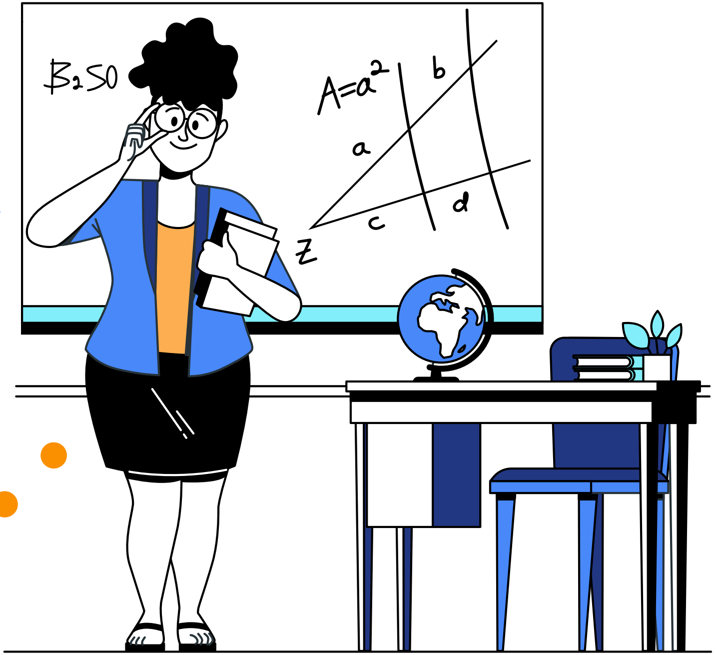
Electromagnetismo

Ayudantía 13:

Leyes de Maxwell y Ecuación de Onda

Alex Ávalos, Diego Olea, Benjamín Uribe



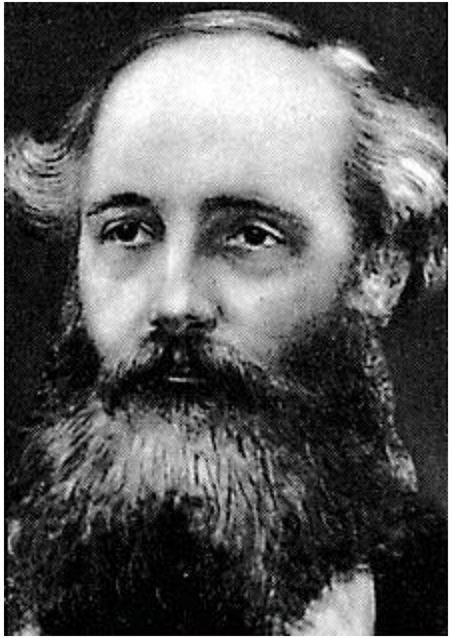
INTRODUCCIÓN

En esta ayudantía revisaremos las ecuaciones de Maxwell una a una para comprender qué podemos saber de ellas y cuál fue la conclusión a la que llegó el mismísimo James Clerk Maxwell.

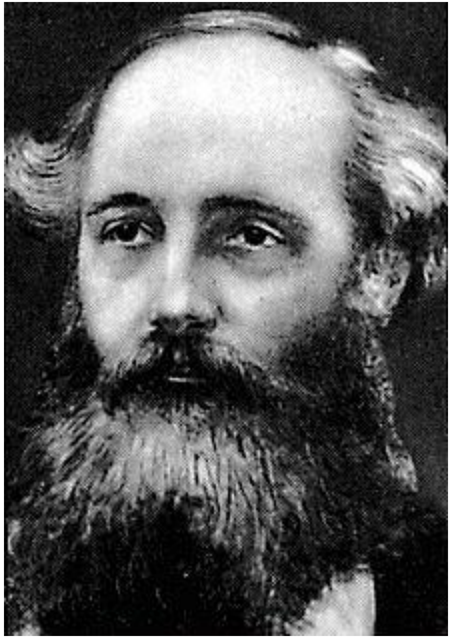
https://www.youtube.com/watch?v=kx20kG6m-JA

Desde finales del siglo XVIII diversos científicos formularon leyes cuantitativas que relacionaban las interacciones entre los campos eléctricos, los campos magnéticos y las corrientes sobre conductores.

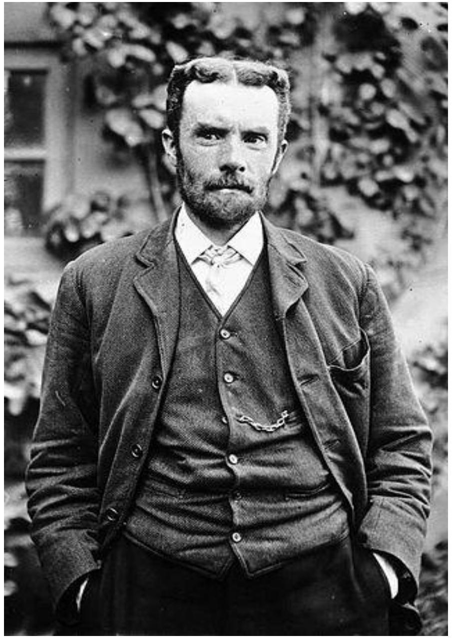
Maxwell lograría unificar todas estas leyes en una descripción coherente del campo electromagnético.



Denominación	Nombre	Ecuación
A	Corriente de desplazamiento	$\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
B	Ecuación de Fuerza magnética	$\mu \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
C	Ley circuital de Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{tot}}$
D	Fuerza de Lorentz	$\vec{E} = \mu \vec{v} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$
E	Ecuación de electricidad elástica	$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{D}$
F	Ley de Ohm	$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J}$
G	Ley de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
H	Ecuación de continuidad de carga	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$



En 1884, Oliver Heaviside junto con Willard Gibbs agrupó estas ecuaciones y las reformuló en la notación vectorial actual.

