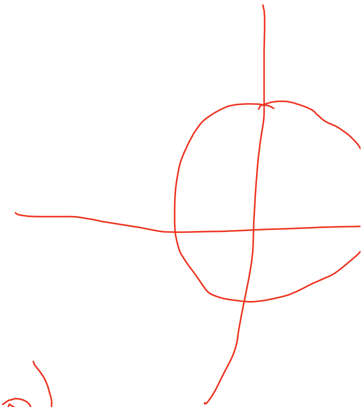
Definiciones elementales (2)

martes, 22 de septiembre de 2020 16:31

El sgte ejemplo muestra que el cjto de ptos periódicos es denso en S^1.



Ej)

F1) $(1,f): S^1 \longrightarrow S^1$

$(1,\theta) \longrightarrow (1, f(\theta)) = (1, 2\theta)$

F2) $\tilde{f}: [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$x \longrightarrow f(x) = 2x \pmod 1$

F3) $F: S^1 \longrightarrow S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \}$

$e^{2k\pi i\theta} = z \longrightarrow F(z) = z^2$

n=1 (ptos fijos) F1) $f(\theta) = \theta + 2k\pi$

$2\theta = \theta + 2k\pi$

$\theta = 2k\pi \qquad k \in \{0,1\}$

F2) $\tilde{f}(x) = x + k \Rightarrow x = k, \quad k \in \{0\}$

F3) $F(z) = z \Rightarrow z^2 = z \Rightarrow z = 1$

obs) $z^n = 1$ n es raíz de la unidad

$n=2$ / Per 2 | F.U

$$f^2(\theta) = \theta + 2k\pi$$
$$4\theta = \theta + 2k\pi$$
$$\theta = \frac{2k\pi}{3} \quad k \in$$

— o —

$n=n$ / Per n | F.U

$$f^n(\theta) = \theta + 2k\pi$$
$$2^n\theta = \theta + 2k\pi$$
$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1} \quad \forall k \in$$

$\Rightarrow$ Tengo $2^n - 1$ raíces de la

Ejercicio | $\overline{Per_n(f)} = S^1$.

Def | (1) Un pto x es eventualm periódico de periodo n si $\exists m > 0$ tq $\forall i \geq m$

$$f^{n+i}(x) = f^i(x).$$

Nota | f^n comp
$f^{(n)}$ derivada
$(f)^n$ pot.

Ej: pts eventualmente fijos

1) $f(x) = x^2$ pts fijos $x^2 = x$

$x = 0 \quad x$

-1 es un pto eventualmente fijo

$f(-1) = 1$

$f^{1+1}(-1) = 1$ = pto fijo

2) $f(x) = 2\theta$ en S^1

$2\theta = \theta + 2k\pi$

$\boxed{\theta = 2k\pi}$ $k = 0, 1.$

$\theta = \frac{2k\pi}{2^n}$ es eventualmente fijo.

$f^n\left(\frac{2k\pi}{2^n}\right) = \cancel{2}^n \frac{2k\pi}{\cancel{2^n}} =$

$f(2k\pi) = 2k\pi$

$$\Rightarrow f^{1+n}\left(\frac{2k\pi}{2^n}\right) = 2k\pi .$$

Def (2) Sea p de periodo $\ldots$ Decimos que x es positivamente asintótico a p si $\lim_{i\to+\infty} f^{i\cdot n}(x) = p$

(asintóticamente hacia adelante a p)

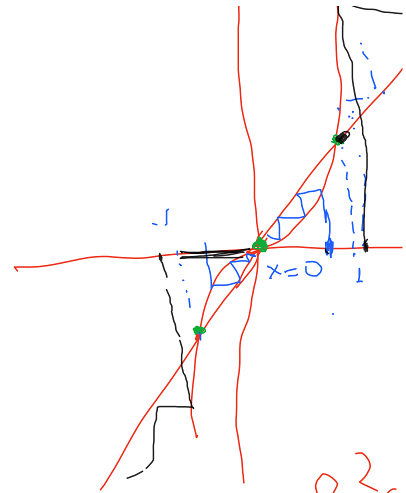
Además el conjunto de puntos asintóticos se llama conjunto estable denotado por

$$W^s(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{i\to\infty} f^{in}(x) = \ldots$$

