Producto punto, producto cruz y sus aplicaciones

Estos son ejercicios sacados de realizaciones anteriores del curso.

1. Producto interno

1. Si $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ¿cuáles de las siguientes son siempre verdaderas? Algunas podrían no tener sentido. Justifique sus respuestas.

   a) $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$

   b) $\alpha(v \cdot w) = v \cdot (\alpha w)$

   c) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

   d) $u \cdot v + w = u \cdot w + v$

   e) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

   f) $(u + v)\alpha = \alpha u + \alpha v$

   g) $\dfrac{u \cdot v}{u} = v$

   h) $u \cdot v = 0 \Rightarrow u = 0$ ó $v = 0$

   i) $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ó $v = 0$

   j) $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot (\alpha v)$

2. Pruebe que $\forall\ m \in \mathbb{N}$, se tiene que para todo $A_i, B \in \mathbb{R}^3$, $\forall\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}$,

$$< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i, B > = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \ < A_i, B >$$

3. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$ unión el polinomio cero. Defina

$$\forall\ \ p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x],\ < p(x), q(x) > = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   Demuestre que este producto cumple todas las propiedades del producto interno usual en $\mathbb{R}^3$, a saber, simetría, distributividad, homogeneidad y positividad. Calcule por ejemplo $< x^2 + 5x - 8, 2x + 3 >$.

4. Considere el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto $\forall \ \ p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x], \ < p(x), q(x) > = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx.$

   i) ¿Para qué valor de $m, f(x) = mx^2 - 1$ es ortogonal a $g(x) = x$?

   ii) ¿ Son ortogonales los vectores $p(x) = 1 + x$ y $f(x) = 1 + x^2$?

2. Ortogonal o Perpendicular

1. Verifique si las rectas L_1, L_2 son ortogonales, en caso afirmativo vea si son también perpendiculares.

   a) L_1 pasa por $A = (0, 1, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (3, 1, 4)$ y L_2 pasa por $B = (-1, 1, 0)$ y tiene vector director $\vec{w} = (1, 0, 1)$

   b) $L_1 = \begin{cases} x = & 2 + 3t \\ y = & -5 - 2t \\ z = & 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad L_2 : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$

   c) $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z}{7}, \quad L_2 = \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 3 - 7t \\ z = & 5t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

2. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta L_2 que pasa por A y es perpendicular a la recta L_1 para

   a) $A = (2, 6, 1), \ L = \begin{cases} x = & -3 + t \\ y = & t \\ z = & 3t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

   b) $A = (1, 0, 1)$ y L_1 es la recta por $B = (0, 0, -1)$ y $C = (1, 0, 0)$.

3. Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta perpendicular común a las rectas L_1 y L_2 que se cruzan.

   $$L_1 = \begin{cases} x = & 2 + t \\ y = & t \\ z = & -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} x + y & = 2 \\ z & = 0 \end{cases}$$

4. Encuentre la ecuación general del plano que pasa por P y es perpendicular a la recta L en los siguientes casos.

   i) $P = (1, 1, -1), \ L = \begin{cases} x - 2y + z = & 0 \\ 2x - 3y + z = & 1 \end{cases}$

   ii) $P = (0, 0, 0)$ y L pasa por $A = (1, -1, 1)$ y $B = (-1, 1, -1)$.

5. Verificar si Π y L son perpendiculares.

i) $L = \begin{cases} x = & 3+t \\ y = & 1-t \\ z = & 4+t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$, $\Pi : \begin{cases} x = & 1+k \\ y = & 1+t+k \\ z = & 1+k, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

ii) $L = \begin{cases} x = & 1+3t \\ y = & 1-3t \\ z = & t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$, $\Pi : 6x - 6y + 2z - 1 = 0$

6. Verifique si L y Π son perpendiculares para

i) $\Pi : x + 2z = 14,\ L = \begin{cases} 2x - y - z = & 0 \\ 2x + y - z = & 2 \end{cases}$

ii) $\Pi : 2x - 2y + 4z = 1,\ L = \begin{cases} x - y - z = & 0 \\ x + y = & 0 \end{cases}$

3. Norma

1. Enuncie y demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$.

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que

   a) $||A|| = ||B|| \iff < A+B, A-B >= 0.$

   b) $||A+B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 \iff < A, B >= 0.$

   c) $\frac{1}{4}||A+B||^2 - \frac{1}{4}||A-B||^2 = < A, B >$

   d) $< A, B > = \ ||A||||B|| \iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ A = tB.$

   e) $\Big| ||A|| - ||B|| \Big| \leq ||A-B||.$

4. Ángulos

1. Determine el ángulo entre los vectores dados $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Encuentre el ángulo medido en radianes entre los siguientes pares de vectores.

