Geometría Vectorial

Estos son ejercicios sacados de realizaciones anteriores del curso.

1. En $\mathbb{R}^2$

1. Determine si las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, son paralelas.

$$\mathcal{L} : 3x + y + 9 = 0 \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} x &= 2 - 2\lambda \\ y &= -1 + 6\lambda \end{cases}$$

2. Encuentre la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}'$ que contiene al punto $(3, -1)$ y es paralela a $\mathcal{L} : 2x - 5y + 4 = 0$

3. Encuentre la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}'$ que contiene al punto $(2, 3)$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $A = (-6, 1)$ y $B = (1, -4)$.

2. En $\mathbb{R}^3$

1. Dados los puntos $P_1 = (7, -1, 2) P_2 = (1, 3, 5), P_3 = (8, 0, 1)$. Encuentre un punto P_4 tal que P_1, P_2, P_3, P_4 formen un paralelógramo

2. Encuentre las ecuaciones vectorial y paramétrica de las rectas siguientes

   i) Pasa por los puntos $A = (1, -2, 5)$ y $B = (1, 1, 2)$.

   ii) Pasa por $A = (5, -1, 4)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, 1, 3)$.

   iii) Dibuje los puntos en $\mathbb{R}^3$.

3. Dados los puntos $A = (m, 2, -3), B = (2, m, 1), C = (5, 3, -2)$ determine el valor de m para que estén en una misma recta y encuentre la ecuación de dicha recta.

4. Encuentre el valor de n para que las rectas L_1 y L_2 sean paralelas, donde

$$L_1 = \begin{cases} x = & 5 + 4t \\ y = & 3 + t \\ z = & -t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} , \quad L_2 : \frac{x}{n} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 3}{n}$$

5. El plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ pasa por el punto $A(-2,3,5)$ y tiene vectores directores $v=(-4,3,5)$, y $w=(-2,3,5)$. ¿Cuál(es) de los siguientes puntos pertenece al plano?

   $P_1=(-8,3,10),\ P_2=(8,6,14),\ P_3=(-12,6,10)$.

6. Encuentre una ecuación paramétrica del plano $3x-2y+z-12=0$, en $\mathbb{R}^3$.

7. Encuentre una ecuación vectorial de la recta en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y-7z-4 & = & 0 \\ x+y-2z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

8. Encuentre las ecuaciones vectorial e implícita del plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos $A=(10,-1,0), B=(15,0,-1)$ y $C=(12,-1,-1)$.

9. Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{lcl} x-2y-3 & = & 0 \\ 3y-2z+7 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathcal{L}':\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6-5\lambda \\ y & = & 3-4\lambda \\ z & = & 5-3\lambda \end{array}\right.$$

   a) Demuestre que $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'$ es un punto; encuéntrelo.

   b) Encuentre una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ que contiene a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

10. i) Encuentre las ecuaciones paramétricas e implícita o cartesiana del plano Π que pasa por $A=(1,7,-2), B=(4,5,0), C=(6,3,8)$. Vea primero que $A;B;C$ no son colineales.

    ii) Encuentre otros 3 puntos del plano Π.

    iii) Encuentre el valor de n para que $(1,n,5)$ esté en el plano Π.

11. Escriba las ecuaciones simétricas de la recta

$$L:\begin{cases} x+y+z= & 3 \\ y-z-1= & 1 \end{cases}$$

12. Averigue la posición de las rectas respectivas

    i) $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ y $L_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$

    ii) $L_3:\begin{cases} x+2y+3z= & 2 \\ x-2y+2z= & -1 \end{cases}$ y $L_4:\dfrac{2-x}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

13. Encuentre las ecuaciones paramétricas e implícita de los planos $XY,\ XZ$ e YZ.

14. Averigue la posición de los planos respectivos

 i) $\Pi_1 : 3x + 5y - 2z = 4 \quad \text{y} \quad \Pi_2 : 2x + 6y - 3z = 4$

 ii) $\Pi_1 : x - 5y + 3z = 8 \quad \text{y} \quad \Pi_2 : 3x + 5y - 4z = 7$

15. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $A = (2, 0, 1)$ y contiene a la recta $L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$

16. Pruebe que la recta L está contenida en el plano Π, donde

$$L : \begin{cases} x = & 3 + 3t \\ y = & 1 + t \\ z = & 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad \Pi = \begin{cases} x = & 1 + r + s \\ y = & 1 - r + s \\ z = & 1 + r - s, \quad r, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

17. Encuentre la ecuación de la recta determinada por los planos Π_1, Π_2 donde

$$\Pi_1 = \begin{cases} x = & 2 - 4t \\ y = & 3k + t \\ z = & 3 - k + t, \quad k, t \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad \Pi_2 : x + y - z = 3$$

18. Dados $\Pi_1 : mx + 2y - 3z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \Pi_2 : 2x - 4y + 6z + 5 = 0$. Encuentre m para que los planos sean paralelos.

19. Estudiar según el valor de $k \in \mathbb{R}$, la posición relativa de las rectas

$$L_1 = \begin{cases} x = & (k+2)t \\ y = & 1 \\ z = & k, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad L_2 : \frac{k - x}{1} = \frac{y - 2}{k^3} = \frac{z - k}{k - 1}$$

20. Sean $A, B \in \mathbb{R}^3$. Se define el segmento de A a B como el conjunto $[A, B] = \{(1-\lambda)A + \lambda B\}$. Vea si el plano $\Pi : 2x + 3y - 4 = 0$ corta o no al segmento de $A = (2, 1, 3)$ a $B = (3, 2, 1)$.

21. Estudiar según el valor de $k \in \mathbb{R}$, la posicíon relativa de la recta L y el plano Π.

$$L = \begin{cases} kx + y + z = & k^2 \\ x + y + kz = & k \end{cases}, \quad \Pi : x + y + 2kz = 2.$$

22. Discutir la posición relativa de los planos según el parámetro k.

$$\begin{cases} \Pi_1 : x + y + kz = & 1 \\ \Pi_2 : kx + y + z = & 1 \\ \Pi_3 : 2x + y + z = & k \end{cases}$$