AYUDANTÍA 4 – ANÁLISIS II POSGRADO

GONZALO ROBLEDO VELOSO – DAVID URRUTIA VERGARA

Como es habitual, la sigla **e.n.v** corresponde a la de Espacio Vectorial Normado.

Ejercicio 1

Dado un espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||_E)$. Demuestre que todo subespacio vectorial $F \neq E$ tiene interior vacío.

Demostración. Sea V un subespacio de E con $V \neq E$ y supongamos que tiene interior no vacío, es decir, existe $x \in V$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq V$. La hipótesis nos dice que existe $u \in E$ con $u \notin V$, lo cual implica que $u \neq 0$ (si u fuese el vector nulo, $u \in V$ inmediatamente, lo cual no es cierto). Entonces, podemos considerar el vector $y = x + \frac{r}{2}\frac{u}{||u||}$, el cual verifica

$$||y - x|| = \frac{r}{2} < r$$

y por ende, $y \in B(x,r)$. Sin embargo, $y \notin V$, en efecto, si suponemos que $y \in V$, entonces, la suposición de que $x \in V$ combinado con que V es un subespacio vectorial de E implican que

$$u = \frac{2||u||}{r}(y - x) \in V$$

lo cual contradice que $u \in V$. De este modo, hemos probado que $y \in B(x,r) \subseteq V$ y además, $y \notin V$, lo cual implica que $y \in V$ e $y \notin V$, lo cual nos conlleva a otra contradicción. Esto demuestra que no existe tal $x \in \mathrm{Int}V$ lo cual equivale a que $\mathrm{Int}V = \varnothing$. □

Ejercicio 2

Sea E un $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Recordemos que el Lema de Zorn ayuda a demostrar la existencia de una base de E. Si $(E, ||\cdot||)$ es un $\mathbb{R}-$espacio de Banach de dimensión infinita, ninguna base de Hamel puede ser numerable. (Sí, el Lema y Teorema de Baire serán de utilidad).

Proof. Supongamos lo contrario, es decir, sea $\{e_i\}_{n\in I}$ una base de Hamel de E donde I es un conjunto numerable, entonces, $I = \{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por ende, la base $\{e_i\}_{i\in I}$ se puede escribir como

$$\{e_i\}_{i\in I} = \{e_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}},$$

Entonces, consideremos el espacio

$$F_n := \langle e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}\rangle$$

Por construcción, se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} F_n = n$ y por ende, F_n es de dimensión finita, luego, se tiene que cada F_n es cerrado y de este modo,

$$\overline{F_n} = F_n \implies \mathrm{Int}\left(\overline{F_n}\right) = \mathrm{Int}(F_n) = \varnothing$$

donde la última igualdad se debe al ejercicio anterior.

Además, cada F_n es subconjunto de E, lo cual implica que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq E$$

y por otro lado, si $v \in E$, entonces, existen únicos $k \in \mathbb{N}$ y escalares $\{a_j\}_{j=1}^{k}$ tales que

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ke_k \in F_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$

lo cual implica la contención

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

lo cual implica la igualdad

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E.$$

Luego, por hipótesis se tiene que E es un espacio de Banach, lo cual implica que es completo con la métrica inducida por su norma $||\cdot||$. De esta forma, el Teorema de la categoría de Baire establece la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\mathrm{Int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$ lo cual contradice que $\mathrm{Int}(F_{n_0}) = \varnothing$. Entonces, I nunca pudo ser numerable. $\square$

EJERCICIO 3

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $p : E \to \mathbb{R}$ una función con las propiedades:

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$.

(ii) Para todo $x \in E$ fijo, la función $\lambda \mapsto p(\lambda x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

(iii) Si una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $p(y_n) \to 0$, entonces, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo se tiene que $p(\lambda y_n) \to 0$.

Asuma que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores en E que verifica $p(x_n) \to 0$. Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a α en $\mathbb{R}$, entonces, demuestre que $p(0) = 0$ y $p(\alpha_n x_n) \to 0$.

