Formula de Leibniz

Teo) Para EDOs de la forma

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = a(x)\, y + b(x),$$

con $b(x) \neq 0$, la solución es

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left[\int e^{-\int a(x)dx}\, b(x)\, dx + C\right]$$

Dem: Lema: Si $u(x)$ es solución no trivial de $\frac{dy}{dx} = a(x)\, y$

$\Rightarrow$ existe $v(x)$ tal que $u(x)\,v(x)$ es solución de $(*)$

Buscamos $u(x)$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, y$$

$$\frac{dy}{y} = a(x)\, dx \;/ \int$$

$$\ln y = \int a(x)\, dx$$

$$\Big|\; u(x) = y = e^{\int a(x)\, dx} \;\Big|$$

$$\mu(x) = e$$

Por lema $y = u(x)\,v(x)$ es sol de $(*)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

Remplazando en $(*)$

$$u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = a(x)\,u(x)\,v(x) + b(x)$$

observe que $u'(x) = a(x)\,u(x)$, remplazando

$$a(x)\,\cancel{u(x)\,v(x)} + u(x)\,v'(x) = a(x)\,\cancel{u(x)}\,v(x) + b(x)$$

$$v'(x) = \frac{b(x)}{\mu(x)} \quad / \int dx$$

$$v(x) = \int \frac{b(x)}{\mu(x)}\,dx + c = \int e^{-\int a(x)\,dx}\,b(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow y = u \cdot v = e^{\int a\,dx}\left[\int e^{-\int a\,dx}\,b\,dx + c\right]$$

#