

# Topología

Luis Arenas

August 13, 2023

# Contents

1	Conjuntos abiertos y vecindades	3
2	Continuidad	11
3	Redes	16
4	Filtros y Ultrafiltros	32
5	Topologías inducidas y co-inducidas	41
6	Axiomas de separación	52
7	Compacidad	61
8	Compacidad secuencial	72
9	Espacios conexos	77
10	Espacios arco-conexos	84
11	Espacios totalmente desconexos	92
12	Grupos Topológicos	101
13	Homotopías	115
14	La propiedad de extensión de homotopías	131
15	El grupo fundamental	147

<i>L. Arenas-Carmona</i>	2
<b>16 Triangulaciones y homotopías explícitas</b>	<b>157</b>
<b>17 El teorema de Van Kampen.</b>	<b>167</b>
<b>18 Recubrimientos</b>	<b>185</b>
<b>19 Acciones y recubrimientos regulares</b>	<b>201</b>
<b>20 Teorías de homología.</b>	<b>221</b>
<b>21 Homotopías de Cadenas.</b>	<b>233</b>
<b>22 Sucesiones exactas de grupos de homología.</b>	<b>250</b>
<b>23 Teoría del grado y homología celular.</b>	<b>261</b>
<b>24 Cohomología.</b>	<b>281</b>
<b>25 Tensores y Formas diferenciales.</b>	<b>298</b>
<b>26 La cohomología de De Rham.</b>	<b>317</b>

# Chapter 1

## Conjuntos abiertos y vecindades

El principal objetivo de estos apuntes es el estudio de los espacios topológicos. Estos son los objetos de estudio de la topología, del mismo modo que los espacios vectoriales, por ejemplo, son el objeto de estudio del álgebra lineal. Un espacio topológico se define como un par  $(X, \tau)$  donde  $\tau$  es una colección de subconjuntos de  $X$ , llamados abiertos, que satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. Si  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  son elementos de  $\tau$ , también lo es  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ .
2. Si  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  es una familia arbitraria de elementos de  $\tau$ , también  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  es un elemento de  $\tau$ .
3. El conjunto vacío  $\emptyset$  y el conjunto  $X$  mismo son elementos de  $\tau$ .

Si un mismo conjunto  $X$  tiene dos topologías  $\tau$  y  $\tau_0$ , diremos que  $\tau_0$  es más fina que  $\tau$  si  $\tau_0 \supseteq \tau$ .

**ejemplo 1.1.** En todo conjunto  $X$  existe la topología indiscreta  $\{X, \emptyset\}$  y la topología discreta  $\wp(X)$  formada por todos los subconjuntos de  $X$ . La topología indiscreta es la menos fina de todas las topologías de  $X$  y la discreta la más fina.

**ejemplo 1.2.** En el conjunto  $S = \{1, 2\}$  existe la topología

$$\tau = \left\{ \{1\}, S, \emptyset \right\}$$

llamada la topología de Sierpinski.

**ejemplo 1.3.** En todo conjunto  $X$  existe la topología

$$\tau = \{T \subseteq X | T^c \text{ es finito}\}$$

llamada la topología cofinita. La topología conumerable se define análogamente.

Si  $(X, \tau)$  es una topología, los conjuntos de la forma  $\mathcal{O}^c$  con  $\mathcal{O} \in \tau$  se denominan los conjuntos cerrados de la topología. El conjunto  $\bar{\tau} = \{\mathcal{O}^c | \mathcal{O} \in \tau\}$  determina únicamente a la topología  $\tau$ . Los elementos de  $\bar{\tau}$  satisfacen las condiciones siguientes:

1. Si  $C_1$  y  $C_2$  son elementos de  $\bar{\tau}$ , también lo es  $C_1 \cup C_2$ .
2. Si  $\{C_i\}_{i \in I}$  es una familia arbitraria de elementos de  $\bar{\tau}$ , también  $\bigcap_{i \in I} C_i$  es un elemento de  $\bar{\tau}$ .
3. Si  $\emptyset$  y  $X$  son elementos de  $\bar{\tau}$ .

Además, estas condiciones son suficientes para que una colección  $\bar{\tau}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  sea la colección de subconjuntos cerrados de alguna topología.

