

## AYUDANTÍA 6 – ANÁLISIS 2 POSGRADO

DAVID URRUTIA VERGARA – GONZALO ROBLEDO VELOSO

Como es habitual, la sigla  $\mathbb{K}$ -e.n.v corresponde a la de  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado.

### EJERCICIO 1

Sea  $(E, \|\cdot\|_E)$  un  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach y  $P : E \rightarrow E$  es lineal tal que  $P^2 = P$ . Demuestre que son equivalentes:

- (a)  $P \in \mathcal{L}(E, E)$ .
- (b) Los conjuntos  $P(E)$  y  $\ker P$  son cerrados en  $E$ .
- (c) Se tiene que el suplemento topológico de  $P(E)$  es  $\ker P$ .

*Demostración.* (a)  $\implies$  (b) Supongamos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos de  $\ker P$  con  $x_n \rightarrow x$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se verifica

$$P(x_n) = 0$$

lo cual implica que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(x_n) = P(x)$$

y tenemos que  $\ker P$  es cerrado en  $E$ .

Por otro lado, si  $y_n \in P(E)$  tal que  $y_n \rightarrow y$ , se tiene que existe  $x_n \in E$  con

$$y_n = P(x_n) = P(P(x_n)) = P(y_n),$$

entonces,

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(y_n) = P(y),$$

es decir,  $P(y) = y$  y se tiene que  $y \in P(E)$  lo cual implica que  $P(E)$  es cerrado. De este modo, suponiendo (a) demostramos (b).

(b)  $\implies$  (c) En general, se tiene la descomposición  $\ker P + P(E) = E$ . En efecto, la contención  $\ker P + P(E) \subseteq E$  es una consecuencia inmediata de la definición. Sin embargo, si  $x \in E$ , notemos que  $x = P(x) + (I - P)(x)$  con  $I \in \mathcal{L}(E, E)$  la identidad de  $E$ . De este modo,  $P(x) \in P(E)$  y

$$P([I - P](x)) = P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P(x) = 0,$$

lo cual demuestra que  $(I - P)(x) \in \ker P$ . Además, esta suma es directa, pues, si  $y \in \ker P \cap P(E)$ , se tiene que

$$0 = P(y) \quad \text{y existe } x \in E \quad \text{con } P(x) = y.$$

De este modo, se tiene que  $0 = P(y) = P(P(x)) = P(x) = y$ , es decir,  $\ker P \cap P(E) = \{0\}$  y se tiene que  $E = \ker P + P(E)$  con  $\ker P \cap P(E)$  y  $\ker P, P(E)$  cerrados en  $E$ . De este modo, se tiene que  $\ker P$  es un suplemento topológico de  $P(E)$ .

(c)  $\implies$  (a): Si  $P(E) + \ker P = E$  con  $\ker P$  y  $P(E)$  cerrados en  $E$ , se tiene que  $P(E)$  y  $\ker P$  son dos  $\mathbb{R}$ -espacios de Banach con la norma  $\|\cdot\|_E$  (recuerde que en un espacio métrico completo  $(X, d)$  y  $A \subseteq X$ , se tiene que  $(A, d)$  es completo si y sólo si  $A$  es cerrado en  $X$ ).

Escojamos la transformación lineal  $T : \ker P \times P(E) \rightarrow E^1$  definida por  $T(x, y) = x + y$ . Entonces, se tiene que

$$\|T(x, y)\|_E = \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E = \|(x, y)\|_{\ker P \times P(E)} \quad \text{para todo } (x, y) \in \ker P \times P(E)$$

lo cual prueba que  $T \in \mathcal{L}(\ker P \times P(E), E)$ .

