

TÓPICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
TAREA 1: EDOS DE 1ER ORDEN

Instrucciones: Escoger y resolver **dos** ejercicios de cada sección (diez en total). Escoger y grabar la solución paso a paso de **un** ejercicio de cada sección (cinco en total). Enviar documento final en formato pdf y video final en formato mp4 por correo a tamara.siles@ug.uchile.cl luis.sobarzo@uchile.cl y nelda.jaque@uchile.cl.

Fecha de entrega: Miércoles 7 de Octubre del 2020, 23:59 hrs.

1. SEPARACIÓN DE VARIABLES

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales con álgebra lineal* de Albert L. Rabenstein, Ed. CECSA, México, 1973.

- 1.- $yy' = 4x$, $y(1) = -3$.
- 2.- $xy' = 4y$, $y(1) = -3$.
- 3.- $y' = 2xy^2$, $y(2) = 1$.
- 4.- $y' = e^x(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
- 5.- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(2) = 3$.
- 6.- $y' = e^y y' = 4$, $y(0) = 2$.
- 7.- $2(y - 1)y' = e^x$, $y(0) = -2$.
- 8.- $2y' = y(y - 2)$.
- 9.- $3y^2 y' = (1 + y^3) \cos(x)$.
- 10.- $\cos^2(x)y' = y^2(y - 1) \sin(x)$.

2. ECUACIONES EXACTAS

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Differential Equations with Boundary-Value Problems* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 60–61.

Determine si las siguientes ecuaciones son exactas, si son exactas resuelvalas.

- 1.- $(2x + 4) dx + (3y - 1) dy = 0$,
- 2.- $(2x + y) dx - (x + 6y) dy = 0$,
- 3.- $(5x + 4y) dx + (4x - 8y^3) dy = 0$,
- 4.- $(\sin(y) - y \sin(x)) dx + (\cos(x) + x \cos(y) - y) dy = 0$,
- 5.- $(2y^2 x - 3) dx + (2yx^2 + 4) dy = 0$,
- 6.- $(2y - \frac{1}{x} + \cos(3x)) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin(3x) = 0$,
- 7.- $(x + y)(x - y) dx + x(x - 2y) dy = 0$,
- 8.- $(1 + \ln(x) + \frac{y}{x}) dx = (1 - \ln(x)) dy$,
- 9.- $(y^3 - y^2 \sin(x) - x) dx + (3xy^2 + 2y \cos(x)) dy = 0$,
- 10.- $(x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$.

3. ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973. Página 77.

- 1.- $(x^2 + y^2 + 1) dx + x(x - 2y) dy = 0$,
- 2.- $2y(x^2 - y + x) dx + (x^2 - 2y) dy = 0$,
- 3.- $y(2x - y + 1) dx + x(3x - 4y + 3) dy = 0$,
- 4.- $y(4x + y) dx - 2(x^2 - y) dy = 0$,
- 5.- $(xy + 1) dx + x(x + 4y - 2) dy = 0$,
- 6.- $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x) dx + x(x + 2y - 1) dy = 0$,
- 7.- $y(y + 2x - 2) dx - 2(x + y) dy = 0$,
- 8.- $y^2 dx + (3xy + y^2 - 1) dy = 0$,
- 9.- $2y(x + y + 2) dx + (y^2 - x^2 - 4x - 1) dy = 0$,
- 10.- $2(2y^2 + 5xy - 2y + 4) dx + x(2x + 2y - 1) dy = 0$.

4. ECUACIONES LINEALES

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973. Páginas 52–53.

- 1.- $(x^5 + 3y) dx - x dy = 0$,
- 2.- $2(2xy + 4y - 3) dx + (x + 2)^2 dy = 0$,
- 3.- $y' = x - 2y$,
- 4.- $(y + 1) dx + (4x - y) dy = 0$,
- 5.- $u dx + (1 - 3u)x du = 3u^2 e^{3u} du$,
- 6.- $u dx + (1 - 3u)x du = 3u du$,
- 7.- $y' = x - 4xy$,
- 8.- $y' = \operatorname{cosec}(x) + y \cot(x)$,
- 9.- $y' = \operatorname{cosec}(x) - y \cot(x)$,
- 10.- $(2xy + x^2 + x^4) dx - (1 + x^2) dy = 0$,
- 11.- $(y - \cos^2(x)) dx + \cos(x) dy = 0$,
- 12.- $y' = x - 2y \cot(2x)$,
- 13.- $(y - x + xy \cot(x)) dx + x dy = 0$,
- 14.- $y' - my = c_1 e^{mx}$,
- 15.- $y' - m_2 y = c_1 e^{m_1 x}$ donde $m_1 \neq m_2$.

Los siguientes ejercicios corresponden al libro *Ecuaciones Diferenciales con Álgebra Lineal* de Albert L. Rabenstein, CECSA, México, 1973, página 36.

- 1.- Se dice que una función f es acotada en un intervalo I si existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Sea $q: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada en $[0, +\infty[$. Si $k > 0$, demuestre que cada solución de la ecuación diferencial

$$y' = -ky + q(x)$$

es acotada en $[0, +\infty[$.

- 2.- Con las mismas hipótesis del ejercicio anterior, demuestre que la ecuación diferencial

$$y' = ky + q(x)$$

tiene soluciones que no son acotadas en $[0, +\infty[$.

3.- Sea $q: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = L.$$

Demuestre que toda solución $y(x)$ de la ecuación diferencial

$$y' = -ky + q(x)$$

verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{L}{k}$.

5. ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES

Encuentre la solución general de la ecuación de Bernoulli.

- 1.- $y' + y = xy^2$.
- 2.- $y' - 3y = xy^{-4}$.
- 3.- $x^2y' - xy = x^{-7}y^{1/2}$.
- 4.- $2y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$, $y(1) = 1$.
- 5.- $y^{1/2}y' + y^{3/2} = 1$, $y(0) = 4$.
- 6.- $xy^2(xy' + y) = a^2$, con a constante.

Encuentre la solución general de la ecuación de Riccati.

- 1.- $y' = -e^{x^2}y^2 + 2x(e^{x^2} - 1)y + 1 + 2x^2 - x^2e^{x^2}$, con $y_p = x$.
- 2.- $y' - \sin^2(x)y^2 + \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}y + \cos^2(x) = 0$ con $y_p = \cot(x)$.
- 3.- $y' = \frac{2\cos^2(x) - \sin^2(x) + y}{2\cos(x)}$ con $y_p = \sin(x)$.