Ayudantía 30 nov

November 28, 2018

Recuerdo uno

Suponga que $f_i : X \to \mathbb{R}$ son funciones medible par $i = 1, \ldots, n$ y sean $p_1, \ldots, p_n$ y r reales positivos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} = r^{-1}$$

Muestre que

$$\left|\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\right|\right| \leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{p_i}$$

Ejercicio 1

Suponga que $m(X) < \infty$ y $0 < p < q \leq \infty$. Entonces $L^q \subset L^p$ y

$$||f||_p \leq [m(X)]^{(1/p - 1/q)} ||f||_q$$

Solución

Tome $a \in [1, \infty)$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{q}$$

es decir, $a = \dfrac{pq}{q-p}$. Por el recuerdo uno,

$$\begin{aligned} ||f||_p &= ||f \cdot 1||_p \\ &\leq ||f||_q \cdot ||1||_a \\ &= [m(X)]^{1/a} ||f||_q \\ &= [m(X)]^{(1/p - 1/q)} ||f||_q \end{aligned}$$

Note que lo anterior es válido cuando $q = \infty$ interpretando $1/p - 1/\infty$ como $1/p$.

Ejercicio 2

Suponga que $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$; $\lambda \in (0,1)$ y defínase $p_\lambda \in (p_0, p_1)$ por

$$\frac{1}{p_\lambda} = \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1}$$

(Asuma que, si $p_1 = \infty$, entonces $\dfrac{1}{p_1} = 0$). Entonces $L^{p_\lambda} \subset L^{p_0} + L^{p_1}$, es decir, toda función $f \in L^{p_\lambda}$ se puede escribir cono $f = g + h$, con $g \in L^{p_0}$ y $h \in L^{p_1}$.

Solución

Sea $M > 0$ y considere el conjunto $E := \{|f| > M\}$. Defina

$$\begin{aligned} g &= f \cdot \chi_E \\ h &= f \cdot \chi_{E^c} \end{aligned}$$

Note que $f = g + h$. Ahora, note que

$$\begin{aligned} ||g||_{p_0}^{p_0} &= \int |f|^{p_0} \chi_E \\ &= M^{p_0} \int \left|\frac{f}{M}\right|^{p_0} \chi_E \\ &\leq M^{p_0} \int \left|\frac{f}{M}\right|^{p_\lambda} \chi_E \\ &\leq M^{p_0 - p_\lambda} ||f||_{p_\lambda}^{p_\lambda} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} ||h||_{p_1}^{p_1} &= ||f \chi_{E^c}||_{p_1}^{p_1} \\ &= \int |f|^{p_1} \chi_{E^c} \\ &= M^{p_1} \int \left|\frac{f}{M}\right|^{p_1} \chi_{E^c} \\ &\leq M^{p_1} \int \left|\frac{f}{M}\right|^{p_\lambda} \chi_{E^c} \\ &\leq M^{p_1 - p_\lambda} ||f||_{p_\lambda}^{p_\lambda} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Pruebe que $\dfrac{sinx}{x} \notin L^1\left((0,\infty), \mathbb{R}\right)$

Solución

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|sinx|}{x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sinx|}{x} dx \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sinx|}{(n+1)\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi sinx dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Como $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, se concluye.

Ejercicio 4

Sea f una función acotada en $[0,1]$. Muestre que $\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty$

Solución

Note que

$$\begin{aligned} ||f||_p &= \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^1 ||f||_\infty^p\right)^{1/p} \\ &= ||f||_\infty \end{aligned}$$

luego $\overline{\lim_{p\to\infty}} ||f||_p \leq ||f||_\infty$.

Ahora, sea $\epsilon > 0$ y defina $E := \{x \in [0,1] : |f(x)| > ||f||_\infty - \epsilon\}$. Note que

$$\begin{aligned} ||f||_p &= \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \\ &\geq \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \\ &\geq \left(||f||_\infty - \epsilon\right)(mE)^{1/p} \end{aligned}$$

Note que $mE > 0$. Así, $\underline{\lim_{p\to\infty}} ||f||_p \geq ||f||_\infty - \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, $\underline{\lim_{p\to\infty}} ||f||_p \geq ||f||_\infty$.

Ejercicio 5

Sea (f_n) sucesión de funciones en L^∞. Muestre que $||f_n - f||_\infty \to 0$ sss existe un conjunto E de medida nula tal que $(f_n) \xrightarrow{u} f$ en E^c.

Solución

Supongamos que $||f_n - f||_\infty \to 0$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para $n \geq M$,

$$\inf\{M : m(\{t : |f_n(t) - f(t)| > M\}) = 0\} < \epsilon$$

Luego, para $n \geq N$

$$m(t \mid |f_n(t) - f(t)| \geq \epsilon) = 0$$

Defínase $E := \{t \mid |f_n(t) - f(t)| \geq \epsilon\}$. Se tiene que $mE = 0$ y $(f_n) \xrightarrow{u} f$ en E^c.

A la inversa: Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que para $n \geq N$ y $t \in E^c$,

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon/2$$

Luego, para $n \geq N$, $\{t \mid |f_n(t) - f(t)| > \epsilon/2\} \subset E$. Así, para $n \geq N$,

$$\inf\{M \mid m(\{t :| |f_n(t) - f(t)| > M\}) = 0\} < \epsilon$$

Es decir, $||f_n - f||_\infty \to 0$.