Si  $x$  es un elemento del espacio  $X$ , la colección

$$V(x) = \{U \subseteq X | \exists \mathcal{O} \in \tau \text{ tal que } x \in \mathcal{O} \subseteq U\}$$

se llama la colección de vecindades de  $x$  en  $X$  (con respecto a  $\tau$ ). El conjunto  $V(x)$  satisface las condiciones siguientes:

1. Cada elemento de  $V(x)$  es un conjunto que contiene a  $x$ .
2. Si  $U_1$  y  $U_2$  son elementos de  $V(x)$ , también lo es  $U_1 \cap U_2$ .
3. Si  $U$  es un elemento de  $V(x)$ , y si  $U \subseteq W$ , entonces también  $W$  es un elemento de  $V(x)$ .
4.  $X$  es un elemento de  $V(x)$ .

Además, si a cada elemento  $x$  de  $X$  se le asigna un conjunto  $V(x)$  con las 4 propiedades indicadas entonces

$$\tau = \{\mathcal{O} \subseteq X | \mathcal{O} \in V(x) \text{ para todo } x \in \mathcal{O}\}$$

define una topología en  $X$ . Esto se comprueba fácilmente como sigue:

- Si  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  es una familia arbitraria de elementos de  $\tau$ , entonces cada punto  $x$  de  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  está contenido en algún  $\mathcal{O}_i$ , luego por definición  $\mathcal{O}_i \in V(x)$  y con mayor razón  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \in V(x)$ .
- Si  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  son elementos de  $\tau$ , cada elemento  $x$  de  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$  está en ambos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , luego por definición  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in V(x)$  de donde  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in V(x)$ .
- $X \in V(x)$  para todo  $x$ , luego en particular  $X \in \tau$ . La afirmación correspondiente sobre  $\emptyset$  es vacua y por lo tanto  $\emptyset \in \tau$ .

Sin embargo, los conjuntos  $V(x)$  originales no son necesariamente los conjuntos de vecindades de esta topología. Por ejemplo, si  $X = \{x, y, z\}$  y se define

$$V(x) = \{X, \{x, y\}\}, \quad V(y) = V(z) = \{X\},$$

entonces la topología definida de este modo es  $\tau = \{\emptyset, X\}$ , por lo que  $\{x, y\}$  no es una vecindad de  $x$ . Para que las vecindades de la nueva topología sean las esperadas, es necesario suponer que:

Para cada  $U$  en  $V(x)$  existe un elemento  $\mathcal{O} \in V(x)$  que está contenido en  $U$  y satisface la condición siguiente:

$$\forall y \in \mathcal{O} \left( \mathcal{O} \in V(y) \right).$$

Dicho en otras palabras, cada vecindad debe contener una vecindad abierta. Es inmediato que si esta condición se satisface las colecciones  $V(x)$  son de hecho los conjuntos de vecindades de la topología  $\tau$  definida mas arriba. Dejamos como ejercicio al lector comprobar que la topología  $\tau_1$  es mas fina que la topología  $\tau_2$  si y sólo si para cada  $x$  se tiene  $V_1(x) \supseteq V_2(x)$  donde  $V_i(x)$  es la colección de vecindades de  $x$  con respecto a la topología  $\tau_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Para cada subconjunto  $A$  de  $X$  se define su interior  $A^\circ$  y su clausura  $\overline{A}$  por

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \subseteq A \\ \mathcal{O} \text{ Abierto}}} \mathcal{O}, \quad \overline{A} = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ Cerrado}}} C.$$

Si  $B = A^c$ , entonces  $\overline{B} = (A^\circ)^c$  y  $\overline{A} = (B^\circ)^c$  (ejercicio). Para un subconjunto  $A$  de  $X$  se define su frontera por  $\delta A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ . Un subconjunto  $A$  de  $X$  se dice denso si  $\overline{A} = X$ :

**Proposición 1.4.** *Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$  con  $A \subseteq B$ , entonces  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .*

**Demostración** Se tiene la siguiente relación:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ Cerrado}}} C \subseteq \bigcap_{\substack{C \supseteq B \\ C \text{ Cerrado}}} C = \overline{B},$$

ya que los conjuntos intersectados a la derecha son una subcolección de los que se intersectan a la izquierda.  $\square$

**Proposición 1.5.** Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$  con  $A \subseteq B$ , entonces  $A^\circ \subseteq B^\circ$ .

**Demostración** Si  $A \subseteq B$ , entonces  $A^c \supseteq B^c$ , de donde  $\overline{A^c} \supseteq \overline{B^c}$ , y tomando complementos se tiene  $A^\circ \subseteq B^\circ$ .  $\square$

**Corolario 1.5.1.**  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ .

**Demostración** Por la proposición, se tiene

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}.$$

$\square$

**Corolario 1.5.2.**  $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ .

**Demostración** Por la proposición, se tiene que

$$\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \overline{A \cup B} \supseteq \overline{B}.$$

$\square$

Tomando complementos en ambos corolarios, se tiene:

**Corolario 1.5.3.**  $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$  y  $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ .

