TOPOLOGIA Algebraica.
Guía No. 3

Agosto 18, 2010

Todos los espacios considerados son espacios de Hausdorff.

1. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento y sea $x = p(\tilde{x})$. Probar que $p_* : \pi_1(\widetilde{X}; \tilde{x}) \to \pi_1(X; x)$ es injectiva.

2. Probar que no existen recubrimientos del toro en la esfera.

3. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento. Sea $x \in X$. Para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y cada $\alpha \in C_{x,x}(I, X)$ escribimos
$$[\alpha] \cdot \tilde{x} = \tilde{\alpha}(1),$$
si $\tilde{\alpha}$ es el levantamiento de α con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Probar que esto define una acción transitiva de $\pi_1(X; x)$ en $p^{-1}(x)$ y que el estabilizador de un punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ es $p_*[\pi_1(\widetilde{X}; \tilde{x})]$.

4. Sea $f : Y \to X$ una función continua que induce el homomorfismo trivial $f_* : \pi_1(Y; y) \to \pi_1\Big(X; f(y)\Big)$ y sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento. Probar que existe un levantamiento $\tilde{f}$ de f a $\widetilde{X}$.

5. Sea $f_n : S^1 \to S^1$ el recubrimiento definido por $f_n(z) = z^n$. Sea Y un espacio topológico que tiene un recubrimiento universal. Probar que dada una función continua $g : Y \to S^1$, existe una función $h : Y \to S^1$ tal que $g = f_n \circ h$ si y sólo si
$$g_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big) \subseteq n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} = \pi_1\Big(S^1; f(y)\Big).$$

6. Existen funciones continuas de S^1 al plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que no se levanten a la esfera?

7. Describa el recubrimiento universal del toro.

8. Probar que no hay recubrimientos de la esfera en el toro.

9. Probar que si $p : \widetilde{X} \to X$ es un recubrimiento con $\widetilde{X}$ compacto, entonces cada punto de X tiene un número finito de pre-imágenes en $\widetilde{X}$.

10. Probar que un espacio compacto con grupo fundamental infinito no puede tener un recubrimiento universal compacto.

11. Describa el recubrimiento universal del espacio que se obtiene al pegar dos círculos por un punto.

12. Describa el recubrimiento universal del espacio $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 es la esfera unitaria y X_2 el segmento que une el polo norte con el polo sur.

13. Sea $p : Y \to X$ un recubrimiento. Probar que X tiene un recubrimiento universal si y sólo si Y tiene un recubrimiento universal.

14. Sea X un espacio cuyo recubrimiento universal es contractible y sea Y un espacio simplemente conexo. Probar que toda función continua $f : Y \to X$ es homotópica a una constante.