TÓPICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
TAREA 2: APLICACIONES DE EDOS DE 1ER ORDEN

Instrucciones: Escoger y resolver un ejercicios de cada sección (seis en total). Escoger y grabar la solución paso a paso de un ejercicio. Enviar documento final en formato pdf y compartir el video final a los correos tamara.siles@ug.uchile.cl luis.sobarzo@ug.uchile.cl y nelda.jaque@uchile.cl con asunto Tarea 1, EDO.

Fecha de entrega: Miércoles 28 de Noviembre del 2020, 23:59 hrs.

1. Crecimiento y decrecimiento

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Modelado* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 81.

1.- Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una razon proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco años, en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

2.- Suponga que la población de la comunidad del problema anterior es de 10.000 después de tres años. Cuál era la población inicial? Cuál será en 10 años?

3.- La población de una comunidad crece a una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial es 500 y aumenta 15% en 10 años. Cuál será la población pasados 30 años?

4.- En cualquier momento dado la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporsional a las bacterias presentes. Al cabo de tres horas se observa que hay 400 individuos. Pasados 10 horas, hay 5.000 especímenes. Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

2. Periodo medio y Carbono 14

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Modelado* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 81–82

1.- El Pb-209, isótopo radioactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3,3 horas. Si al principio habia 1 gramo de plomo. Cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90%?

2.- Cuando $t = 0$, había 100 miligramos de una sustancia radioactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó el 3%. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de 2 horas.

3.- Calcule el periodo medio de vida de la sustancia radioactiva del problema anterior.

4.- a) El modelo de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA,$$
$$A(0) = A_0$$

es el modelo de desintegración de una sustancia radioactiva. Demuestre que, en general, el periodo medio de vida, T, de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.

b) Demuestre que la solución del problema de valor inicial en la parte a), se puede escribir $A(t) = A_0 2^{-t/T}$

5.- En un trozo de madera quemada o carbón vegetal se determinó que el $85,5\%$ de su C-14 se había desintegrado. Determine la edad aproximada de la madera.

3. Ley de enfriamiento de Newton

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Modelado* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 82

1.- Un termométro se lleva desde un recinto interior hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es de $5°F$. Después de un minuto, el termómetro indica $55°F$, y después de cinco marca $30°F$. Cuál es la temperatura del recinto interior?

2.- Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70°F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es $10°F$. Pasado $\frac{1}{2}$ de minuto, el termómetro indica $50°F$. Cuál es la lectura cuando $t = 1$ minuto? Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15°F$?

3.- La fórmula

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

también es válida cuando un objeto absorbe calor del medio que le rodea. Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es $20°C$ se deja caer en un recipiente con agua hirviedo, cuánto tiempo tardara en alcanzar $90°C$ si se sabe que su temperatura aumentó $2°C$ en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a $98°C$?

4. Circuito LR y RC

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Modelado* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 82

1.- Se aplica una fuerza electromotriz de $30v$ aun circuito en serie LR con $0.1h$ de inductancia y 50Ω de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$. Halle la corriente cuando $t \to \infty$.

2.- Resuelva la ecuación
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$
suponiendo que $E(t) = E_0 \sin wt$ que $i(0) = i_0$.

3.- Se aplica una fuerza electromotriz de 100 volts a un circuito en serie RC, donde la resistencia es 200Ω y la capacitancia es de $10^{-4}f$. Determine la carga $q(t)$ del capacitar, si $q(0) = 0$. Halle la corriente $i(t)$.

4.- Se aplica una fuerza electromotriz de 200 v a un circuito en serie RC, en que la resistencia es 1000Ω y la capacitancia es $5*10^{-4}f$. Determine la carga $q(t)$ del capacitar, si $i(0) = 0.4amp$. Halle la carga cuando $t \to \infty$

5.- Se aplica una fuerza electromotriz
$$E(t) = \begin{cases} 120 & 0 \leq t \leq 20 \\ 0 & t > 20 \end{cases}$$
a un circuito en serie RC, en que la resistencia es 2Ω y la inductancia es de 20 h. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$.

