Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía XX

13 de Noviembre, 2023

Ejercicios.

I. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, sean α, β y γ vectores linealmente independientes en V. Demostrar que $(\alpha+\beta), (\beta+\gamma)$ y $(\gamma+\alpha)$ son linealmente independientes.

II. Sea $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el $\mathbb{R}$-Espacio Vectorial de matrices cuadradas de tamaño 2×2 y sea $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ el sistema formado por las matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que S es base de V

b) Hallar las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 en la base S de una matriz génerica M de V:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

III. Sea V el Espacio Vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; Sea V_p el subconjunto de las funciones pares, $f(-x) = f(x)$; Sea V_i el subconjunto de las funciones impares, $f(-x) = -f(x)$.

a) Demostrar que V_p y V_i son Subespacios Vectoriales.

b) Demostrar que $V_p + V_i = V$.

c) Demostrar que $V_p \cap V_i = \{0\}$.

IV. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V tal que la unión conjuntista de W_1 y W_2 sea también un subespacio. Demostrar que uno de los subespacios W_i está contenido en el otro.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía XXI

14 de Noviembre, 2023

Ejercicios.

I. En $\mathbb{C}^3$, sean
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1, & 0, & -i\end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix}1+i, & 1-i, & 1\end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix}i, & i, & i\end{pmatrix}$$
Demostrar que estos vectores forman una base de $\mathbb{C}^3$. ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a,b,c) en esta base?

II. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Suponga que hay un número finito de vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ en V que generan a V. Demostrar que V es de dimensión finita.

III. Sea V el conjunto de las matrices 2×2, con elementos complejos que satisfacen $A_{11} + A_{22} = 0$.

a) Hacer ver que V es un Espacio Vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación de matrices por un escalar.

b) Hallar una base de este Espacio Vectorial.

c) Sea W el conjunto de todas las matrices A de V tales que $A_{21} = \bar{A}_{21}$ (la barra representa el conjugado complejo). Demostrar que W es un subespacio de V y hallar una base de W.

IV. En el espacio $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de las matrices reales de 2×2 se consideran los sistemas $S = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ y $T = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$ donde:
$$M_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}, \ M_3 = \begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}, \ M_4 = \begin{bmatrix}0 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}$$
$$N_1 = \begin{bmatrix}-2 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}, \ N_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}, \ N_3 = \begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 0\end{bmatrix}, \ N_4 = \begin{bmatrix}0 & 4\\2 & 1\end{bmatrix}, \ N_5 = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$
Comprobar si S y T son sistemas equivalentes. Hallar bases de los subespacios que engendran S y T.