Una manera alternativa de definir la clausura es la siguiente:

**Proposición 1.6.** Un elemento  $x$  de  $X$  está en  $\overline{A}$  si y sólo si cada vecindad de  $x$  contiene puntos de  $A$ .

**Demostración** Si existe una vecindad  $U$  de  $x$  que no contiene puntos de  $A$ , entonces tomando una vecindad menor si es necesario podemos suponer que  $U$  es abierto, luego  $U^c$  es un cerrado que contiene a  $A$  y no a  $x$ , luego  $\overline{A} \subseteq U^c$ , por lo que  $\overline{A}$  no contiene a  $x$ . Por otro lado, si  $x$  no está en  $\overline{A}$ , entonces  $(\overline{A})^c$  es un abierto que contiene a  $x$  (luego es una vecindad de  $x$ ) y no contiene puntos de  $A$ .  $\square$

**Proposición 1.7.** *Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$ , entonces  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  y  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ .*

**Demostración** Basta ver que  $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$  y el resto se obtiene de los corolarios y tomando complementos. Si  $x$  es un punto de  $\overline{A \cup B}$ , entonces cada vecindad de  $x$  contiene puntos de  $A$  o de  $B$ . Si hay una vecindad  $U$  que no contiene puntos de  $A$  y una vecindad  $W$  que no contiene puntos de  $B$ , entonces  $U \cap W$  no contiene puntos de ninguno, lo que contradice la afirmación anterior. Se sigue que cada vecindad de  $x$  contiene puntos de  $A$  o que cada vecindad de  $x$  contiene puntos de  $B$ . En cualquier caso  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .  $\square$

**ejemplo 1.8.** En el espacio de Sierpinski  $S = \{1, 2\}$ , donde  $A = \{1\}$  es abierto y  $B = \{2\}$  es cerrado, se tiene  $\overline{A} = \{1, 2\}$ , por lo que  $\overline{A} \cap \overline{B} = B$ , pero  $\overline{A \cap B} = \emptyset$ . Se concluye que, en general,  $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$ . Del mismo modo, en general, se tiene que  $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$ .

## Bases

Una Colección  $\mathfrak{B}$  de subconjuntos abiertos de un espacio topológico  $(X, \tau)$  se llama base de la topología  $\tau$  si cada elemento de  $\tau$  es una unión de elementos de  $\mathfrak{B}$ . En particular, si  $\mathfrak{B}$  es una base de una topología  $\tau$ , se tiene que si  $B_1$  y  $B_2$  son elementos de  $\mathfrak{B}$ , entonces  $B_1 \cap B_2$  es unión de elementos de  $\mathfrak{B}$  (por ser un elemento de  $\tau$ ). Por otro lado, cualquier colección  $\mathfrak{B}$  de subconjuntos de un conjunto  $X$  que satisface esta propiedad es base de una topología  $\tau$  definida por

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in T} B \mid T \subseteq \mathfrak{B} \right\}.$$

Es claro que  $\tau$  así definida satisface las propiedades 2 y 3 de la definición de topología. Satisface también la propiedad 1 ya que

$$\left( \bigcup_{B \in T} B \right) \cap \left( \bigcup_{D \in S} D \right) = \bigcup_{(B,D) \in T \times S} B \cap D,$$



y cada uno de los subconjuntos  $B \cap D$  es unión de elementos de  $\mathfrak{B}$  por hipótesis. Si  $\mathfrak{A}$  es una colección arbitraria de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$I(\mathfrak{A}) = \left\{ \bigcap_{A \in T} A \mid T \subseteq \mathfrak{A} \text{ finito} \right\},$$

es base de una topología  $\tau$ . En este caso se dice que  $\mathfrak{A}$  es sub-base de  $\tau$ . Es posible definir una topología mediante una base o sub-base.

**ejemplo 1.9.** En la recta real  $\mathbb{R}$ , los intervalos abiertos son base de una topología, llamada la topología usual o métrica de  $\mathbb{R}$ .