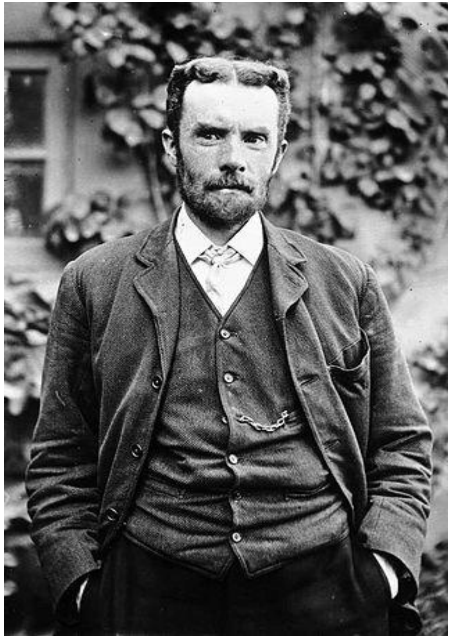


$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



CONCEPTOS CLAVE

OPERADORES VECTORIALES

DIVERGENCIA
Y ROTOR

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

LEYES ESTÁTICAS

LEYES DE GAUSS

LEYES DINÁMICAS

LEY DE FARADAY
Y LEY DE
AMPERE-MAXWELL

ECUACIONES DE ONDA

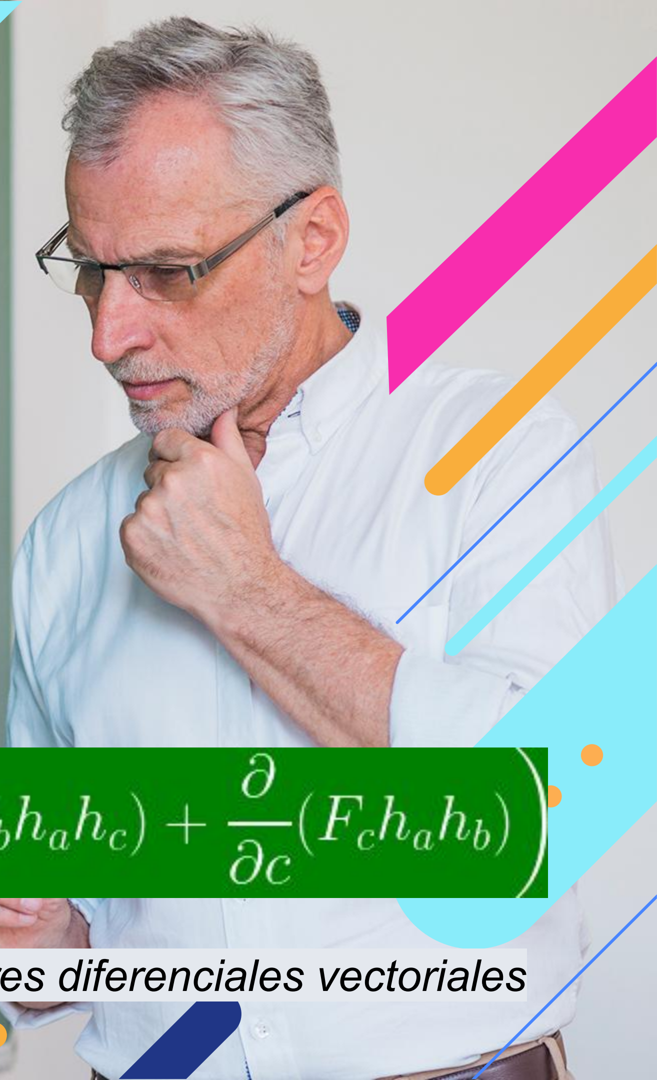
ONDAS ELECTRO-
MAGNÉTICAS

DIVERGENCIA

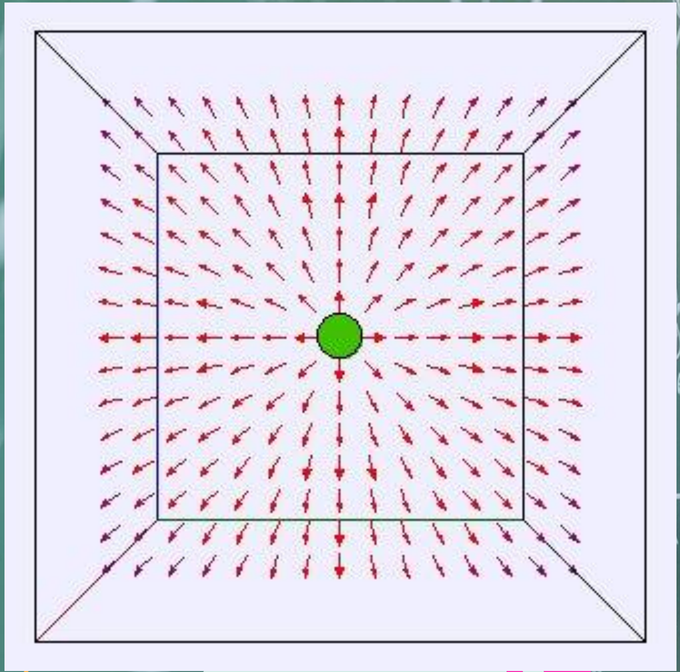
La divergencia mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(a,b,c)=\frac{1}{h_a h_b h_c}\left(\frac{\partial}{\partial a}(F_a h_b h_c)+\frac{\partial}{\partial b}(F_b h_a h_c)+\frac{\partial}{\partial c}(F_c h_a h_b)\right)$$

Los factores de escala h se definen para todos los operadores diferenciales vectoriales según el sistema de coordenadas.