Demostración. Por un lado, como $p(x_n) \to 0$, se tiene que

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} p(x_n) = 0}_{\text{por hipótesis}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\lim_{n\to+\infty} p(-x_n) = 0}_{\text{por (iii)}}$$

entonces, por (i) tenemos la siguiente estimación

$$p(0) = p(x_n + (-x_n)) \leq p(x_n) + p(-x_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces, si $n \to +\infty$, se verifica

$$p(0) \leq \lim_{n\to+\infty} p(x_n) + \lim_{n\to+\infty} p(-x_n) = 0,$$

es decir, $p(0) \leq 0$. Por otro lado, (i) también nos dice que se tiene que

$$p(0) = p(0+0) \leq p(0) + p(0) = 2p(0),$$

entonces, $p(0) \geq 0$ y por ende, $p(0) = 0$.

Para demostrar la afirmación

$$\lim_{n\to+\infty} p(\alpha_n x_n) = 0$$

con $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergente y $\{x_n\}_n \subseteq E$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} p(x_n) = 0$, tenemos que demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } |p(\alpha_n x_n)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_\varepsilon.$$

Como $\{\alpha_n\}_n$ es una sucesión convergente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = \alpha.$$

Como $p(x_n) \to 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{k\to+\infty} p(\lambda x_k) = 0.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$F_k := \{\lambda \in \mathbb{R} \colon |p(\lambda x_\ell)| \leq \varepsilon \text{ para cada } \ell \geq k\}.$$

Notemos primeramente que cada F_k es un conjunto cerrado, para ello, consideremos una sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\lambda_k \in F_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda_k \to \lambda$. Entonces, si $\ell \geq k$, se tiene que

$$|p(\lambda_j x_\ell)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}$$

entonces, por la hipótesis (ii), se tiene que $t \mapsto p(tx_\ell)$ es continuo para todo $\ell \geq k$ fijo, entonces, la continuidad secuencial establece que

$$p(\lambda x_\ell) = \lim_{j\to+\infty} |p(\lambda_j x_\ell)| \leq \varepsilon$$

y dado que es para todo $\ell \geq k$, se obtiene que $\lambda \in F_k$ y por ende, F_k es cerrado.

Por otro lado, tenemos que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = \mathbb{R},$$

pues, la contención $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k \subseteq \mathbb{R}$ se verifica por la definición de cada F_k. Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{R}$, recordemos que la hipótesis (iii) combinado con $p(x_k) \to 0$ implica que $p(\lambda x_k) \to 0$, entonces, al considerar $\varepsilon > 0$ definido previamente, existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con $|p(\lambda x_\ell)| < \varepsilon$ para todo $\ell \geq K_\varepsilon$, es decir,

$$\lambda \in F_{K_\varepsilon} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$$

y verificamos la igualdad $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = \mathbb{R}$.

Luego, como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, el Teorema de la Categoría de Baire establece la existencia de $k_0 \in \mathbb{N}$ con $\operatorname{Int} F_{k_0} \neq \varnothing$. Es decir, existen $\lambda_0 \in F_{k_0}$ y $\delta > 0$ tales que

$$B(\lambda_0, \delta) \subseteq \operatorname{Int} F_{k_0} \subseteq F_{k_0},$$

es decir, para todo $t \in]-\delta, \delta[$, se tiene que

$$\lambda_0 + t \in B(\lambda_0, \delta) \subseteq \operatorname{Int} F_{k_0} \subseteq F_{k_0},$$

lo cual implica que $\lambda_0 + t \in F_{k_0}$, luego, la definición de F_{k_0} establece que cada $t \in]-\delta, \delta[$ satisface

$$-\varepsilon \leq p(\{\lambda_0 + t\}x_\ell) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \ell \geq k_0. \tag{1}$$

Recordemos que $\alpha_k \to \alpha$, entonces, la propiedad (iii) y la propiedad $p(x_k) \to 0$ implica que existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\varepsilon \leq p(\{\alpha - \lambda_0\}x_\ell) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \ell \geq K_0. \tag{2}$$

