PEMMF.
Estructuras algebraicas
Ayudantías.
Rocío Acevedo

UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 3 ✹

OBS: Se recomienda revisarlos de forma individual independiente de la solución hecha en ayudantía.

Permutaciones y orden.

1. Defina el grupo S_3 y realice su tabla de Cayley:

   El grupo S_3 tiene los siguientes elementos:

   $$S_3 = \{e, (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

   Su tabla será la siguiente:

	e	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
e	e	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
(12)	(12)	e	(123)	(132)	(23)	(13)
(23)	(23)	(132)	e	(123)	(13)	(12)
(13)	(13)	(123)	(132)	e	(12)	(23)
(132)	(132)	(23)	(13)	(12)	e	(123)
(123)	(123)	(13)	(12)	(23)	(132)	e

   Para realizar la operatoria de permutaciones, el procedimiento es el siguiente, por ejemplo, tomando dos elementos de S_3:

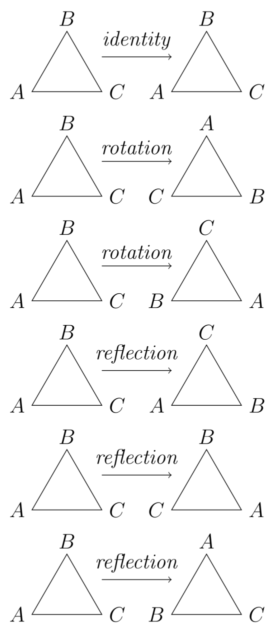
   $$(123)(123) = (132)$$

   Con notación de Cauchy, puede verse más claro:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Los números de color azul indican el resultado de la permutación para el 1: Desde el 1, se corresponde con el 2, y el 2 se corresponde con el 3. Así, el 1 se correspondería con el 3 y entregaría el primer resultado del ciclo (132).

En idioma triángulo, como se dijo en la ayudantía, se tiene la siguiente representación:



$$id = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

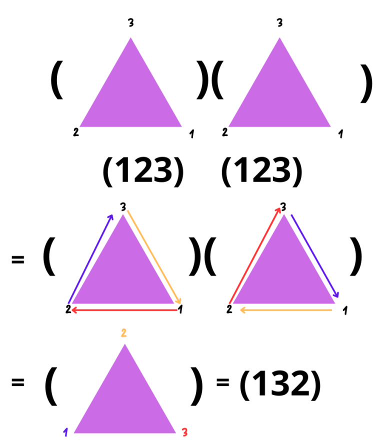
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$$

$$\mu_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Así, las combinaciones de, por ejemplo la operación de $(123)(123) = (132)$, se vería de la siguiente manera:



2. Demuestre que un r-ciclo en S_n tiene orden r.

   Por demostrar: $\sigma^r = e$ y r es el menor entero positivo que lo cumple.

   Demostración: Se tiene $\sigma(a_1) = a_2, ..., \sigma^{r-1}(a_1) = a_r, \sigma^r(a_j) = a_j$, por ser un r-ciclo. Supongamos que existe un k tal que $\sigma^k = e$, con $1 < k < r$. Entonces k divide a r, que no es posible, y es un r-ciclo por lo que necesariamente r debe ser el menor número con esta propiedad, lo que muestra que efectivamente es de orden r.

3. Demuestre que permutaciones disjuntas conmutan.

   Se tiene

   $Mov(\sigma) = \{j \in X : \sigma(j) \neq j\}$ y $Mov(\tau) = \{j \in X : \tau(j) \neq j\}$.

   Supongamos $\jmath \in X$, entonces

   - Si $j \in Mov(\sigma)$ entonces $\tau(x) = x \Longrightarrow \sigma(\tau(x)) = \sigma(x)$, y también $\tau\sigma(x) = \sigma(x)$, por lo que $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x))$.
   - Si $j \in Mov(\tau)$ entonces $\sigma(x) = x \Longrightarrow \tau(\sigma(x)) = \tau(x)$, y también $\sigma\tau(x) = \tau(x)$, por lo que $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x))$.
   - Si $j \in X - (Mov(\sigma) \cup Mov(\tau))$ entonces $\sigma(\tau(j) = j$ y $\tau(\sigma(j)) = j$, por lo que $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x))$.

   Por lo tanto, permutaciones disjuntas conmutan.

4. Ninguna permutación de un conjunto finito puede expresarse como producto de un número par de transposiciones y como un producto de un número impar de transposiciones.

   Dem:

   Sin pérdida de generalidad, consideremos $A = \{1, 2, ..., n\}$ y supongamos $n \geq 2$, para que en este conjunto existan las transposiciones. Debemos demostrar que si

$$\tau = \tau_1 \tau_2 ... \tau_k$$

   con τ_i una transposición, sea k par. Y también,

$$\tau = \tau_1 \tau_2 ... \tau_m$$

   con τ_i una transposición, sea m impar.

   Entonces $sng(\tau) = (-1)^{2l} = 1$ y $sng(\tau) = (-1)^{2l-1}$. Esto implica que $1 = -1$, que es falso. Por lo que es imposible hacer un producto de ambas transposiciones a la vez.