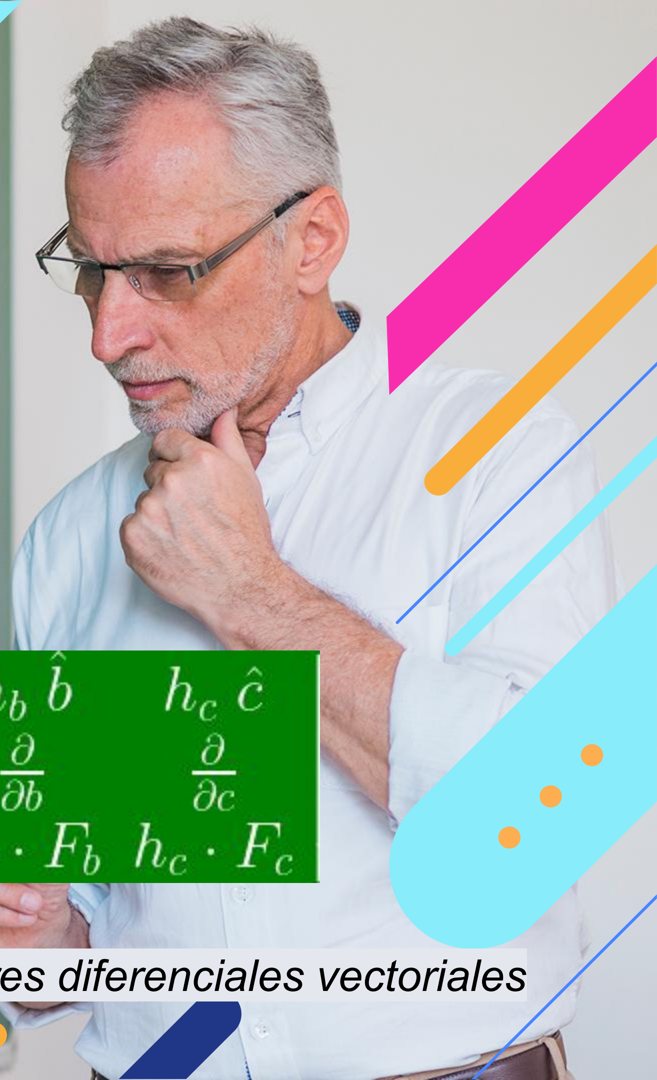
DIVERGENCIA



ROTOR

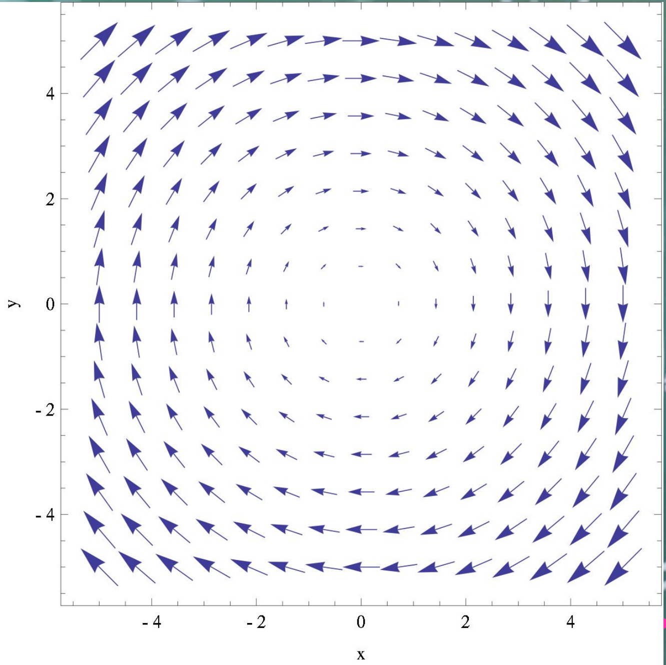
El rotor mide la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

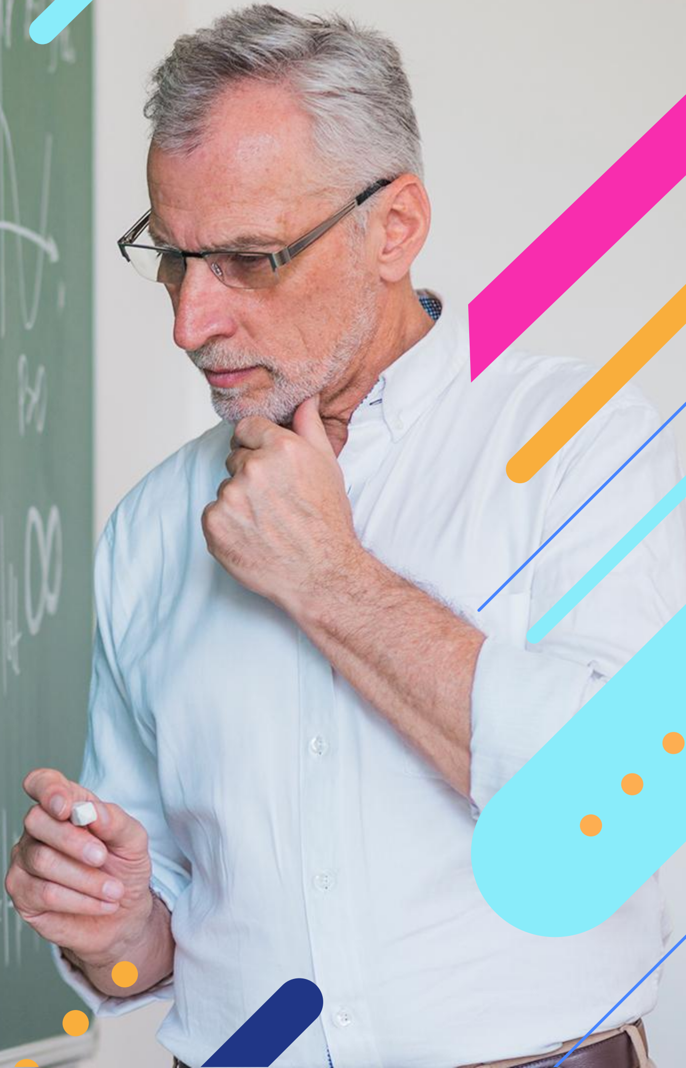
$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(a,b,c) = \frac{1}{h_a h_b h_c} \begin{vmatrix} h_a\,\hat{a} & h_b\,\hat{b} & h_c\,\hat{c} \\ \frac{\partial}{\partial a} & \frac{\partial}{\partial b} & \frac{\partial}{\partial c} \\ h_a \cdot F_a & h_b \cdot F_b & h_c \cdot F_c \end{vmatrix}$$



Los factores de escala h se definen para todos los operadores diferenciales vectoriales según el sistema de coordenadas.