De este modo, al escoger $K_\varepsilon = \max\{K_0, K_1\} \in \mathbb{N}$, las estimaciones (1) y (2) junto con (i) nos ayudan a obtener lo siguiente

$$p(\alpha_\ell x_\ell) = p(\{\lambda_0 + \alpha_\ell - \alpha)x_\ell) + p(\{\alpha - \lambda_0)x_\ell) \leq 2\varepsilon \tag{3}$$

y además, de (i) obtenemos que

$$p(\{\lambda_0 + \alpha_\ell - \alpha)x_\ell) \leq p(\{\lambda_0 - \alpha)x_\ell) + p(\alpha_\ell x_\ell),$$

es decir,

$$-p(\alpha_\ell x_\ell) \leq -p(\{\lambda_0 + \alpha_\ell - \alpha)x_\ell) + p(\{\lambda_0 - \alpha)x_\ell) \leq 2\varepsilon$$

donde la última desigualdad se debe a (1) y (2). Entonces, de la desigualdad anterior junto con (3) obtenemos que

$$|(\alpha_\ell x_\ell)| \leq 2\varepsilon$$

y por ende, para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(\alpha_\ell x_\ell)| \leq 2\varepsilon \quad \text{para todo } \ell \geq K_\varepsilon.$$

Lo cual implica que

$$\lim_{k\to+\infty} p(\alpha_k x_k) = 0,$$

lo cual concluye la demostración □

Ejercicio 4

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos $\mathbb{R}$-e.n.v donde E es completo. Suponga que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}(E, F)$ tal que $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para cada $x \in E$. Demuestre que la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{L}(E, F)$.

Demostración. Considere la familia de funciones $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{L}(E, F)$. Por hipótesis, se sabe que para cada $x \in E$, la sucesión $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en F. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n(x) - T_m(x)||_F < \varepsilon \quad \text{todo } n, m \geq N_{\varepsilon,x},$$

en particular, para todo $n \geq N_{\varepsilon,x}$

$$||T_n(x) - T_{N_{\varepsilon,x}}(x)||_F < \varepsilon,$$

luego, por la desigualdad triangular, tenemos que

$$||T_n(x)||_F - ||T_{N_{\varepsilon,x}}(x)||_F \leq |\, ||T_n(x)||_F - ||T_{N_{\varepsilon,x}}(x)||_F \,| \leq ||T_n(x) - T_{N_{\varepsilon,x}}(x)||_F < \varepsilon,$$

para todon $n \geq N_{\varepsilon,x}$, lo cual implica que

$$||T_n(x)||_F \leq \varepsilon + ||T_{N_{\varepsilon,x}}(x)||_F.$$

En particular, si tomamos $\varepsilon = 1 > 0$, se tiene que existe $N_x := N_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n(x)||_F \leq 1 + ||T_{N_{\varepsilon,x}}(x)||_F \quad \text{para todo } n \geq N_x,$$

además, el conjunto $\{T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{N_x-1}(x)\}$ es acotado por ser un conjunto finito, lo cual implica que al escoger

$$M := \max\{||T_1(x)||_F, ||T_2(x)||_F, \ldots, ||T_{N_x-1}(x)||, 1 + ||T_{N_{\varepsilon,x}}\},$$

se tiene que

$$||T_n(x)|| \leq M \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

entonces, tenemos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n(x)|| \leq M < +\infty \quad \text{para cada } x \in E,$$

luego, dado que $(E, ||\cdot||_E)$ es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach, el Teorema de Acotamiento uniforme de Banach-Steinhaus establece que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty,$$

lo cual equivale a que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M$$

siendo $M > \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)} \geq 0$. Entonces, con esto se demuestra que la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathcal{L}(E,F)$. □

Ejercicio 5

Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $B^\star$ un subconjunto de $E^\star$. Suponga que para cada $x \in E$, el conjunto

$$\{f(x) \colon f \in B^\star\} \quad \text{es acotado.}$$

Demuestre que $B^\star$ es acotado.

