AYUDANTÍA 2 - ANÁLISIS REAL

JUAN CARLOS POZO – DAVID URRUTIA

Problema 1

Pruebe que si $m^*(A) = 0$, entonces, $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

Antes de la Demostración

Recordemos que dada una familia numerable de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se verifica

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n).$$

En particular, si $E_1 = A$, $E_2 = B$ y $E_n = \emptyset$ para todo $n > 2$, se tiene que

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B).$$

Ésto será de gran utilidad.

Demostración. Notemos que en general, se verifica que $m*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$ y como $m^*(A) = 0$, se tiene que

$$m * (A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B).$$

por otro lado, dado que $B \subseteq A \cup B$, se tiene que

$$m^*(B) \leq m * (A \cup B) \leq m^*(B)$$

y obtenemos la igualdad. $\square$

1. Problema 2

Si $E \subseteq \mathbb{R}$ verifica $m^*(E) = 0$, entonces, E es Lebesgue Medible.

Proof. Recordemos que un conjunto E es medible si para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Entonces, si E tiene medida exterior nula, la monotonía probada en la ayudantía anterior nos dice que

$$E \cap A \subseteq E \quad \Rightarrow \quad m^*(E \cap A) \leq m^*(E) = 0$$

y dado que $m^*(E \cap A) \geq 0$, se tiene que $m^*(E \cap A) = 0$.

Entonces, debemos demostrar que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c).$$

De este modo,

$$m^*(A) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A) = m^*(E^c \cap A).$$

Por otro lado, como $A \cap E^c \subseteq A$, se verifica que

$$m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A).$$

Por lo tanto,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

y demostramos lo que se quería. □

Problema 3

Pruebe que las $\sigma-$álgebra es cerrada bajo intersecciones numerables. Es decir, si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra de conjuntos y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{A}$, entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Recordemos que dado un conjunto no vacío X, una $\sigma-$álgebra de conjuntos en X es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que verifican lo siguiente:

(1) $X \in \mathcal{A}$.
(2) $E \in \mathcal{A}$ implica $E^c \in \mathcal{A}$ y
(3) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra de conjuntos y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \in \mathcal{A}$ y como $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra, se tiene que

$$A_n^c \in \mathcal{A} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por la propiedad (3), se tiene que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A}.$$

Luego, las leyes de D'Morgan mezclada con la propiedad (2) nos dice que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A},$$

lo que nos dice que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables. □

Problema 4

Pruebe que si un $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ contiene los intervalos de la forma $]a, +\infty[$, entonces, contiene todos los intervalos.

Demostración. La demostración será dividida en varios pasos:

Paso 1: $]-\infty, a] \in \mathcal{A}$ Notemos que

$$]-\infty, a] =]a, +\infty[^c,$$

y como $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra, se tiene que $]-\infty, a] \in \mathcal{A}$.

Paso 2: $]a, +\infty[\in \mathcal{A}$ Para ello, denmostraremos que

$$[a, +\infty, a[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right]$$

Sea $x \in [a, +\infty[$. Entonces, $a \leq x$, además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a - \frac{1}{n} < a \leq x,$$

lo cual implica que $a - \frac{1}{n} < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x \in \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[$ y por ende, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[$. Luego,

$$[a, +\infty[\subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[.$$

Para la contención conversa, sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[$. Entonces, se tiene que $x \in \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que

$$a - \frac{1}{n} < x \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que

$$a < x + \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, se tiene que $a \geq x$ y por ende, $x \in [a, +\infty[$ y por ende,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[\subseteq [a, +\infty[.$$

Por ende, se verifica la igualdad

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[= [a, +\infty[.$$

Ahora, ¿De qué nos sirve ésto? Fácil, notemos que $[a, +\infty[$ es la interseccííon numerable de intervalos de la forma $\left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[$ y como éstos intervalos pertenecen a $\mathcal{A}$, se tiene, por el ejercicio anterior que la intersección de éstos conjuntos también está en $\mathcal{A}$, es decir,

$$[a, +\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{A}.$$

Paso 3: Comentarios intermedios.

Ya hemos demostrado que los intervalos de la forma $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ y $]a, +\infty[$ son elementos de $\mathcal{A}$. Entonces, falta ver los intervalos de la forma

$$]a, b[\,, \quad [a, b[\,, \quad]a, b] \quad \text{y } [a, b].$$

es decir, falta ver cuando los intervalos son acotados.

Paso 4: Los intervalos acotados también son elementos de $\mathcal{A}$.

Para los intervalos de la forma $]a, b[$, nótese que

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[$$

y como $]-\infty, b[\,,]a, +\infty[\in \mathcal{A}$, se tiene que $]a, b[\in \mathcal{A}$.

Para los intervalos de la forma $[a, b[$, nótese que

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap [a, +\infty[$$

y como $]-\infty, b[\,, [a, +\infty[\in \mathcal{A}$, se tiene que $[a, b[\in \mathcal{A}$.