**ejemplo 1.10.** Mas generalmente, si  $\Lambda$  es un conjunto totalmente ordenado arbitrario, los intervalos abiertos de  $\Lambda$  de los tipos

1.  $(a, b) = \{c \in \Lambda \mid a < c < b\}$ ,
2.  $(a, \infty) = \{c \in \Lambda \mid a < c\}$ ,
3.  $(-\infty, b) = \{c \in \Lambda \mid c < b\}$ ,

son base de una topología, llamada la topología del orden en  $\Lambda$ . Si cada elemento  $x$  de  $\Lambda$  tiene un antecesor  $a_x$  y un sucesor  $s_x$  se tiene  $\{x\} = (a_x, s_x)$ , por lo que todo subconjunto de  $\Lambda$  es abierto y la topología de  $\Lambda$  es discreta.

**ejemplo 1.11.** En la recta real  $\mathbb{R}$ , los intervalos semi-abiertos del tipo  $[a, b[$  son base de una topología  $\tau_r$ , llamada la topología de Sorgenfrey de  $\mathbb{R}$ . El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_r)$  se denota usualmente  $\mathbb{R}_r$ . Del mismo modo, los intervalos semi-abiertos del tipo  $]a, b]$  son base de una topología  $\tau_l$ . El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  se denota usualmente  $\mathbb{R}_l$ .

**ejemplo 1.12.** En la recta real  $\mathbb{R}$ , los intervalos infinitos del tipo  $]a, \infty[$  son base de una topología  $\tau_L$ . El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_L)$  se denota usualmente  $\mathbb{R}_L$ . Del mismo modo, los intervalos infinitos del tipo  $] - \infty, b[$  son base de una topología  $\tau_R$ . El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_R)$  se denota usualmente  $\mathbb{R}_R$ .

**ejemplo 1.13.** En el conjunto  $\mathbb{Z}$ , los subconjuntos de la forma

$$U_{a,t} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{p^t}\}$$

son base de una topología (ejercicio). Esta se llama la topología  $p$ -ádica de  $\mathbb{Z}$ .

**ejemplo 1.14.** En el conjunto  $\mathbb{Z}$ , los subconjuntos de la forma

$$\mathcal{O}_{a,n} = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a \pmod{n}\}$$

son base de una topología (usar el ejemplo anterior y el Teorema Chino de los Restos). Esta se llama la topología profinita de  $\mathbb{Z}$ .

**ejemplo 1.15.** En un espacio métrico  $(X, d)$ , los conjuntos de la forma

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

son base de una topología llamada la topología métrica de  $(X, d)$ . De hecho, si  $y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ , entonces

$$B(y, r_3) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2), \quad \forall r_3 < \min \{r_1 - d(x_1, y), r_2 - d(x_2, y)\},$$

de donde  $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$  es una unión (en general infinita) de conjuntos de la forma  $B(y, r_3)$ .

Similarmente, si  $x$  es un elemento de un espacio topológico  $X$ , una base de vecindades de  $x$  es una colección  $\mathfrak{B}$  de vecindades de  $x$  tal que para cada vecindad  $U$  de  $x$  existe una vecindad  $B \in \mathfrak{B}$  tal que  $B \subseteq U$ . Con esta definición, una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  de un punto  $x \in X$  tiene la propiedad de que, dadas vecindades  $B_1$  y  $B_2$  en  $\mathfrak{B}$ , existe una vecindad  $B_3 \in \mathfrak{B}$  tal que  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ . Es posible identificar bajo que condiciones si para cada  $x$  en  $X$  se asocia una colección  $\mathfrak{B}_x$  estas colecciones son base de vecindades de alguna topología. Los detalles se dejan como ejercicio.

Un punto  $x$  de un espacio topológico  $X$  se dice cerrado si  $\{x\} \subseteq X$  es un conjunto cerrado. Puntos abiertos y densos se definen del mismo modo.

## Ejercicios

1. Probar que en un espacio topológico, dos conjuntos abiertos no vacíos minimales son disjuntos.
2. Calcule cuantas topologías existen en un conjunto con tres elementos.
3. Sea  $\mathbb{R}_C$  el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma  $(-a, a)$ . Encuentre la clausura de  $\{0\}$  y de  $\{7\}$ .