   i) $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0),\ B = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$

   ii) $A = (-1, 1, 1),\ B = (1, 1, 1).$

   iii) $A = (-2, 1, -1),\ B = (2, 1, -2).$

3. i) Encuentre $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $||A|| = 3\sqrt{3}$, $A \perp B, A \perp C$, donde $B = (2, 3, -1)$ y $C = (2, -4, 6)$.

   ii) Encuentre $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $< A, (1, 1, 1) > = -1$, $A \perp B, A \perp C$, donde $B = (4, -1, 5)$ y $C = (1, -2, 3)$.

   iii) Encuentre $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $||A|| = \sqrt{2}$, $A \perp (1, 1, 0)$ y la medida del ángulo entre A y $(1, -1, 0)$ sea de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

4. Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$. Calcule $||2A + 4B||^2$ sabiendo que $||A|| = 1, ||B|| = 2$ y la medida del ángulo entre ambos vectores es de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes.

5. Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$. La medida en radianes del ángulo entre A y B es de $\dfrac{\pi}{4}$. Sabiendo que $||A|| = \sqrt{5}$ y $||B|| = 1$, encuentre la medida en radianes del ángulo entre $A + B$ y $A - B$.

6. Determinar todos los vectores de norma 2 que sean ortogonales simultáneamente a $(2, 1, 2)$ y a $(-1, 3 - 4)$.

7. Encuentre el ángulo entre las rectas

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x &= 0 + (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})\lambda \\ y &= 1 - \sqrt{2}\lambda \\ z &= 0 + (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\lambda \end{cases} \qquad \mathcal{L}' \begin{cases} x + 2y - 1 &= 0 \\ 2y + z - 7 &= 0 \end{cases}$$

8. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos:

   i) $\mathcal{P} : x + 3y - 2z + 5 = 0 \quad \mathcal{P}' : 2x + z - 15 = 0.$

   ii) $\mathcal{P} : (2\sqrt{2} + 3)x + \sqrt{2}y + (2\sqrt{2} - 3)z + 1 = 0, \mathcal{P}' : 2x + y + 2z - 5 = 0$

5. Proyecciones

1. Encuentre la proyección del primer vector en la recta generada por el segundo:

   a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Encuentre proy $\text{esc}_B A$, proy $\text{esc}_A B$, $\pi_A(B)$ y $\pi_B(A)$ para

a) $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, -1, 1)$.

b) $A = (1, 3, 5)$ y $B = (-3, 1, 0)$.

6. Distancias

1. Calcule la distancia entre los puntos dados

   a) $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$.

   b) $(3, 2, 4)$, $(-2, 7, 3)$.

2. Calcular la distancia de $P = (-2, 4, 3)$ a la recta $L = \begin{cases} x = & 2z + \dfrac{1}{2} \\ y = & 4 - 2\dfrac{z}{3} \end{cases}$

3. Calcular la distancia de $P = (5, 2, 3)$ al plano $\Pi : 3x + 4y - z - 6 = 0$.

4. Sean las rectas

$$\mathcal{L} : \begin{cases} 2x + 12y + z + 4 & = & 0 \\ x + 9y + z + 3 & = & 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}' : (x, y, z) = (-2, -\frac{1}{3}, 1) + \lambda(3, -1, 6)$$

   Calcule la distancia entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

5. Sean $\mathcal{P} : 2x + 3y + 8z - 24 = 0$ y $\mathcal{L} : \begin{cases} x & = & 3 + \lambda \\ y & = & -1 + 2\lambda \\ z & = & 2 - \lambda \end{cases}$

   Calcule la distancia entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$.

6. Encuentre la distancia entre los planos

$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 8 = 0 \qquad \mathcal{P}' : 4x - 2y + 2z + 24 = 0$$

7. Producto cruz

1. Sean $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (3, 4, 0)$. Calcule el área del triángulo ABC usando el producto cruz.