ROTOR





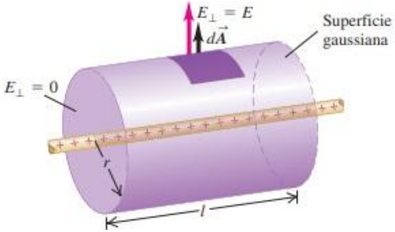
LEYES ESTÁTICAS

1

LEY DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

"El flujo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada es proporcional al valor de la carga que encierra"

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 4\pi k Qenc$$

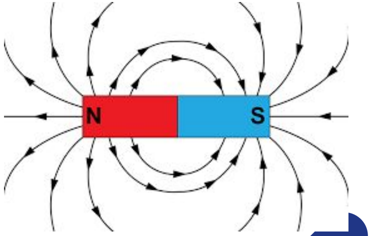


2

LEY DE GAUSS PARA EL CAMPO MAGNÉTICO

"El flujo magnético sobre una superficie cerrada es siempre cero, es decir no existen cargas magnéticas"

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$



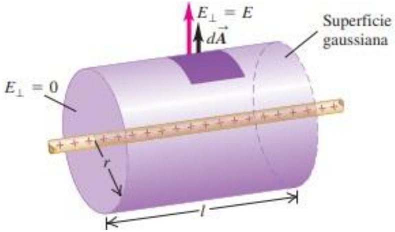
LEYES ESTÁTICAS

1

LEY DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

"Las cargas son las fuentes de campo eléctrico"

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi k \rho(\vec{r})$$

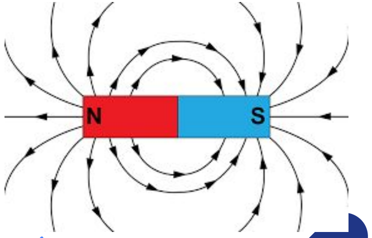


2

LEY DE GAUSS PARA EL CAMPO MAGNÉTICO

"No existen cargas magnéticas que produzcan campos magnéticos"

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$



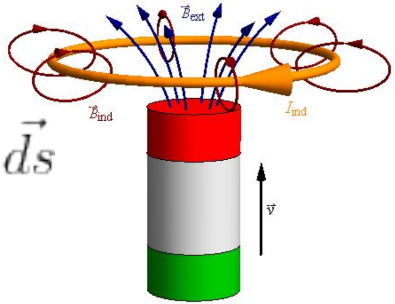
LEYES DINÁMICAS

3

LEY DE FARADAY

"Un flujo magnético variable induce una corriente en un circuito"

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot\vec{ds}$$

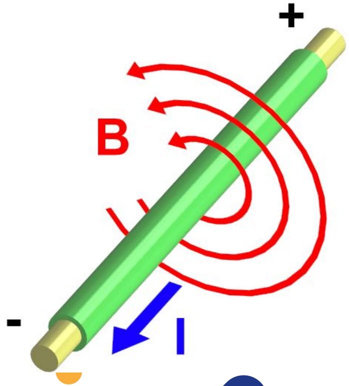


4

LEY DE AMPERE-MAXWELL

"Las corrientes eléctricas son la fuente de los campos magnéticos

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0(Ic + Id)$$



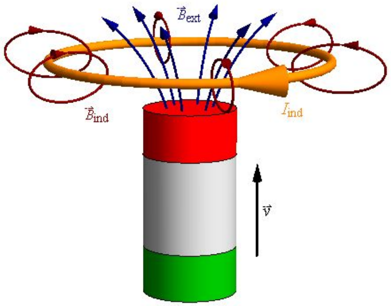
LEYES DINÁMICAS

3

LEY DE FARADAY

"Los campos magnéticos variables en el tiempo inducen campos eléctricos"

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

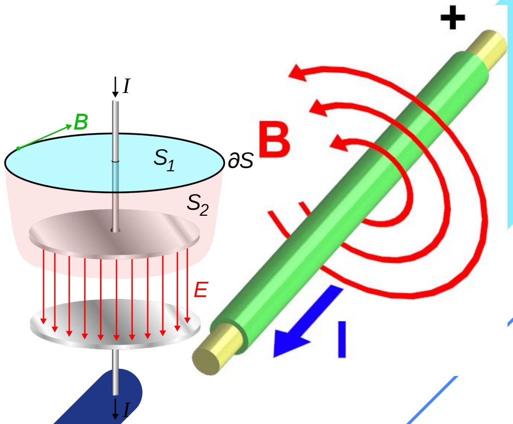


4

LEY DE AMPERE-MAXWELL

"Las corrientes de conducción o bien los campos eléctricos variables en el tiempo son la fuente de los campos magnéticos"

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

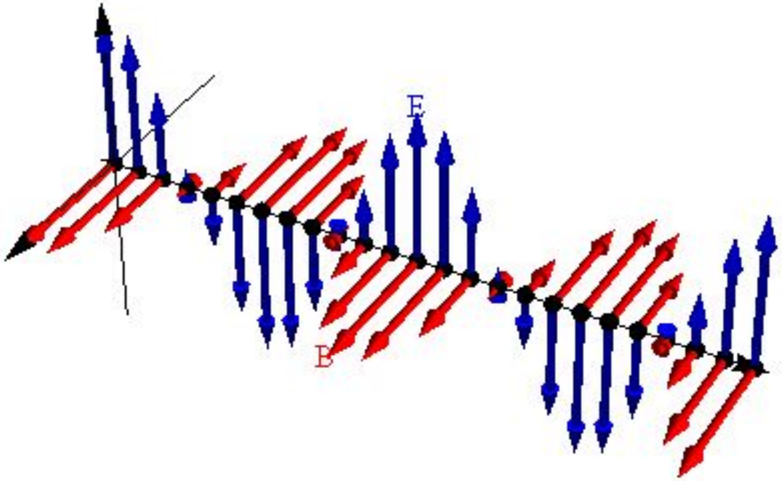


RESUMEN

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Ley de Gauss:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
Ley de Gauss para el campo magnético:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$
Ley de Faraday:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Ley de Ampère generalizada:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

SIMETRÍAS

- 2 ECUACIONES PARA EL CAMPO ELÉCTRICO.
- 2 ECUACIONES PARA EL CAMPO MAGNÉTICO.
- 2 ECUACIONES DE ROTOR.
- 2 ECUACIONES DE DIVERGENCIA.
- 2 ECUACIONES PARA FUENTES.
- 2 ECUACIONES INDEPENDIENTE DE FUENTES.



¿Qué nos dicen estas ecuaciones?

Si notamos, un campo eléctrico cambiante produce un campo magnético variable y viceversa, un campo magnético variable induce un campo eléctrico, entonces estamos hablando de que existe una perturbación que viaja en el espacio.

Supongamos en ausencia de cargas

Al operar las ecuaciones diferenciales de la ley de Faraday y de Ampere-Maxwell, usando el producto cruz triple:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2$$

Se obtiene que :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ecuaciones nos dicen que los campos eléctricos y magnéticos que varían en el tiempo se comportan como una onda electromagnética. También se les llama campos electromagnéticos, pues se inducen mutuamente.

$$\nabla^2 E - \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 B - \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

Notemos que en ambas ecuaciones aparece el término $\mu_o \varepsilon_o$.