5.- Suponga que un circuito en serie RC tiene un resistor variable. Si la resistencia, en cualquier momento t es $R = k_1 + k_2 t$, donde $k_1 y k_2 > 0$ son constantes conocidas, la ecuación $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$ se transforma en
$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$
Demuestre que si $E(t) = E_O$ y $q(O) = q_0$, entonces
$$q(t) = E_0 t + (q_0 - E_0 C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 t}\right)^{1/Ck_2}$$

5. Mezcla

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Modelado* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 82–83

1.- Un tanque contiene 200 l de agua en que se han disuelto 30 g de sal y le entran 4 l/min de solución con 1 g de sal por litro; está bien mezclado, y de él sale líquido con el mismo flujo (4 l/min). Calcule la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

2.- Resuelva el problema anterior suponiendo que entra agua pura.

3.- Un tanque tiene 500 gal de agua pura y le entra salmuera con 2 lb de sal por galón a un flujo de 5 gal/min. El tanque está bien mezclado, y sale de él el mismo flujo de solución. Calcule la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

4.- Resuelva el problema anterior suponiendo que la solución sale a un flujo de 10 gal/min, permaneciendo igual lo demás. Cuándo se vacía el tanque?

5.- Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 lb de sal disuelta. Le entra salmuera con $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón a un flujo de 6 gal/min. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale un flujo de 4 gal/min de solución. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.

6.- Un tanque que está abierto por arriba tiene capacidad total de 400 galones y contiene inicialmente 300 galones de una solución de salmuera. Al tanque entra y sale sal porque se le bombea una solución a un flujo de 3 gal/min, se mezclaba con la solución original, y sale del tanque con un flujo de 2 gal/min. La concentración de la solución entrante es de 2 lb/gal. Si había 50 lb de sal disueltas en los 300 galones iniciales,

a) Calcule la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.
b) Cuándo se derramará el tanque?
c) Cuántas libras de sal habrá en el tanque cuando se comienza a derramar?
d) Suponga que el tanque se derrama, que la salmuera continúa entrando al flujo de 3 gal/min, que el contenido está bien mezclado y que la solución sigue saliendo a un flujo de 2 gal/min. Determine un método para calcular la cantidad de libras de sal que hay en el tanque cuando t = 150 min.
e) Calcule las libras de sal en el tanque cuando $t \to \infty$ Su respuesta coincide con lo que cabría esperar?
f) Use una graficadora para trazar la variación de A(t) durante el intervalo $[0, \infty)$.

6. Otros

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Modelado* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 81-83

1.- Cuando pasa un rayo vertical de luz por una sustancia transparente, la razón con que decrece su intensidad Z es proporcional a Z(t), donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a 3 ft bajo la superficie, es el 25% de la intensidad inicial I_0 le del rayo incidente. Cuál es la intensidad del rayo a 15 ft bajo la superficie?

2.- Cuando el interés se capitaliza (o compone) continuamente, en cualquier momento la cantidad de dinero, S, aumenta a una tasa proporcional a la cantidad presente: $\frac{dS}{dt} = rS$, donde r es la tasa de interés anual

a) Calcule la cantidad reunida al término de cinco años, cuando se depositan 5000 CLP en una cuenta de ahorro que rinde el 5% de interés anual compuesto continuamente.
b) En cuántos años se habrá duplicado el capital inicial?

c) Con una calculadora compare la cantidad obtenida en la parte a) con el valor de

$$S = 5000\left(1 + \frac{0,0575}{4}\right)^{5(4)}$$

Este valor representa la cantidad reunida cuando el interés se capitaliza cada trimestre.

3.- Una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa m en caída sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

en que k es una constante de proporcionalidad positiva.

a) Resuelva la ecuación, sujeta a la condición inicial $v(0) = V_0$.
b) Calcule la velocidad límite (o terminal) de la masa.
c) Si la distancia s se relaciona con la velocidad por medio de $\frac{ds}{dt} = v$, deduzca una ecuación explícita para s, si también se sabe que $s(0) = s_0$.

4.- La razón con que se disemina una medicina en el torrente sanguíneo se describe con la ecuacií diferencial

$$\frac{dx}{dt} = r - kx,$$

r y k son constantes positivas. La función x(t) describe la concentración del fármaco en sangre en el momento t. Determine el valor límite de x(t) cuando $t \to \infty$. En cuánto tiempo la concentración es la mitad del valor límite? Suponga que $x(0) = 0$.