Demostración. Sea $f \in B$, consideremos la función $T_f : E^\star \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_f(x) = f(x) \quad \text{para cada } x \in E.$$

Entonces, se tiene que cada T_f es continua, pues,

$$|T_f(x)| = |f(x)| \leq ||f||_{E^\star}||x||.$$

Más aún, se tiene que+

$$||T_f||_{E^\star} = \sup_{||x||=1} |T_f(x)| = \sup_{||x||=1} |f(x)| = ||f||_{E^\star}$$

Entonces, como bien se sabe, para cada $x \in E$, el conjunto

$$\{f(x) \colon f \in B^\star\} \quad \text{es acotado.}$$

lo cual implica que existe $C_x > 0$ tal que

$$|T_f(x)| = |f(x)| \leq C_x \text{para todo } f \in B^\star$$

y por ende,

$$\sup_{f\in B^\star} |T_f(x)| \leq C_x \quad \text{para todo } x \in X,$$

entonces, el Principio de Acotación Uniforme descrito en el Teorema de Banach–Steinhaus establece que

$$0 \leq \sup_{f\in B^\star} ||T_f||_{E^\star} < +\infty$$

y por ende, para todo $f \in B^\star$ se tiene que

$$||f||_{E^\star} = ||T_f||_{E^\star} \leq \sup_{f\in B} ||T_f||_{E^\star}$$

y por tanto, para todo $f \in B^\star$,

$$||f||_{E^\star} \leq \sup_{f\in B} ||T_f||_{E^\star} < +\infty$$

lo cual prueba que $B^\star$ es un subconjunto acotado de $E^\star$. □

Ejercicio 6

Sean E y F dos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $\mathcal{L}(E,F)$. Asuma que existe $T : E \to F$ con

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x) \quad \text{para todo } x \in E$$

Demuestre que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $x_n \to x_0$, entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x_n) = T(x_0).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que probar la existencia de $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n(x_n) - T(x_0)||_F < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_\varepsilon.$$

Entonces, como para cada $x \in E$ se tiene que $T_n(x) \to Tx$, en particular, tenemos que cada sucesión $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, es decir, para cada $x \in E$ existe $C_x > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n(x)||_F \leq C_x$$

de este modo, el Teorema de Acotación uniforme de Banach–Steinhaus establece que existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C.$$

Además, como $x_n \to x_0$, existe $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n - x_0||_E < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{para todo } n \geq N_1(\varepsilon)$$

por otro lado, dado que $T_n(x_0) \to T(x)$, existe $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n(x_0) - T(x_0)||_E < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq N_2(\varepsilon)$$

entonces, al escoger $N_\varepsilon := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, se tiene que si $n \geq N_\varepsilon$, se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned} ||T_n(x_n) - T(x)||_F &\leq ||T_n(x_n) - T_n(x_0)||_F + ||T_n(x_0) - T(x_0)||_F \\ &\leq ||T_n(x_n - x_0)||_F + ||T_n(x_0) - T(x_0)||_F \\ &\leq ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)}\, ||x_n - x_0)||_E + ||T_n(x_0) - T(x_0)||_F \\ &< C\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

es decir, para $\varepsilon > 0$ cualquiera existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n(x_n) - T(x)||_F < \varepsilon \quad \text{para cada } n \geq N_\varepsilon$$

lo cual equivale a

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x_n) = T(x_0)$$

lo que demuestra lo pedido. □

Ejercicio 7

Sea $(E, ||\cdot||)$ el espacio vectorial normado definido por

$$E := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \colon \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\} \quad \text{donde} \quad ||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Defina G como el conjunto

$$G := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \colon \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \ \forall n \geq N\}.$$

Demuestre que G es un subespacio propio denso de E. Concluya que tal G no puede ser ralo.

Demostración. En efecto, consideremos $x_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$x_0(n) = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

trivialemte se tiene que

$$x_0(n) = 0 \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

de este modo, se tiene que $x_0 \in G$ y por ende, G es un subconjunto no vacío.

En este contexto, E es un espacio vectorial definido con las operaciones $x + y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $\lambda x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$(x + y)(n) = x(n) + y(n) \quad \text{y} \quad (\lambda x)(n) := \lambda x(n)$$

para todo $x, y \in E$, todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in G$, entonces, existen $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tales que

$$x(n) = 0 \ \text{ para todo } n \geq N_x \quad \text{e} \quad y(n) = 0 \ \text{ para todo } n \geq N_y.$$

luego, al elegir $N := \max\{N_x, N_y\} \in \mathbb{N}$, se tiene que si $n \geq N$, entonces, $x(n) = y(n) = 0$ y por ende,

$$(x + \lambda y)(n) = x(n) + \lambda y(n) = 0,$$

lo cual demuestra que $x + \lambda y \in G$ y tenemos que $G \leq E$.