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

En una ecuación de onda siempre el término que acompaña la segunda derivada temporal es :

$$\frac{1}{v^2}$$

Donde v representa la rapidez de propagación de la onda

$$\nabla^2 E - \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B - \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Entonces, en la ecuación de onda que obtuvimos para el campo eléctrico y para el magnético, se tiene que

$$\nabla^2 E - \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B - \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

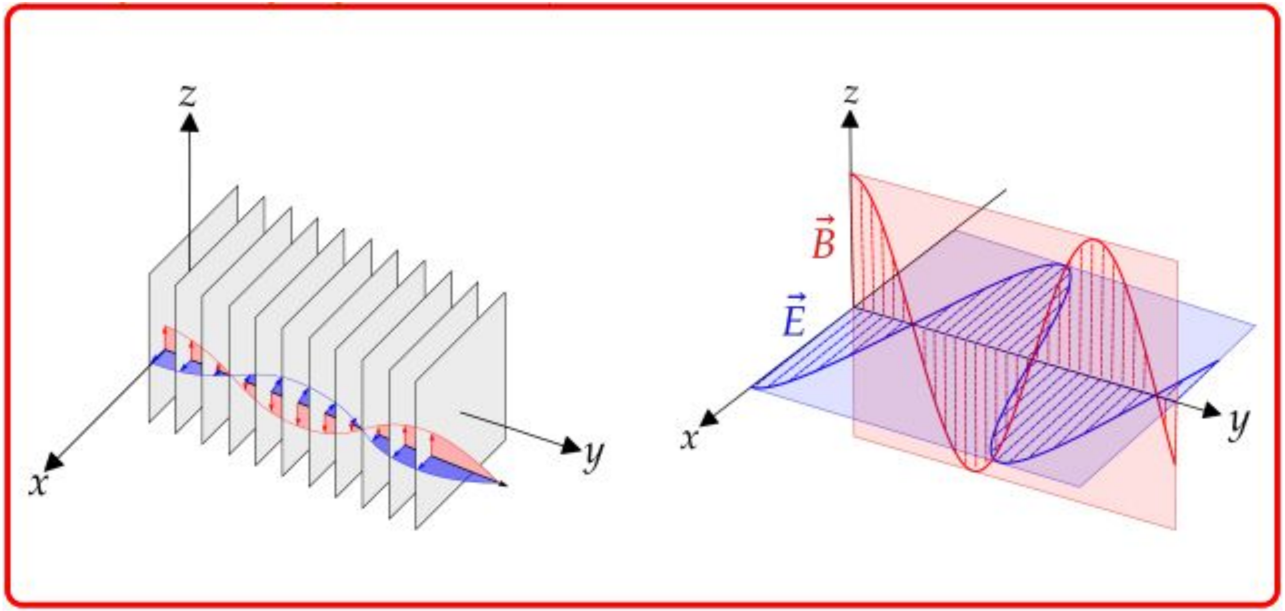
De lo que se obtiene que:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

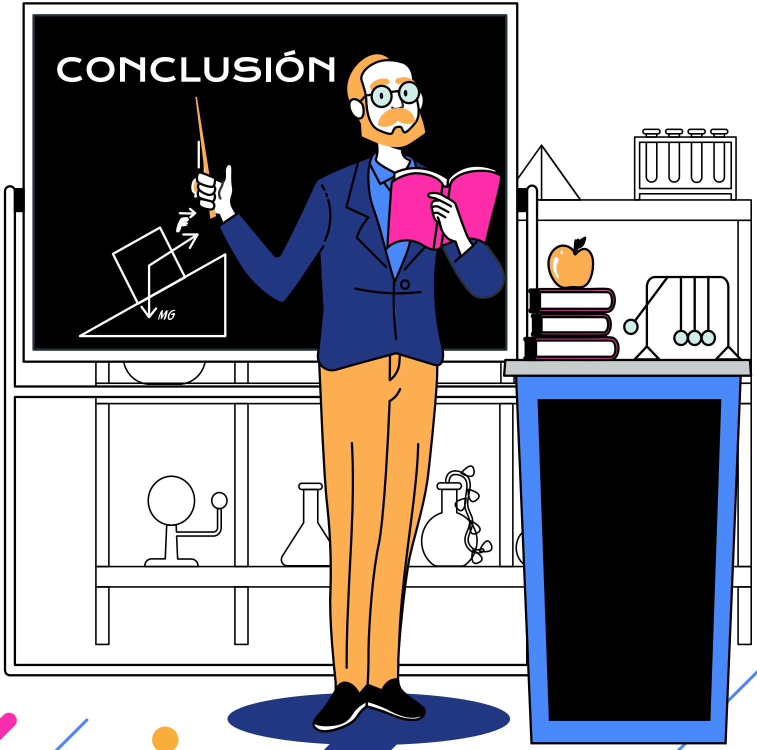
Símbolo	Nombre	Valor numérico	Unidad de medida SI	Tipo
c	Velocidad de la luz en el vacío	2.99792458×10^{8}	metros por segundo	definido
ε_0	Permitividad del vacío	8.854×10^{-12}	faradios por metro	derivado
μ_0	Permeabilidad magnética	$4\pi \times 10^{-7}$	henrios por metro	definido

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS



El científico escocés J.C. Maxwell logró sintetizar los resultados de estudios reunidos durante años por otros grandes científicos dedicados a observar y experimentar para conocer las leyes que gobiernan los fenómenos eléctricos y magnéticos, unificándolos en una sola teoría que los describe como manifestaciones distintas de una misma cosa;

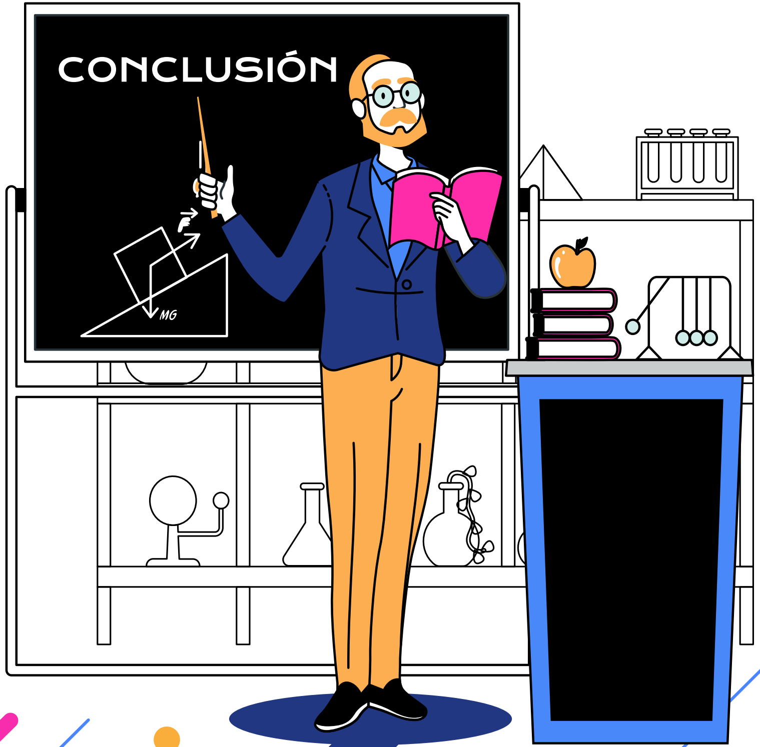
el Electromagnetísmo.