4. Sea  $X$  un conjunto. Para cada elemento  $x \in X$  consideramos una colección  $\mathfrak{B}(x)$  de subconjuntos de  $X$  que satisface las propiedades siguientes:
- (a)  $\mathfrak{B}(x) \neq \emptyset$ .
  - (b) Cada conjunto en  $\mathfrak{B}(x)$  contiene a  $x$ .
  - (c) Si  $B_1$  y  $B_2$  están en  $\mathfrak{B}(x)$ , existe un conjunto  $B_3$  en  $\mathfrak{B}(x)$  que está contenido en  $B_1 \cap B_2$ .
  - (d) Para cada elemento  $B \in \mathfrak{B}(x)$  existe un conjunto  $\mathcal{O} \subseteq X$  con  $x \in \mathcal{O} \subseteq B$  tal que, para cada elemento  $y \in \mathcal{O}$ , existe  $B_y \in \mathfrak{B}(y)$  con  $B_y \subseteq \mathcal{O}$ .

Probar que existe una única topología en  $X$  que tiene a  $\mathfrak{B}(x)$  como base de vecindades de  $x$  para cada elemento  $x \in X$ .

- 5. Probar que un espacio es indiscreto si y sólo si cada punto es denso.
- 6. Probar que un espacio es discreto si y sólo si cada punto es abierto.
- 7. Probar que en un espacio métrico cada punto es cerrado.
- 8. Sea  $X$  un espacio topológico que tiene un punto abierto  $x$  y un punto denso  $y$ . Demuestre que  $x = y$ .

# Chapter 2

## Continuidad

En el capítulo anterior se introdujeron los espacios topológicos, que son los objetos de estudio de la topología. En este capítulo introducimos las funciones de interés entre espacios topológicos, que vienen a ser el análogo de las funciones lineales del álgebra lineal. En el presente contexto, este papel lo juegan las funciones continuas.

Una función  $f : X \rightarrow X'$  entre dos espacios topológicos  $(X, \tau)$  y  $(X', \tau')$  se dice continua si para todo abierto  $\mathcal{O}$  de  $\tau'$  su preimagen  $f^{-1}(\mathcal{O})$  es un abierto de la topología  $\tau$ . Equivalentemente, cada conjunto cerrado  $C$  con la topología  $\tau'$  tiene una preimagen  $f^{-1}(C)$  cerrada con respecto a la topología  $\tau$ . Es inmediato de la definición que la composición de funciones continuas es continua.

**ejemplo 2.1.** Si  $X$  es un espacio discreto, entonces toda función  $f : X \rightarrow X'$  es continua.

**ejemplo 2.2.** Si  $X'$  es un espacio indiscreto, entonces toda función  $f : X \rightarrow X'$  es continua.

**ejemplo 2.3.** Si  $X$  es un espacio indiscreto y  $X'$  es un espacio discreto, entonces las únicas funciones continuas  $f : X \rightarrow X'$  son las constantes.

**ejemplo 2.4.** Si  $S$  es el espacio de sierpinski, entonces  $f : X \rightarrow S$  es continua si y sólo si  $f^{-1}(1)$  es abierto.

**ejemplo 2.5.** Si  $X'$  es un espacio discreto, entonces una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua si y sólo si para cada elemento  $x' \in X'$ , el conjunto  $f^{-1}(x')$  es abierto. En este caso  $f^{-1}(x')$  es abierto y cerrado.

**ejemplo 2.6.** Si  $\tau$  y  $\tau_0$  son dos topologías en  $X$ , entonces la identidad  $i : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_0)$  es continua sí y sólo si  $\tau$  es mas fina que  $\tau_0$ .

**Proposición 2.7.** Sea  $\mathfrak{A}$  una sub-base de la topología de  $X'$ . Una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua si y sólo si para cada  $A \in \mathfrak{A}$  se tiene que  $f^{-1}(A)$  es abierto.

**Demostración** Si  $f$  es continua y  $A \in \mathfrak{A}$ , entonces en particular  $A$  es abierto y por lo tanto  $f^{-1}(A)$  es abierto. Por otro lado, si  $f^{-1}(A)$  es abierto para todo  $A \in \mathfrak{A}$ , entonces para  $B = \bigcap_{i=1}^n A_i \in I(\mathfrak{A})$ , con cada  $A_i$  en  $\mathfrak{A}$ , se tiene que  $f^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i)$  es abierto. Como cada abierto  $\mathcal{O}$  en  $X$  es de la forma  $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$ , con  $B_i \in I(\mathfrak{A})$ , entonces  $f^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$  es abierto.  $\square$

**Proposición 2.8.** Una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua si y sólo si para todo punto  $x \in X$  y toda vecindad  $U'$  de  $f(x)$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq U'$ .