Por otro lado, al escojer  $S : E \rightarrow \ker P \times P(E)$  definida por  $S(x) = (x - P(x), P(x))$ , se tiene que

$$P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P(x) = 0.$$

<sup>1</sup>Como ha sido habitual en el curso, usaremos el hecho de que dados dos  $\mathbb{R}$ -e.n.v  $(E, \|\cdot\|_E)$  y  $(F, \|\cdot\|_F)$ , la norma en el espacio  $E \times F$  es la definida por  $\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$

Entonces, se tiene que  $x - P(x) \in \ker P$  para todo  $x \in E$  y  $S$  está bien definido. Más aún, se tiene que si  $(v, w) \in \ker P \times P(E)$ , se tiene que  $v - P(v) = v$  y  $P(w) = w$ , de este modo

$$\begin{aligned} S(T(v, w)) &= S(v + w) = ((v + w) - P(v + w), P(v + w)) \\ &= (v - P(v) + w - P(w), P(v) + P(w)) = (v - P(v) + w - w, w) \\ &= (v - P(v), w) = (v, w) \end{aligned}$$

y por ende,  $S \circ T = Id_{\ker P \times P(E)}$ . Por otro lado, si  $x \in E$ , se tiene que

$$T(S(x)) = T(x - P(x), P(x)) = x - P(x) + P(x) = x,$$

y por ende,  $T \circ S = Id_E$  lo cual demuestra que  $T$  es biyectiva, pues, su inversa es  $S$ . De este modo, dado que  $\ker P$  y  $P(E)$  son espacios de Banach, se tiene que  $\ker P \times P(E)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach. Luego,  $T \in \mathcal{L}(\ker P \times P(E), E)$  y por ende,  $S \in \mathcal{L}(\ker P \times P(E), E)$  en virtud del Teorema de la función abierta. Luego,  $S$  es continua si y sólo si  $P, Id_E - P \in \mathcal{L}(E, E)$ , en particular,  $P$  es continua y se demuestra (a). Con ésto se concluye la demostración  $\square$

### EJERCICIO 2

Sea  $(E, \|\cdot\|_E)$  un  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach y  $F$  un sub-espacio cerrado de  $E$ . Demuestre que son equivalentes:

- (a)  $F$  admite un suplemento topológico
- (b) Existe  $P : E \rightarrow E$  tal que  $P^2(x) = P(x)$  para todo  $x \in E$  y  $P(E) = F$ .

*Demostración.* (a)  $\implies$  (b): Sea  $G \subseteq E$  un subespacio cerrado de  $E$  tal que  $F \cap G = \{0\}$  y  $E = F + G$ . Entonces, para todo  $x \in E$  existen únicos  $u_x \in F$  y  $v_x \in G$  tales que  $x = u + v$ , de este modo, definamos  $P : E \rightarrow E$  con

$$P(x) = P(u_x + v_x) = u_x.$$

Esta función está bien definida, pues, como  $F \cap G = \{0\}$ , se tiene que si  $x = u + v$  y  $x = a + b$  con  $a, u \in F$  y  $v, b \in G$ , entonces,  $a - u \in G \cap F$  y se tiene que  $a - u = 0$  y por ende,  $a = u$  y se verifica

$$P(u + v) = u = a = P(a + b).$$

Primeramente, si  $u \in F$ , se tiene que  $u = u + 0$  con  $0 \in G$  y tenemos que la unicidad dada por la suma directa, se tiene que

$$P(u) = P(u + 0) = u$$

y se tiene que

$$P(x) = P(u_x + v_x) = u_x = P(u_x) = P(P(x)),$$

es decir,  $P \circ P = P$ .

Por último, por definición,  $P(E) \subseteq F$ . Mientras que si  $u \in F$ , se tiene que  $P(u) = u$ , lo cual implica que  $u \in P(E)$ , lo cual muestra que  $P(E) = F$ . Con esto se demuestra (b).