2. Sea $\mathcal{L}$ la recta determinada por los puntos B y C y sea A un punto fuera de $\mathcal{L}$. Demuestre que la distancia de A a $\mathcal{L}$ está dada por

$$d(A, \mathcal{L}) = \frac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

3. Sean $v, w, u \in \mathbb{R}^3$. Demuestre

$$v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = u \cdot (v \times w)$$

4. Demuestre que $u \times v = -v \times u$.

5. Demuestre que u y v son linealmente dependientes si y solo si $u \times v = \overrightarrow{0}$.

6. Demuestre que u, v y w son linealmente dependientes si y sólo si $u \cdot (v \times w) = 0$.

7. Encuentre el área del paralelógramo formado por los vectores $A = (7, -1, 2)$ y $B = (1, 4, -2)$.

8. Sean $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que el producto mixto de los vectores A, B, C es

$$[A, B, C] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} a_3$$

9. i) Pruebe que A, B, C son coplanares si y sólo si $[A, B, C] = 0$.

   ii) Encuentre $n \in \mathbb{R}$ tal que $A = (2, -3, 1)$, $B = (1, m, 3)$ y $C = (4, 5, -1)$ son coplanares.

10. Encuentre el volumen del paralelepípedo formado por los siguientes vectores

    $A = (3, -1, 1), B = (1, 7, 2)$ y $C = (2, 1, -4)$.

11. Encuentre las coordenadas de un vector P tal que sea ortogonal a $Q = (1, 2, 3)$ y a $R = (1, -1, 1)$ y además $[P, Q, R] = 0$.

8. Todo mezclado

1. ¿Cómo se puede expresar la colinealidad de 3 puntos en términos de dependencia lineal de vectores?

2. ¿Cómo se puede expresar la dependencia lineal de 3 vectores en términos de coplanaridad?

3. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $Q = (1, 2, -1)$ y es perpendicular a $L = \begin{cases} x - y = & 0 \\ x + y - z = & 0 \end{cases}$

4. Calcule los valores de a para que las rectas L_1 y L_2 sean ortogonales.

$$L_1 = \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = & 0 \\ -x + y + 3z - 3 = & 0 \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} x = & -1 - t \\ y = & 3 + t \\ z = & 1 + at, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases},$$

5. Sea $L = \begin{cases} x + y - z + 2 = & 0 \\ x - y + z - 2 = & 0 \end{cases}$

i) Encuentre la ecuación del plano que pasa por $Q = (2, -1, 1)$ y contiene a la recta L.

ii) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta L y es paralelo a la recta $L_1 = \begin{cases} x = & 2 + t \\ y = & 1 - 2t \\ z = & -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

6. Sean $\mathcal{L} : \begin{cases} 2x + y + 3 &= 0 \\ y - 3z - 13 &= 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} 6x - y - 21 &= 0 \\ y + z - 2 &= 0 \end{cases}$

Encuentre la ecuación de una recta $\mathcal{L}_1$, ortogonal a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, que contenga al punto $(-2, 1, -4)$.

7. Sean $\mathcal{L} : \begin{cases} x &= 1 + 3\lambda \\ y &= -5 - 6\lambda \\ z &= -6 - 2\lambda \end{cases} \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} x &= 3 + \mu \\ y &= -3 + 6\mu \\ z &= 5 - 6\mu \end{cases}$

Encuentre la ecuación de una recta $\mathcal{L}_1$, ortogonal a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ y que corte a ambas. Encuentre los puntos de intersección de $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ y calcule la distancia entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

8. En $\mathbb{R}^3$, determine la posición relativa de las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$:

a) $\mathcal{L} : \begin{cases} x &= 2 + \lambda \\ y &= -1 + 5\lambda \\ z &= 3 - 2\lambda \end{cases} \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= 2 - 5\lambda \\ z &= -1 + 2\lambda \end{cases}$

b) $\mathcal{L} : \begin{cases} 2x + y - z - 1 &= 0 \\ 3x + y + z + 3 &= 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} 5x + 2y - 11 &= 0 \\ 5x + 3y - 5z - 4 &= 0 \end{cases}$

c) $\mathcal{L} : \begin{cases} 2x + 12y + z + 4 &= 0 \\ x + 9y + z + 3 &= 0 \end{cases} \quad \mathcal{L}' : (x, y, z) = (1, 8, -2) + \lambda(3, -1, 6)$

9. Determine la posición relativa de los planos $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ en $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathcal{P} : 3x + 2y - z + 5 = 0$
$\mathcal{P}' : (x, y, z) = (1, 8, -3) + \lambda(2, -3, 0) + \mu(-1, 0, -3)$

b) $\mathcal{P} : x - 6y + 2z + 1 = 0 \quad \mathcal{P}' : \begin{cases} x &= -2 + 4\lambda - 8\mu \\ y &= 3 + \lambda - \mu \\ z &= -1 + \lambda + \mu \end{cases}$