(3) Análogamente se definen los ptos negativamente asintóticos y el cjto inestable dado por $W^u(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{i\to-\infty} f^{in}(\ldots$

Ej $f(x) = x^3$

En este ejemplo quiero buscar pt's asintóticos hacia los pts fijos de f.



obs ① $f^2($

② $f^i(x$

$f(x) = x$

$x^3 = x$ → $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$

$$W^s(0) = \{ x \in \mathbb{R} / \lim_{i \to +\infty} f^{i\cdot 1}(x) = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / \lim_{i \to +\infty} x^{3^i} = 0 \}$$

$$= (-1, 1)$$

$$W^u(1) = \{ x \in \mathbb{R} / \lim_{i \to -\infty} x^{3^i} = 1 \}$$

$$= (0, +\infty)$$

$$W^u(-1) = (-\infty, 0)$$

Def: (4) x es pto crítico si

$$f'(x) = 0$$

(5) Un pto crítico es no degenera

$$f''(x) \neq 0$$

(6) Un pto crítico es degenerado si

$$f''(x) = 0 .$$

Ej: (1) ~~El~~ pto crítico de $f(x) = x$

~~Son~~ es no degenerado

(2) ~~Los~~ el pto crítico de $f(x) = x$

~~Son~~ es degenerado

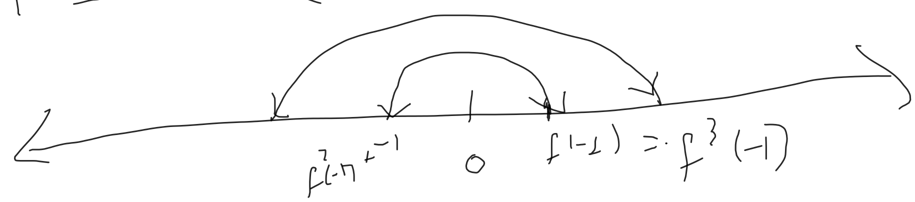
Retrato de fase

El retrato de fase es un dibujo q de la aplicación f en el inter donde está actuando.

$f(-1) =$

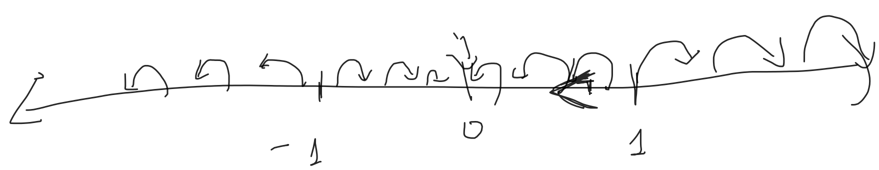
Ej || ① $f(x) = -x$

Ret Fase

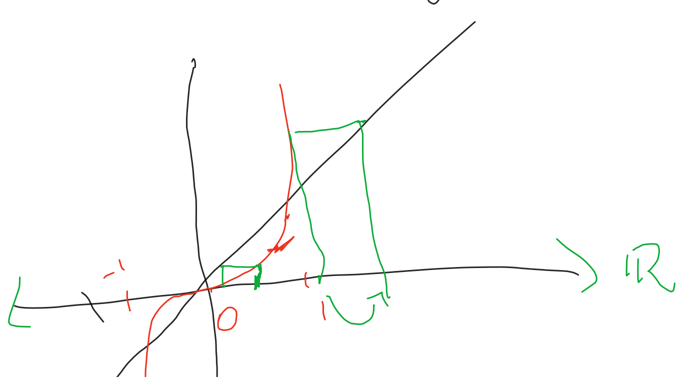


② $f(x) = x^3$

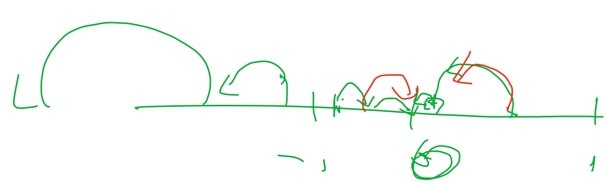
Ret Fase



Obs Aveces se torna complicado ver el retrato de fase, entonces se sugiere ver una gráfica anal-