(b)  $\implies$  (a): Supongamos que existe  $P : E \rightarrow E$  tal que  $P^2(x) = P(x)$  para todo  $x \in E$  y que  $P(E) = F$ . Como  $F = P(E)$  es cerrado, se tiene que  $P \in \mathcal{L}(E, E)$  gracias al ejercicio anterior y por ende,  $\ker P$  es cerrado. Más aún, se tiene la descomposición en suma directa  $E = \ker P + P(E)$  y tenemos que  $G = \ker P$  es un suplemento topológico de  $F$  y demostramos (a).  $\square$

### EJERCICIO 3

Sea  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n y  $M \leq E$ . Definamos el espacio *Aniquilador de M* como el espacio

$$M^\perp := \{f \in E^* : f(x) = 0 \text{ para cada } x \in M\}.$$

Mientras que si  $N \leq E^*$ , el espacio  $N^\perp$  corresponde al conjunto

$$N^\perp := \{x \in E : f(x) = 0 \text{ para cada } f \in N\}.$$

Muestre que  $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$ .

*Demostración.* Primeramente, notemos que  $(M^\perp)^\perp$  es cerrado en  $E$ , en efecto, supongamos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (M^\perp)^\perp$  es tal que  $x_n \rightarrow x$ . Entonces, si  $f \in M^\perp$ , se verifica

$$f(x_n) = 0,$$

luego, como  $M^\perp \subseteq E^*$ , se tiene que  $f \in E^*$  y por la continuidad secuencial, se tiene que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

lo cual implica que  $f(x) = 0$  para todo  $f \in M^\perp$  y tenemos que  $(M^\perp)^\perp$  es cerrado en  $E$ .

Note que si  $x \in M$ , entonces, de la definición de  $M^\perp$  se tiene que  $f(x) = 0$  para todo  $f \in M^\perp$ , entonces,  $x \in (M^\perp)^\perp$ . Lo cual implica que  $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ . Ahora, como  $(M^\perp)^\perp$  es cerrado y  $\overline{M}$  es el cerrado más chico que contiene a  $M$ , entonces, se verifica  $\overline{M} \subseteq (M^\perp)^\perp$ .

Para demostrar que  $(M^\perp)^\perp \subseteq \overline{M}$ , supongamos que existe  $x_0 \in (M^\perp)^\perp$  tal que  $x_0 \notin \overline{M}$ .

Más aún,  $\{x_0\}$  es compacto y convexo en  $E$  mientras que  $\overline{M}$  es convexo y cerrado por ser un subespacio vectorial de  $E$ . Entonces, el teorema de Hahn-Banach Geométrico establece que existe un hiperplano cerrado  $H = [f = \alpha]$  que separa a  $f$  estrictamente, es decir, existe  $f \in E^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(x) < \alpha - \varepsilon \quad \text{para todo } x \in \overline{M} \quad \text{y} \quad \alpha + \varepsilon < f(x_0),$$

entonces, para todo  $x \in \overline{M}$  se tiene

$$f(x) < \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon < f(x_0),$$

y por ende,

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \text{para todo } x \in \overline{M}.$$

Entonces, se tiene que  $f(\overline{M})$  es un conjunto acotado. Si existiera  $\tilde{x} \in \overline{M}$  tal que  $f(\tilde{x}) \neq 0$ , se tiene que existe  $n > 0$  tal que

$$\alpha \leq n|f(\tilde{x})| = f(n \operatorname{Sgn}(f(\tilde{x}))\tilde{x})$$

lo cual no sería cierto. De este modo, se tiene que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \overline{M}$ . Más aún, se tiene que

$$0 = f(x) < \alpha < f(x_0)$$

y por ende,  $f(x_0) > 0$ . Entonces,  $f(x) = 0$  para todo  $x \in M$  y por ende,  $f \in M^\perp$  y por consiguiente,  $0 < f(x_0) = 0$  lo cual es una clara contradicción. De este modo, se tiene que  $x_0 \in \overline{M}$  y tenemos la igualdad.  $\square$

#### EJERCICIO 4

Sean  $L$  y  $G$  dos subespacios vectoriales del espacio normado  $(E, \|\cdot\|)$  y supongamos que tales  $L$  y  $G$  son cerrados en  $E$ . Muestre que

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp \quad \text{y} \quad G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp.$$

*Demostración.* Partamos demostrando la igualdad  $G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$ .