Ahora, G es un subespacio propio de E, pues, la sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(n) = \frac{1}{n} \quad \text{todo } n \in \mathbb{N}$$

no pertenece a G, recordando que cada $a(n) = \frac{1}{n} \neq 0$. Pero

$$\lim_{n \to +\infty} a(n) = 0.$$

Para demostrar que G es denso en E, sea $\varepsilon > 0$, tenemos que probar que para cada $x \in E$ existe $x_\varepsilon \in G$ con

$$||x - x_\varepsilon|| < \varepsilon.$$

Ahora bien, si $x \in E$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x(n)| < \varepsilon \quad \text{para cada } n \geq N_\varepsilon,$$

entonces, podríamos pensar en la sucesión $x_\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$x_\varepsilon(n) := \begin{cases} x(n) & n \in \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon - 1\} \\ \\ 0 & n \geq N_\varepsilon \end{cases}$$

el cual claramente esta en G.

Ahora, notemos lo siguiente para cada $n \in \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon - 1\}$, se tiene que

$$|x(n) - x_\varepsilon(n)| = |x(n) - x(n)| = 0 < \varepsilon$$

mientras que para $n \geq N_\varepsilon$,

$$|x(n) - x_\varepsilon(n)| = |x(n)| < \varepsilon,$$

entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|x(n) - x_\varepsilon(n)| < \varepsilon,$$

es decir,

$$||x - x_\varepsilon|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - x_\varepsilon(n)| < \varepsilon,$$

lo cual se reduce a que $||x - x_\varepsilon|| < \varepsilon$ y por ende, para $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in G$ con $||x - x_\varepsilon|| < \varepsilon$ y tenemos que G es denso en E.

Para terminar, notemos que

$$\operatorname{Int}\left(\overline{G}\right) = \operatorname{Int}(E) = E \neq \varnothing,$$

lo cual demuestra que G no es ralo en E. Con esto se demuestra lo que se pedía. $\square$

Comentarios intermedios

En el curso de análisis será bueno revisar el siguiente espacio normado: Sea $p \geq 1$ y $\mathbb{K}$ puede ser, ya sea $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $|\cdot|$ como el valor absoluto en $\mathbb{R}$ o el módulo complejo.

Definamos el conjunto

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^p < +\infty \right\}.$$

y definamos la norma p como la función $||\cdot||_p : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ como

$$||x||_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el libro de Kreyszig hay una demostración de que este par $(\ell^p, ||\cdot||_p)$ es un espacio vectorial normado[1] (p13–15) y que es un espacio de Banach (p.35–36).

Ejercicio 8

Consideremos el $\mathbb{R}$-e.n.v $(\ell^1(\mathbb{N}), ||\cdot||_1)$. Defina $T : \ell^1(\mathbb{R}) \to T(\ell^1(\mathbb{N}))^2$ definido por

$$T(x) := \left\{ \frac{x(n)}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demuestre que T es una función lineal biyectiva continua, cuya inversa no es continua.

Demostración. Sean $x, y \in \ell^1(\mathbb{N})$, entonces,

$$x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad y = \{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donde $x(n), y(n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| < +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |y(n)| < +\infty.$$

de este modo, si $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$T(x+\lambda y)(n) = \frac{x(n)+\lambda y(n)}{n} = \frac{x(n)}{n} + \lambda \frac{y(n)}{n} = T(x)(n) + \lambda T(y)(n) = [T(n) + \lambda T(y)](n).$$

Entonces, se tiene que

$$T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y),$$

lo cual implica que T es lineal.

Para demostrar que T es continua, nótese que

$$||T(x)||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x(n)|}{n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| = ||x||_1,$$

lo cual implica que $||T(x)||_1 \leq ||x||_1$ para todo $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ y obtenemos la continuidad de T.

