y\right)$ y que $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$. Así, por TCM

$$\begin{aligned} \int_{[0,n]\times[0,\infty)} \varphi\left(x,y\right) &= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,n]\times[0,\infty)} \varphi_k\left(x,y\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} \cdot n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(*) \leq n \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} < \infty$$

Así,

$$\left|\int_{[o,n]\times[0,\infty)} f\left(x,y\right)\right| < \infty$$

2. Ahora, sea $u_n = \frac{1}{n} \int_0^n \int_0^\infty e^{-y^2} cos\left(xy\right) dydx$

Por Fubini

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-y^2} cos\,(xy)\,dx\right) dy \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y^2}\left(\int_0^n cos\,(xy)\,dx\right) dy \end{aligned}$$

Ahora, $R\int_0^n cos\,(xy)\,dx = \dfrac{sen\,(xy)}{y}\,|_0^n = \dfrac{sen\,(yn)}{y}$. Por lo tanto,

$$u_n = \int_0^\infty e^{-y^2}\frac{sen\,(yn)}{y\cdot n}dy$$

Sean $\phi_n\,(y) = e^{-y^2}\cdot\dfrac{sen\,(yn)}{yn}$. Note que $\phi_n \to 0$ cuando $n\to\infty$. Además, note que para n suf. grande,

$$\left|\frac{sen\,(yn)}{yn}\right| \leq 1$$

de donde $|\phi_n\,(y)| \leq e^{-y^2}$ y esta última función es integrable. Así, por TCD

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \phi_n = 0$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

como se quería mostrar.

Ejercicio 2

Sea $f\,(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ para $0<x,y<1$. Muestre que

$$\int_0^1\left(\int_0^1 |f\,(x,y)|\,dy\right)dx = \infty$$

Solución

Veremos que

$$\begin{aligned} \int_0^1\left(\int_0^1 f\,(x,y)\,dy\right)dx &= \frac{\pi}{4} \\ \int_0^1\left(\int_0^1 f\,(x,y)\,dx\right)dy &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

de donde, por el Teorema de Fubini, se concluye que $\int_0^1\left(\int_0^1 |f\,(x,y)|\,dy\right)dx$ no puede ser finita.

En efecto, note que

$$f\,(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

luego

$$\int_0^1 f\,(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2+1}$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$$

Análogamente,

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

de donde

$$\int_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{1}{1+y^2}$$

y finalmente,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 3

Asuma que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Muestre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx = \pi^{N/2}$$

Solución

Por inducción: Para $N = 1$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}$$

Ahora, suponga que la proposición es cierta para $N - 1$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|x|^2} dx = \pi^{(N-1)/2}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, digamos $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Sea $y = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ y $z = x_N$. Note que

$$|x|^2 = |y|^2 + z^2$$

Así, por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|^2 - z^2} dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|^2} e^{-z^2} dz dy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|y|^2} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz \right) \\
&= \pi^{(N-1)/2} \pi^{1/2}
\end{aligned}$$

-

Ejercicio 4

Muestre que

$$\int_0^\infty e^{-y}\frac{sin^2(y)}{y}dy=\frac{log5}{4}$$

Solución

Considere

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 sin\left(2xy\right)e^{-y}dx\right)dy$$

Note que $\int_0^1 sin\left(2xy\right)e^{-y}dx=e^{-y}\frac{sin^2(y)}{y}$ (Riemann). Ahora, sea

$$I\left(x\right)=\int_0^\infty sin\left(2xy\right)e^{-y}dy$$

Integradno por partes,

$$I\left(x\right)=2x-4x^2I\left(x\right)$$

Luego

$$I\left(x\right)=\frac{2x}{1+4x^2}$$

Ahora, note que podemos aplicar el teorema de Fubini, pues

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 \left|sin\left(2xy\right)e^{-y}\right|dx\right)dy\leq\int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-y}dx\right)dy=\int_0^\infty e^{-y}dy=1$$

Así,

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty sin\left(2xy\right)e^{-y}dy\right)dx=\int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}dx=\frac{log5}{5}$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-y}\frac{sin^2(y)}{y}dy=\frac{log5}{4}$$