Sea  $x \in G \cap L$ , entonces,  $x \in G$  y  $x \in L$ , de este modo, si  $f \in G^\perp + L^\perp$ , existen  $g \in G^\perp$  y  $\ell \in L^\perp$  tales que  $f = g + \ell$ , luego, se tiene que  $g(x) = \ell(x) = 0$  y por ende,

$$f(x) = g(x) + \ell(x) = 0$$

lo cual prueba que  $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$ . De este modo,  $G \cap L \subseteq (G^\perp + L^\perp)^\perp$ .

Conversamente, si  $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$ , note que para cada  $g \in G^\perp$  y cada  $\ell \in L^\perp$  se tiene que  $(g + \ell)(x) = 0$ , en particular, se tendría que  $g(x) = 0$  para todo  $g \in G^\perp$  considerando el caso  $\ell = 0$ , mientras que  $\ell(x) = 0$  para todo  $\ell \in L^\perp$  considerando el caso  $g = 0$ . De este modo, como  $G$  y  $L$  son cerrados en  $E$ , se tiene que si  $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$ , se verifica

$$x \in (G^\perp)^\perp = \overline{G} = G \quad \text{y} \quad x \in (L^\perp)^\perp = \overline{L} = L,$$

es decir,  $x \in G \cap L$ . Luego, se tiene que  $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq G \cap L$  y tenemos la doble contención, es decir, demostramos que  $(G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$ .  $\square$

#### EJERCICIO 5

Sean  $F$  y  $G$  dos subespacios cerrados del  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach  $(E, \|\cdot\|)$ . Demuestre que si  $G$  es el suplemento topológico de  $F$ , entonces,  $G^\perp$  es el suplemento topológico de  $F^\perp$ .

*Demostración.* Si  $G$  y  $F$  son espacios topológicamente suplementarios, existe  $P \in \mathcal{L}(E, E)$  con  $P(E) = F$  y  $\ker P = G$  por los ejercicios 1 y 2. Sea  $P^* : E^* \rightarrow E^*$  definido por  $P^*(f) = f \circ P$ , el cual es lineal, por otro lado, para todo  $x \in E$  con  $\|x\|_E = 1$ , se verifica

$$|P^*(f)(x)| = |f(P^*(x))| \leq \|f\|_{E^*} \|P\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|x\|_E = \|P\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|f\|_{E^*},$$

entonces,

$$\|P^*(f)\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} |P^*(f)(x)| \leq \|P^*\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|f\|_{E^*}$$

y tenemos que  $P^* \in \mathcal{L}(E^*, E^*)$ .

Por otro lado, se tiene que  $P^* \circ P^* = P^*$ , en efecto, notemos que si  $f \in E^*$ , entonces,

$$(P^* \circ P^*)(f) = P^*(P^*(f)) = P^* \circ (f \circ P) = (f \circ P) \circ P = f \circ (P \circ P) = f \circ P = P^*(f).$$

Entonces, obtenemos que  $\ker P^*$  y  $P^*(E^*)$  son cerrados en virtud del ejercicio 1. Más aún, se tiene que

$$E^* = \ker P^* + P^*(E^*)$$

Notemos que la igualdad  $F = P(E^*)$  nos dice que

$$\begin{aligned} \ker P^* &= \{f \in E^* : P^*(f)(x) = 0 \text{ para todo } x \in E\} \\ &= \{f \in E^* : f(P(x)) = 0 \text{ para todo } x \in E\} \\ &= \{f \in E^* : f(u) = 0 \text{ para todo } u \in P(E)\} \\ &= \{f \in E^* : f(u) = 0 \text{ para todo } u \in F\} \\ &= F^\perp. \end{aligned}$$

mientras que un ejercicio sencillo es demostrar que  $(I - P^*)(f) = f \circ (I - P)$  para todo  $f \in E^*$  al usar la definición de  $P^*$ , de este modo, se verifica  $\ker(I - P^*) = P^*(E)$  y por ende,