Obs: {0} y {-1}, {1}



El sgte ejemplo me permite analizar si los pts fijos son de naturaleza repulsora o contractivos, cuando f es un difeomorfismo del círculo

Ejemplo $f(\theta) = \theta + \varepsilon \,\mathrm{sen}(2\theta)$, $\varepsilon \in$

pts fijos) $\theta + \varepsilon \,\mathrm{sen}\, 2\theta = \theta$

$\Rightarrow \varepsilon\,(\mathrm{sen}\, 2\theta = 0$

$\theta = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \theta = \pi \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$

- Un pto fijo θ es repulsor si: $f'(\theta) > 1$
- Un pto fijo θ es contractivo si $f'(\theta) <$

$f'(\theta) = 1 + 2\varepsilon \cos(2\theta)$

$\theta = 0$ $f'(0) = 1 + 2\varepsilon \cos(2\cdot 0) = 1 + 2\varepsilon >$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 + 2\varepsilon \cos(\pi) = 1 - 2\varepsilon < 1$

$\theta = \pi$ $f'(\pi) = 1 + 2\varepsilon \cos 2\pi) = 1 + 2\varepsilon > 1$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ $f'(\frac{3\pi}{2}) = 1 - 2\varepsilon < 1$

$\{0\}$ y $\{\pi\}$ son repulsores

$\{\frac{\pi}{2}\}$ y $\{\frac{3\pi}{2}\}$ son contractivos

Veremos una importante clase de aplicaciones en S^1, que son las traslaciones

Ej) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y la traslación $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. ¿Cómo es el con[illegible] de pto periódicos en S^1?

R) Todo depende de que si λ

o $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

1°) $\lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda = p/q$, p, q

¿Qué pasa con los puntos de periodo q?

esto es $T_\lambda^q(\theta) = \theta$

$$T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$$
$$T^2_\lambda(\theta) = \theta + 2\cdot 2\pi\lambda$$
$$T^3_\lambda(\theta) = \theta + 3\cdot 2\pi\lambda$$
$$T^q_\lambda(\theta) = \theta + q\cdot 2\pi\lambda$$

$$\theta + \cancel{q}\cdot 2\pi\cdot\frac{p}{\cancel{q}} =$$

$$\theta + 2\pi p = \theta$$

$\Rightarrow \forall \theta \in [0, 2\pi)$ son pts periódicos de período q

2°) $\lambda \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ El cjto de pts periód es denso en S

Teo Jacobi) Cada órbita de T_λ

densa en S^1 si $\lambda \notin \mathbb{Q}$

Dem $\boxed{\text{Ejercicio}}$

$$T_\lambda(\theta) = \theta + 2k\pi$$

$$T^2_\lambda(\theta) = T_\lambda(\theta + 2k\pi)$$

$$= \theta + 2k\pi + 2k\pi$$

$$= \theta + 4k\pi$$

$$T^3_\lambda(\theta) = T_\lambda(T^2_\lambda(\theta))$$

$$= T_\lambda(\theta + 4k\pi)$$

$$= \theta + 4k\pi + 2k\pi$$

$$= \theta + 6k\pi \;//$$

Not

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \cdots \circ f}_{n}$$

$$f^{(n)} = f'(f^{n}(x)) \cdot f'(f^{n-1}(x)) \cdots f'(x)$$

n-veces

$$(f)^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-veces}}$$

$\{f^n\}$ iterado de f en un espacio unidimensional ([a,b] , S^1 , $\mathbb{R}$, etc)