Para los intervalos de la forma $]a, b]$, nótese que

$$]a, b[=]-\infty, b] \cap]a, +\infty[$$

y como $]-\infty, b]\,,]a, +\infty[\in \mathcal{A}$, se tiene que $]a, b] \in \mathcal{A}$.

Y por último, ara los intervalos de la forma $[a, b]$, nótese que

$$]a, b[=]-\infty, b] \;\cap\; [a, +\infty[$$

y como $]-\infty, b]\,, [a, +\infty[\in \mathcal{A}$, se tiene que $[a, b] \in \mathcal{A}$.

Lo cual concluye la demostración. □

EJERCICIO 5

Pruebe que

(1) La traslación de un conjunto F_σ sigue siendo F_σ.
(2) La traslación de un conjunto G_δ sigue siendo G_δ.
(3) La traslación de un conjunto de medida nula tiene medida nula.

Previo a la demostración.

Recordemos que una función $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua si y sólo si $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Además, recordemos algunas propiedades útiles de la preimagen de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y para ello, consideremos una familia $\{O_\tau\}_{\tau \in T}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces,

- $f^{-1}\left(\bigcup_{\tau\in T} O_\tau\right) = \bigcup_{\tau \in T} f^{-1}(O_\tau)$
- $f^{-1}\left(\bigcap_{\tau\in T} O_\tau\right) = \bigcap_{\tau \in T} f^{-1}(O_\tau)$
- $f^{-1}(O^c) = [f^{-1}(O)]^c$ para todo $O \subseteq \mathbb{R}$

Por último, la demostración será dividida en los pasos siguientes:

Paso 1: Dado $c \in \mathbb{R}$, función $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_c(x) = x - c$ es continua en todo su dominio.
Paso 2: Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $f_c^{-1}(A) = A + c$.
Paso 3: La traslación de un conjunto F_σ sigue siendo F_σ.
Paso 4: La traslación de un conjunto G_δ sigue siendo G_δ.
Paso 5: La traslación de un conjunto de medida nula tiene medida nula.

Demostración. **Paso 1: La función f_c es continua.**

En efecto, si $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta = \varepsilon$. Si $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, entonces

$$|f_c(x) - f_c(x_0)| = |x - c - (x_0 - c)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

y por ende, f_c es continua en $\mathbb{R}$.

Paso 2: Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $f_c^{-1}(A) = A + c$.

Consideremos $x \in f_c^{-1}(A)$, entonces, $f_c(x) \in A$, es decir, $x - c \in A$, pero eso implica que $x = (x - c) + c \in A + c$, luego, se verifica la contención

$$f_c^{-1}(A) \subseteq A + c.$$

Por otro lado, si $y \in A + c$, se tiene que existe $x \in A$ con $y = x + c$, entonces,

$$f_c(y) = y - c = x + c - c = x \in A,$$

de modo que $f_c(y) \in A$ y por ende, $y \in f_c^{-1}(A)$. Luego, se verifica que $A + c \subseteq f_c^{-1}(A)$ y por lo tanto, $f_c^{-1}(A) = A + c$.

Paso 3: La traslación de un conjunto F_σ sigue siendo F_σ.

Sea F un conjunto F_σ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces, existen $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos cerrados tales que

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Recordemos que dado que $x \mapsto f_r(x)$ es continua, se tiene que $f_r^{-1}(F_n^c)$ es abierto, pero eso implica que el conjunto

$$F_n + r = f_r^{-1}(F_n) = [f_r^{-1}(F_n^c)]^c$$

es un conjunto cerrado.

Luego,

$$F + c = f_r^{-1}(F) = f_r^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_r^{-1}(F_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n + r)$$

y por ende, $F + r \in F_\sigma$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y todo $F \in F_\sigma$.

Paso 4: La traslación de un conjunto G_δ sigue siendo G_δ.

Sea $G \in G_\delta$ y $r \in \mathbb{R}$. Se verifica la existencia de una familia de conjuntos abiertos $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Luego, se tiene que

$$G_n + r = f_r^{-1}(G_n)$$

es un conjunto abierto por la continuidad en $\mathbb{R}$ de $x \mapsto f_r(x)$.

Entonces,

$$G + r = f_r^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_r^{-1}(G_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (G_n + r)$$

lo que implica que $G + r \in G_\delta$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y todo $G \in G_\delta$.

Paso 5: La traslación de un conjunto de medida nula tiene medida nula.

Recordemos que si E tiene medida exterior nula, E es medible y

$$m(E) = m^*(E) = 0.$$

Si $r \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$m^*(E + r) = m^*(E) = 0,$$

entonces, $E + r$ es medible por ser de medida nula. Además,

$$m(E + r) = m^*(E + r) = 0,$$

por ende, la traslación de un conjunto de medida nula, sigue teniendo medida nula.

Con ésto se concluye la demostración. $\square$