$$\begin{aligned} P^*(E) = \ker(I - P^*) &= \{f \in E^* : (I - P^*)(f)(x) = 0 \text{ para todo } x \in E\} \\ &= \{f \in E^* : f(x - P(x)) = 0 \text{ para todo } x \in E\} \\ &= \{f \in E^* : f(u) = 0 \text{ para todo } u \in (I - P)(E)\} \\ &= \{f \in E^* : f(u) = 0 \text{ para todo } u \in \ker P\} \\ &= \{f \in E^* : f(u) = 0 \text{ para todo } u \in G\} \\ &= G^\perp, \end{aligned}$$

luego, se tiene que

$$E^* = \ker P^* + P^*(E^*) = G^\perp + F^\perp \quad \text{y} \quad \{0\} = \ker P^* \cap P^*(E^*) = G^\perp \cap F^\perp$$

y dado que  $G^\perp$  y  $F^\perp$  son cerrados, el suplemento topológico de  $F^\perp$  es  $G^\perp$  y se concluye la demostración.  $\square$

#### EJERCICIO 6

Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach y  $F$  un subespacio de  $E$ . Se dice que el suplemento algebraico de  $F$  es un espacio  $G \subseteq E$  con  $F + G = E$  y  $F \cap G = \{0\}$  y la *codimensión de  $F$*  corresponde a la dimensión del suplemento algebraico de  $F$ .

Si  $F$  es cerrado y tiene codimensión finita, demuestre que todo suplemento algebraico de  $F$  también es un suplemento topológico.

*Demostración.* En efecto, se sabe que todo espacio vectorial de dimensión finita es un  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach, en particular, si  $G$  es un subespacio de  $E$  con  $G \cap F = \{0\}$ ,  $E = F + G$  y  $\dim_{\mathbb{R}} G < +\infty$ , entonces,  $(G, \|\cdot\|)$  es de Banach, por consiguiente,  $G$  es cerrado en  $E$  y se tiene que  $F + G = E$  con  $F \cap G = \{0\}$ , luego, se verifica que  $G$  es un suplemento topológico de  $F$ .  $\square$

#### EJERCICIO 7

Sea  $E$  definido por

$$E := \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) \text{ existe} \right\} \quad \text{y} \quad \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|.$$

Demuestre que  $(E, \|\cdot\|)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach.

*Demostración.* El hecho de que la suma y producto de sucesiones convergentes son convergentes, se obtiene que  $E$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned} x + y : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} & y & \quad \lambda x : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto x(n) + y(n) & n &\mapsto \lambda x(n) \end{aligned}$$

y las propiedades de norma sobre la función  $\|\cdot\|$  se obtienen de la desigualdad triangular y propiedades del supremo.

Sea  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $E$ . Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_k(n) - x_j(n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_k(n) - x_j(n)| = \|x_k - x_j\| < \varepsilon \quad \text{para todo } k, j \geq N_\varepsilon.$$

Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que la sucesión  $\{x_k(n)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en el espacio de Banach  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Es decir, existe  $x_0(n) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(n) = x_0(n).$$

En este sentido, será útil considerar la sucesión  $x_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$x_0(n) := \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(n),$$

demostraremos que  $x_k \rightarrow x_0$  en  $(E, \|\cdot\|)$  y que  $x_0 \in E$  y con eso demostramos la completitud de  $(E, \|\cdot\|)$ .

Primeramente, recordemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica

$$|x_k(n) - x_j(n)| < \varepsilon \quad \text{para todo } k, j \geq N_\varepsilon,$$

entonces, al hacer  $j \rightarrow +\infty$ , que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica

$$|x_k(n) - x_0(n)| < \varepsilon \quad \text{para todo } k, j \geq N_\varepsilon,$$

entonces, para todo  $k \geq N_\varepsilon$ , se tiene que  $\varepsilon$  es cota inferior del conjunto

$$\{|x_k(n) - x_0(n)| : n \in \mathbb{N}\},$$

entonces,

$$\|x_k - x_0\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_k(n) - x_0(n)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } k, j \geq N_\varepsilon,$$

entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_k - x_0\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } k, j \geq N_\varepsilon,$$

y se tiene que  $x_k \rightarrow x_0$  con la norma  $\|\cdot\|$ .