Rapidez de la luz

De acuerdo a los experimentos llevados a cabo por Hippolyte Fizeau, Michelson Morley entre otros, llegaron a la conclusión que la rapidez de propagación de la luz es finita y tiende al valor de :

$$c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

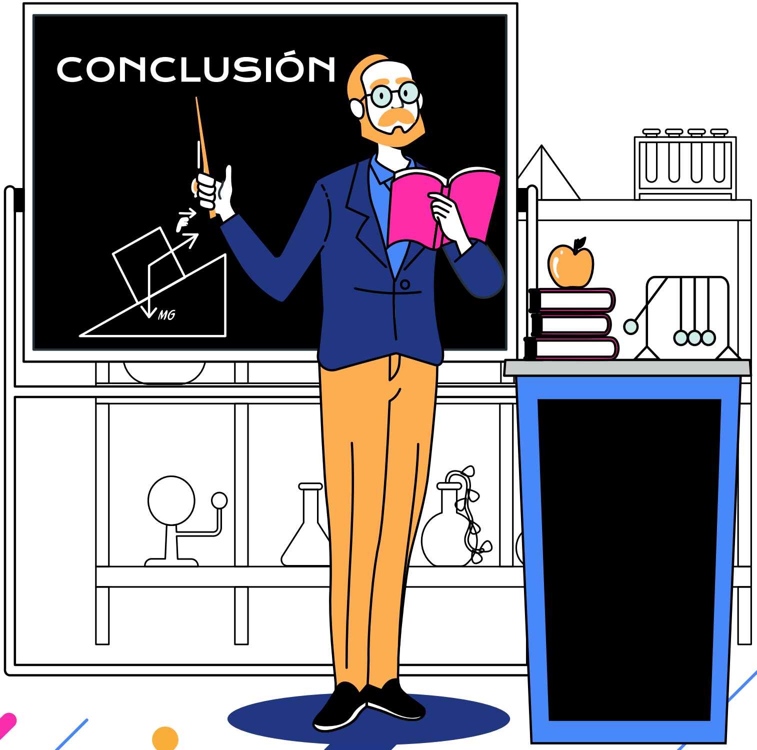


Rapidez de la luz

Historia de la medida de *c* (en km/s)

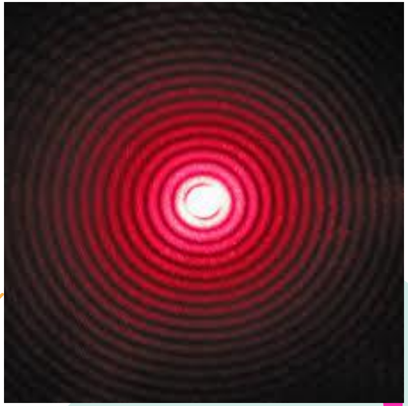
<1638	Galileo, señales con linternas	no concluyente[15 16 17]
<1667	Accademia del Cimento, señales con linternas	no concluyente[18 17]
1675	Rømer y Huygens, lunas de Júpiter	220 000 [19 20]
1729	James Bradley, aberración de la luz	301 000 [21]
1849	Hippolyte Fizeau, rueda dentada	315 000 [21]
1862	Léon Foucault, espejo en rotación	298 000 ±500 [21]
1907	Rosa y Dorsey, constantes electromagnéticas	299 710 ±30 [22 23]
1926	Albert A. Michelson, espejo en rotación	299 796 ±4 [24]
1950	Essen y Gordon-Smith, cavidad resonante	299 792,5 ±3,0 [25]
1958	K.D. Froome, radio interferometría	299 792,50 ±0,10 [26]
1972	Evenson y otros, interferometría láser	299 792,4562 ±0.0011 [27]
1983	17º CGPM, definición del metro	299 792,458 (exacta) [6]

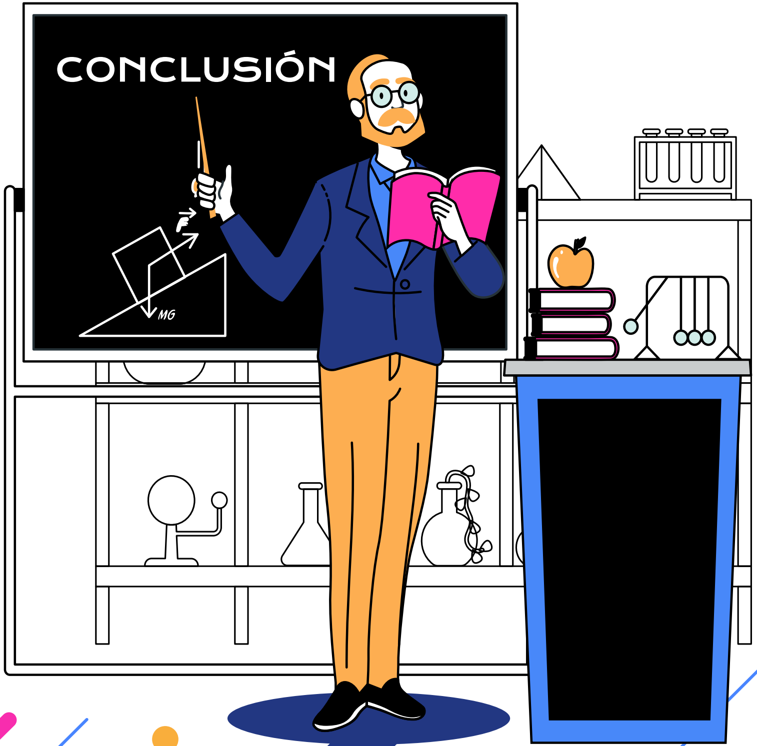
Obtenido de wikipedia:
https://es.wikipedia.org/wiki/Velocidad_de_la_luz