Para demostrar que T es biyectiva. Nótemos que T es sobreyectiva por definición, recordando que forzamos a que el codominio de T sea la imagen de T. Es inyectiva, pues,

$$\begin{aligned} x \in \ker T &\iff T(x) = 0 \\ &\iff \frac{x(n)}{n} = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \\ &\iff x(n) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ &\iff x = 0_{\ell^1(\mathbb{N})} \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $\ker T = \{0_{\ell^1(\mathbb{N})}\}$. Con esto tenemos que T es biyectiva.

Ahora, definamos la inversa de T como sigue: Sea $S : T(\ell^1(\mathbb{N})) \to \ell^1(\mathbb{N})$, donde

$$S(y)(n) = ny(n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

[1]Con la suma punto a punto y el producto escalar punto a punto,

[2]Note que acá estamos haciendo un abuso de notación. En efecto, estamos restringiendo el codominio de T a sólamente considerar su imagen.

donde $y = \{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in T(\ell^1(\mathbb{N}))$ cualquiera. Por un lado, si $y \in T(\ell^1(\mathbb{N}))$, entonces, existe $x \in T(\ell^1(\mathbb{N}))$ con

$$y(n) = \frac{x(n)}{n} \quad \text{todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$||S(y)||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} n|y(n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\frac{|x(n)|}{n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| < +\infty$$

lo cual implica que $S(y) \in \ell^1(\mathbb{N})$ para todo $x \in \ell^1(\mathbb{N})$. Además, no es difícil demostrar $S = T^{-1}$ al hacer $S(T(x))(n) = x(n)$ y y $T(S(y))(n) = y(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ y todo $y \in T(\ell^1(\mathbb{N}))$.

Para demostrar que S no es continua, definamos $y_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por

$$y_k(n) := \begin{cases} n & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que siempre pasa que

$$||S(y_k)||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} n|y_k(n)| = k^2.$$

Por otro lado,

$$||y_k||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |y(n)| = k,$$

de este modo, se tiene que

$$\frac{||S(y_k)||_1}{||y_k||_1} = k \quad \text{todo } k \in \mathbb{N},$$

lo cual implica que, dada la arbitrariedad de k, no podemos hallar $C > 0$ tal que

$$\frac{||S(y_k)||_1}{||y_k||_1} \leq C \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

y por ende, T^{-1} no puede ser continua, lo cual concluye la demostración. □

Ejercicio 9

Con respecto al ejercicio anterior. Demuestre que $T(\ell^1(\mathbb{N}))$ no es un espacio de Banach. Notese que con esto, la hipotesis de completitud sobre el codominio de T en el Teorema de la función abierta es necesaria.

Demostración. Tenemos que probar la existencia de una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in T(\ell^1(\mathbb{N}))$ de Cauchy que no converja en $T(\ell^1(\mathbb{N}))$ (potencialmente podría converger, pero el límite no puede caer en $T(\ell^1(\mathbb{N}))$).

Consideremos la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ donde $x_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$x_k(n) := \begin{cases} \frac{1}{n} & n \leq k \\ 0 & n > k. \end{cases}$$

Esta sucesión está en $\ell^1(\mathbb{R})$, de este modo, definamos $y_k = T(x_k) \in T(\ell^1(\mathbb{R}))$. Notemos que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $T(\ell^1(\mathbb{R}))$, pues, para todo $m < k$, se tiene que

$$||y_k - y_m||_1 = \sum_{n=m}^{k} \frac{1}{n^2}$$

entonces, como la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converge la sucesión $\left\{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, lo cual implica que para $\varepsilon > 0$ se tiene la existencia de $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > m \geq N_\varepsilon$,

$$||y_k - y_m||_1 = \sum_{n=m}^{k} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Este mismo argumento implica que y_k converge a la sucesión $y := \{\frac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$, pues, como $\left\{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$, existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$||y - y_k|| = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Sin embargo, tenemos que $y \notin T(\ell^1(\mathbb{N}))$, pues, de existir $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ tal que $T(x) = y$, tenemos que

$$\frac{1}{n^2} = T(x)(n) = \frac{x(n)}{n} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

es decir, $x(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero eso implica que $x \notin \ell^1(\ell^1(\mathbb{N}))$ lo cual es una clara contradicción. De este modo $T(\ell^1(\mathbb{N}))$ no puede ser un espacio de Banach. $\square$