Para demostrar que  $x_0 \in E$ , tenemos que demostrar que existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0(n) = L.$$

Pues bien, recordemos que cada  $x_k$  está en  $E$ , esto quiere decir que existe  $L_k \in \mathbb{R}$  con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_k(n) = L_k,$$

Entonces, dado que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $(E, \|\cdot\|)$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  con

$$|x_k(n) - x_j(n)| \leq \|x_k - x_j\| < \varepsilon \quad \text{para cada } k, j \geq N_\varepsilon.$$

Luego, al tender  $n \rightarrow +\infty$ , se verifica que

$$|L_k - L_j| < \varepsilon \quad \text{para cada } k, j \geq N_\varepsilon,$$

y tenemos que  $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en el  $\mathbb{R}$ -Banach  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , lo cual implica que existe  $L \in \mathbb{R}$  con  $\lim_{k \rightarrow +\infty} L_k = L$ . Demostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} x_0(n) = L.$$

En efecto, si  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_0(n) - x_k(n)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } k \geq N_{\varepsilon,1},$$

y existe  $N_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_k(n) - L_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } n \geq N_{\varepsilon,2},$$

mientras que existe  $N_{\varepsilon,3} \in \mathbb{N}$  tal que

$$|L_k - L| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } k \geq N_{\varepsilon,3},$$

luego, considerando  $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon,1}, N_{\varepsilon,2}, N_{\varepsilon,3}\}$ , se tiene que para cada  $n \geq N_\varepsilon$ ,

$$|x_0(n) - L| \leq |x_0(n) - x_n(n)| + |x_n(n) - L_k| + |L_k - L| < \varepsilon$$

y tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0(n) = L.$$

lo cual implica que  $x_0 \in E$  y  $(E, \|\cdot\|)$  es un  $\mathbb{R}$ -Banach. □

### EJERCICIO 8

$(E, \|\cdot\|)$  el  $\mathbb{R}$ -espacio de Banach definido en el ejercicio anterior. Demuestre que el conjunto

$$F := \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \right\}$$

admite un suplemento topológico.

*Demostración.* Demostremos que  $F$  es cerrado en  $(E, \|\cdot\|)$ . En efecto, recordemos que si  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $F$ , en particular, es de Cauchy en  $E$ , entonces, replicando lo realizado para el ejercicio anterior, se puede demostrar que si  $L_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_k(n)$ , entonces, existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $L_k \rightarrow L$  y  $x(n) \rightarrow L$ , en particular, como  $x_k \in F$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $L_k = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y por ende,  $L_k \rightarrow 0$ , y  $L = 0$ , de este modo,  $x(n) \rightarrow 0$  y  $x \in F$ . De este modo,  $F$  es cerrado en  $E$ .

Escojamos la sucesión  $e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  constante igual a 1, es decir,  $e_n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideremos el espacio  $G := \{re : r \in \mathbb{R}\}$ , el cual es de dimensión finita (por ser el generado por UN solo vector), lo que implica que  $G$  es cerrado. Falta demostrar que  $F \cap G = \{0\}$  y  $E = F + G$ .

Notemos que si  $x \in E$ , existe  $L \in \mathbb{R}$  con  $x(n) \rightarrow L$ , entonces, al considerar  $u := \{u(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $u(n) = x(n) - L$ , se verifica que  $u_n \rightarrow 0$  y por ende,  $u \in F$ , por otro lado, se tiene que

$$x(n) = u(n) + L$$

y por ende,  $x = u + Le$ , entonces,  $x \in F + G$ .

Por otro lado, notemos que si  $x \in G \cap F$ , se tiene que  $x(n) \rightarrow 0$  y existe  $L \in \mathbb{R}$  con  $x = Le$ , es decir,  $x(n) = L$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = 0$$

entonces,  $L = 0$  y  $x = Le = 0$ . Luego, se tiene que  $E = F + G$  con  $G \cap F = \{0\}$  mientras que  $F$  y  $G$  son cerrados, luego,  $G$  es un suplemento topológico de  $F$ . □