10. Encuentre la distancia entre los planos Π_1 y Π_2 para

    i) $\Pi_1 : 2x + 3y - z + 3 = 0,\ \Pi_2 : -4x - 6y + 2z + 9 = 0.$

    ii) $\Pi_1 = \begin{cases} x = & 2 - t - k \\ y = & k \\ z = & t, \quad t, k \in \mathbb{R} \end{cases}, \ \Pi_2 : x + y + z = \dfrac{5}{2}.$

11. Determine la posición relativa de la recta $\mathcal{L}$ y el plano $\mathcal{P}$: (Explique primero qué es lo que significa que una recta y un plano sean paralelos):

    a) $\mathcal{L} : \begin{cases} 2x + y - z - 3 &= 0 \\ x - 2y + 3z + 1 &= 0 \end{cases} \qquad \mathcal{P} : 3x - y + 2z + 1 = 0$

    b) $\mathcal{L} : \begin{cases} x &= 3 + \lambda \\ y &= -1 + 2\lambda \\ z &= 2 - \lambda \end{cases} \qquad \mathcal{P} : 2x + 3y + 8z - 24 = 0$

    c) $\mathcal{L} : \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 4 &= 0 \\ x + y - 2z - 1 &= 0 \end{cases} \qquad \mathcal{P} : \begin{cases} x &= -4 + 2\lambda - 5\mu \\ y &= 1 + 7\lambda - 6\mu \\ z &= 3 - 3\lambda + 2\mu \end{cases}$

12. Encuentre la ecuación de una recta que sea paralela al plano $\mathcal{P}$, contenga el punto $(4, 3, 18)$ y corte a la recta $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{P} : 3x - 2y + z - 10 = 0, \qquad \mathcal{L} : \begin{cases} x &= 2 + 3\lambda \\ y &= -1 - 2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

13. Sea $\mathcal{L} : (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(3, -1, 2), A = (1, 3, 1), B = (1, 5, 2)$. Encuentre ecuaciones (vectorial e implícita) del plano $\mathcal{P}$ talque $A, B \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}//\mathcal{L}$.

14. Sea $ax + by + cz + d = 0$ la ecuación de un plano $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que dos vectores directores de $\mathcal{P}$ son los vectores $(b, -a, 0)$ y $(c, 0, -a)$ de $\mathbb{R}^3$.

15. Sean $\mathcal{L} : (x, y, z) = (1, 3, 2) + \lambda(-2, -5, 0), \mathcal{L}' : (x, y, z) = (7, 8, 9) + \mu(3, 0, -5)$ y $A = (1, -1, 1)$. Encuentre una ecuación del plano $\mathcal{P}$ tal que $A \in \mathcal{P}, \mathcal{L}//\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}'//\mathcal{P}$.

16. Considere la recta $\mathcal{L} : \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 4 &= 0 \\ x + y - 2z - 1 &= 0 \end{cases}$ y $P = (2, 1, 3)$. Encuentre la ecuación del plano $\mathcal{P}$ ortogonal a $\mathcal{L}$ y que pase por P.

17. Sea $P = (2, -6, -3)$ y $\mathcal{L} : (x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(2, 1, -3)$. Encuentre la proyección ortogonal Q de P sobre $\mathcal{L}$ y calcule la distancia de P a $\mathcal{L}$.

18. Calcular la distancia entre las rectas

    i) $L_1 : x = \dfrac{y-3}{2} = z - 2, \;\; L_2 : x - 3 = \dfrac{y+1}{2} = z - 2.$

    ii) $L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-2}, \;\; L_2 = \begin{cases} x + y + z = & 1 \\ -x + y + 2z = & 1 \end{cases}$

19. Considere el plano $\mathcal{P} : 6x + 2y + 3z + 22 = 0$ y $A = (4, 3, -1)$. Encuentre la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por A y es ortogonal a $\mathcal{P}$. Calcule la distancia de A a $\mathcal{P}$ y encuentre la proyección de A sobre $\mathcal{P}$.

20. En general $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Tome por ejemplo, $A = (2, 3, 1)$, $B = (-3, 1, 2)$, $C = (1, 2, 3)$. Para todo $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, pruebe que $(A \times B) \times C =< A, C > B- < B, C > A$.

21. Considere el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(-3, 5)$ encuentre:

    a) Las coordenadas del ortocentro (punto de intersección de las alturas).

    b) Las coordenadas del baricentro (punto de intersección de las transversales de gravedad).

    c) El área del triángulo.

    d) El seno del ángulo en A.