Una forma diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad ①$$

se dice exácta si la ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

admite una solución implícita de la forma

$$f(x,y) = cte \quad ② \quad \{ \parallel \text{ con E.E} \}$$

tal que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = M(x,y) \quad y \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = N(x,y). \quad ③$$

esto es, si las derivadas mixtas de $f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

son iguales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{o} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (4)$$

En otras palabras, una forma diferencial es exacta si existe una función escalar $f(x, y)$ tal que

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \Rightarrow dF = M dx + N dy \qquad (5)$$

Por ejemplo:

$$dz = x^2 y^3 dx + x(1+y^2) dy$$

$$M = x^2 y^3 \quad \text{y} \quad N = x(1+y^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces dz **no** es diferencial exacta.

Pero se puede convertir en exácta al multiplicarla por un <u>factor integrante</u>

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy^3}$$

$$\mu(x,y)\, dz = x\, dx + \frac{(1+y^2)}{y^3}\, dy.$$

es trivial mostrar que $\underline{\mu(x,y)\, dz}$ es diff. exácta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Algunas identidades útiles

Si 3 variables independientes x, y, z, están relacionadas mediante $f(x, y, z) = cte$ para alguna función diferenciable, entonces se tiene las siguientes diff. exactas

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \quad (1) \qquad x \equiv x(y, z)$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \quad (2) \qquad z = z(x, y)$$

(1) en (2)

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz\right] + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

$$dz = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz$$

$$\left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy \quad (3)$$

como z y y son independientes, (3) se debe cumplir $\forall\ dz$ y dy. Esto es

$$\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1 \quad \text{ó} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}}_{\text{relación de reciprocidad}} \quad (4)$$

y

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \quad \text{ó (usando (4))}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1}_{\text{Relación cíclica o triple producto}} \quad (5)$$

ahora, si se usa (4) en $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z^{-1} = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}}_{\text{Diferenciación implícita}} \quad (6)$$