Experimento de la doble rendija y patrón de interferencia:

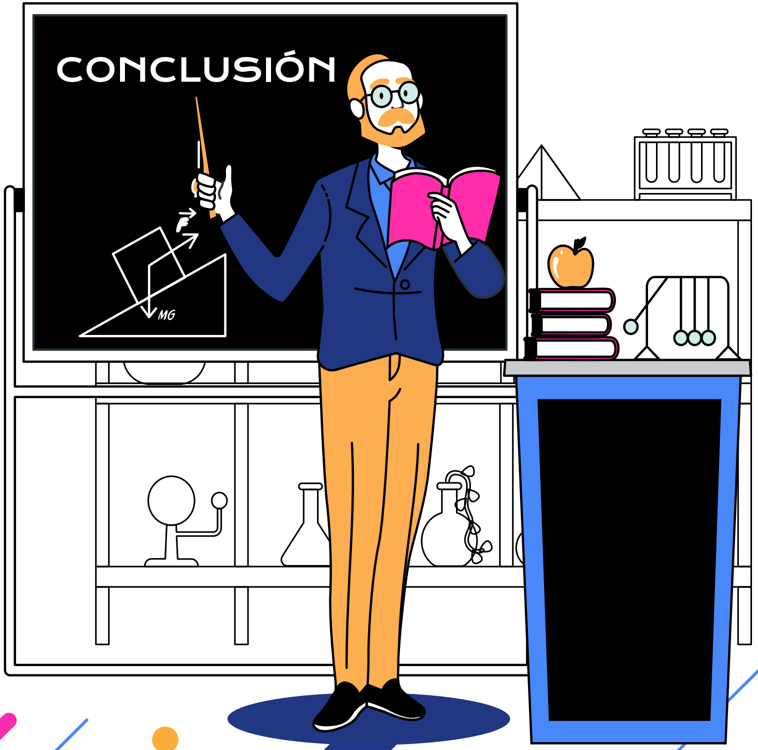
El experimento llevado a cabo por Thomas Young permitió dar a conocer que la luz se comportaba como una onda, pues al pasar por una rendija la luz produce un patrón de interferencia





Ya no se pueden desentender el campo eléctrico y el campo magnético, tampoco se pueden distinguir entre ellos porque en las ecuaciones aparecen esencialmente de forma simétrica.

Ésto le permitió a Maxwell incursionar en la teoría de ondas electromagnéticas y concluir que **la luz es una perturbación electromagnética en forma de ondas que se propagan según las leyes del electromagnetismo**.



¿Qué hemos aprendido?

1. Las ondas electromagnéticas **en el vacío** viajan a velocidad c.
2. En **todos los puntos** de la onda para cualquier instante de tiempo, la magnitud del campo eléctrico se relaciona con la magnitud del campo magnético mediante la relación

$$E_0 = \pm c B_0 \; .$$

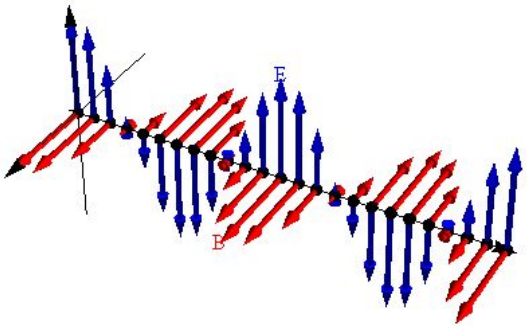
3. El campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares entre sí, y ambos son perpendiculares a la **dirección de propagación** de la onda.

Propiedades
Ondas electromagnéticas

Longitud de onda: medida del largo de una oscilación

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos(kx \pm wt)\hat{y}$$

Frecuencia: corresponde al número de oscilaciones por segundo de los campos electromagnéticos

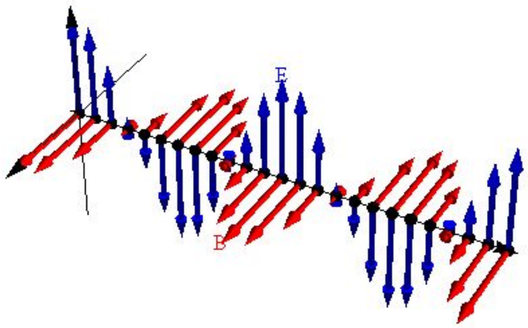


Medio de propagación: Pueden viajar en cualquier medio material, y además en el vacío

¿Cómo identificar λ y la frecuencia en una ecuación de onda

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos(kx \pm wt)\hat{y}$$

En las ecuaciones de onda (profundizará más esto en óptica) la constante que acompaña a x se le conoce como k, y es el ***número de onda.***



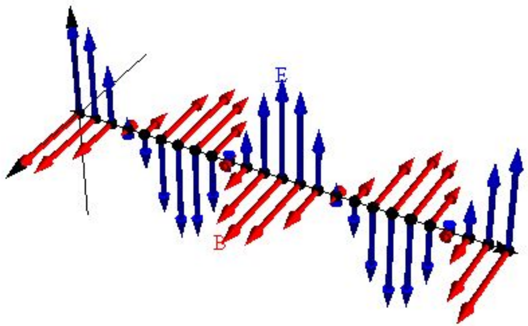
La frecuencia angular ***ω*** representa la cantidad de veces que oscila un campo eléctrico o magnético

¿Cómo identificar λ y la frecuencia en una ecuación de onda

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos(kx \pm wt)\hat{y}$$

El número de onda es por definición:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Y la frecuencia angular ω es:

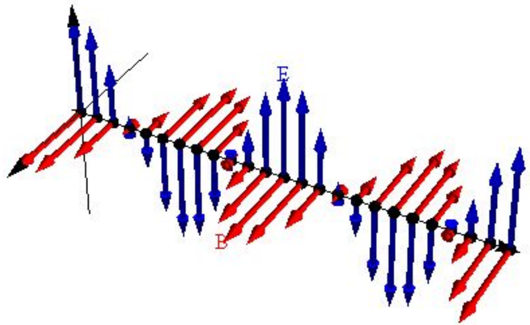
$$\omega = 2\pi f$$

Con esta información podemos saber tanto λ como f.

¿Cómo identificar la dirección de propagación de una onda?

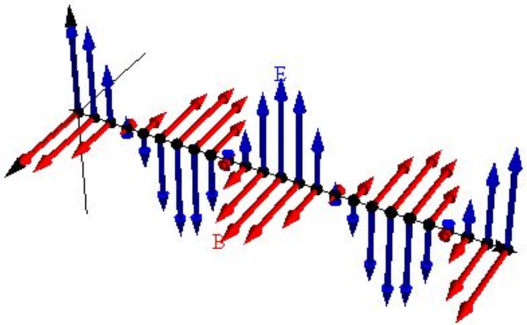
Según la regla de la mano derecha, la dirección de propagación de una onda electromagnética se determina según el vector de poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$$



¿Cómo identificar la dirección de propagación de una onda?

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$$



Otra forma de saber el sentido de propagación, es mirar lo que está dentro de la función coseno:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos(kx \pm \omega t)\hat{z}$$

-Cuando es +, entonces la onda viaja en x negativo
-Cuando es -, la onda viaja en x positivo

En resumen

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos(kx \pm wt)\hat{y}$$

- ***K*** indica el **número de onda** desde donde determinamos la longitud de la onda
- **ω** indica la **frecuencia angular**
- El vector unitario indica la **dirección en que oscila la onda**
- El signo **+ o -** en la función coseno indica **hacia donde se propaga la onda**

Ejercicio 1

“Elementos de una onda electromagnética”

Ejercicio 1: Ondas electromagnéticas

Considere una onda electromagnética que posee el siguiente campo eléctrico

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos((10m^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 s^{-1})t)\hat{z}$$

Determine:

a) La longitud de onda y el período
b) La dirección y el sentido de propagación
c) El campo magnético B asociado a la onda
d) El vector de poynting

a) Determine longitud de onda y el período

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos(\boxed{(10m^{-1})} \cdot x + \boxed{(3 \cdot 10^9 s^{-1})} t)\hat{z}$$

Notemos que las constantes que acompañan a la variable x y t son el número de onda y frecuencia angular, por lo que se puede establecer lo siguiente:

$$k = 10m^{-1} \qquad \omega = 3 \cdot 10^9 s^{-1}$$

Como k=2π/λ y ω=2π/T, entonces despejando se obtiene respectivamente

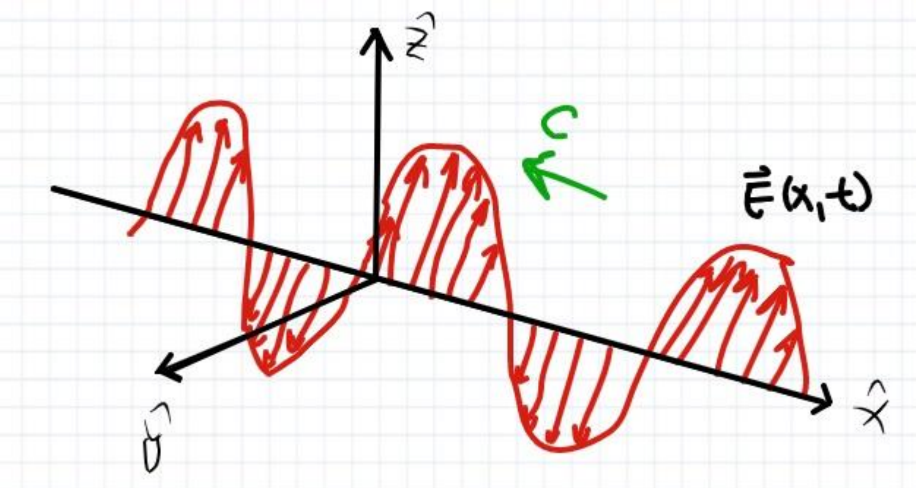
$$\frac{2\pi}{\lambda} = 10m^{-1} \qquad \frac{2\pi}{T} = 3 \cdot 10^9 s^{-1}$$

$$\lambda = 0,62m \qquad T = 2,09 \cdot 10^{-9} s$$

b) dirección y sentido de propagación

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos((10m^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 s^{-1})t)\hat{z}$$

Analizando la ecuación de onda para el campo eléctrico, notamos que la onda se propaga en **x negativo** ya que en el coseno la variable temporal y espacial son positivas (en realidad iguales signos).



c) El campo magnético asociado a la onda

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos((10m^{-1})\cdot x + (3\cdot 10^9 s^{-1})t)\hat{z}$$

Para esta parte debemos usar la tercera ecuación de Maxwell, que nos dice:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

El rotor del campo eléctrico se define como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Notamos que el campo eléctrico solo depende de la variable x y tiene solo componente en la dirección z, por tanto el rotor del campo eléctrico nos queda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = (\frac{\partial E_z}{\partial x})\hat{y} = (\frac{\partial E_0 cos(kx + \omega t)}{\partial x})\hat{y}$$

c) El campo magnético asociado a la onda

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos((10m^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 s^{-1})t)\hat{z}$$

Entonces haciendo la derivada parcial correspondiente respecto a x nos queda:

$$(\frac{\partial E_0 cos(kx + \omega t)}{\partial x})\hat{y} = E_0 ksen(kx + \omega t)(-\hat{y})$$

La 3era ecuación de maxwell nos dice que este resultado es igual a la derivada parcial del campo magnético respecto al tiempo, por lo tanto

$$E_0 ksen(kx + \omega t)(-\hat{y}) = (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 k}{\omega} cos(kx + \omega t)(-\hat{y})$$

Notemos que w/k=c

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} cos(10m^{-1}x + 3 \cdot 10^9 s^{-1} t)(-\hat{y})$$

d) vector de poynting

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos((10m^{-1})\cdot x + (3\cdot 10^9 s^{-1})t)\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} cos(10m^{-1}x + 3\cdot 10^9 s^{-1}t)(-\hat{y})$$

Teniendo ambos campos eléctrico y magnético, entonces para calcular el vector de poynting debemos usar:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}E_0\frac{E_0}{c}cos^2(10m^{-1}x + 3\cdot 10^9 s^{-1}t)(\hat{z})\times(-\hat{y})$$

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}cos^2(10m^{-1}x + 3\cdot 10^9 s^{-1}t)(-\hat{x})$$

¿ALGUNA DUDA CON LAS PREGUNTAS DE LA TAREA N°3?