**Demostración** Si  $f$  es continua y  $U'$  es una vecindad de  $f(x)$ , donde  $x$  es un punto de  $X$ , entonces existe un abierto  $\mathcal{O}' \in \tau'$  que satisface

$$f(x) \in \mathcal{O}' \subseteq U'.$$

Sea  $U = f^{-1}(\mathcal{O}')$  entonces  $x \in U$  y  $U$  es abierto, de donde  $U$  es una vecindad de  $x$  que satisface  $f(U) \subseteq \mathcal{O}' \subseteq U'$ . Por otro lado, si  $f$  satisface la segunda condición del enunciado, y si  $\mathcal{O}'$  es un abierto de  $\tau'$ , entonces  $\mathcal{O}'$  es una vecindad de cada uno de sus puntos. Sea  $x \in \mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{O}')$ . Como  $\mathcal{O}'$  es vecindad de  $f(x)$ , por hipótesis existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq \mathcal{O}'$ . De donde  $U \subseteq \mathcal{O}$ . Se sigue que  $\mathcal{O}$  es una vecindad de cada uno de sus puntos, luego es abierto.  $\square$

**Proposición 2.9.** Una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua si y sólo si, para todo punto  $x \in X$ , y toda vecindad  $B'$  en alguna base  $\mathfrak{B}_x$  de vecindades de  $f(x)$ , existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq B'$ .

**Demostración** Sigue inmeditamente del resultado precedente ya que cada vecindad de  $f(x)$  contiene alguna vecindad de la base.  $\square$

**ejemplo 2.10.** En  $\mathbb{Z}$  con la topología  $p$ -ádica (o profinita) toda función de la forma  $x \mapsto p(x)$  donde  $p$  es un polinomio es continua. Por otro lado, la función  $x \mapsto [\sqrt{x}]$  no lo es (ejercicio).

Una función  $f : X \rightarrow X'$  se dice continua en un punto  $x$  de  $X$  si para toda vecindad  $U'$  de  $f(x)$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq U'$ . Con esta definición, se sigue inmediatamente de los resultados precedentes que una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua si y sólo si es continua en cada punto de  $X$ .

**ejemplo 2.11.** Si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  son espacios métricos entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua en  $x \in X$  si y sólo si para cada vecindad del tipo  $B(f(x), \epsilon)$  en  $Y$  existe una vecindad del tipo  $B(x, \delta)$  tal que

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon),$$

o en otras palabras

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Se recupera así la definición de continuidad usual en análisis.

**ejemplo 2.12.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_L$  es continua en  $x$  si para cada vecindad de la forma  $]f(x) - \epsilon, \infty[$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(]x - \delta, x + \delta]) \subseteq ]f(x) - \epsilon, \infty[,$$

o dicho en otras palabras si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow f(y) > f(x) - \epsilon.$$

Una función que satisface esta propiedad se dice semicontinua inferiormente. Del mismo modo una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_R$  es continua en  $x$  si y sólo si es semicontinua superiormente.

**ejemplo 2.13.** Una función  $f : \mathbb{R}_r \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x$  si para cada vecindad de la forma  $]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$f([x, x + \delta]) \subseteq ]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[,$$

o dicho en otras palabras si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \leq y < x + \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Una función que satisface esta propiedad se dice continua por la derecha en  $x$ . Del mismo modo una función  $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x$  si y sólo si es continua por la izquierda.

**definición 2.14.** Una función continua  $f : X \rightarrow X'$  se dice un homeomorfismo si es biyectiva y su inversa  $f^{-1}$  es también continua. Dos espacios se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Como es usual para muchas categorías de estructuras matemáticas, espacios homeomorfos pueden considerarse como un mismo objeto con un cambio de language.

**ejemplo 2.15.** Para todo espacio topológico  $X$ , la función identidad  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo.

**ejemplo 2.16.** Para todo par de espacios topológicos discretos  $X$  e  $Y$ , toda biyección es un homeomorfismo. Lo mismo ocurre si  $X$  e  $Y$  son indiscretos.

**ejemplo 2.17.** Si  $X = \{0, 1\}$  con la topología de Sierpinski

$$\tau_1 = \{X, \{1\}, \emptyset\},$$

e  $Y = \{0, 1\}$  con la topología de Sierpinski opuesta

$$\tau_0 = \{X, \{0\}, \emptyset\},$$

la función  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f(x) = 1 - x$  es un homeomorfismo, mientras que la identidad, vista como función de  $X$  en  $Y$ , no lo es.

**ejemplo 2.18.** Si  $X = \mathbb{Z}$  con la topología  $p$ -ádica o profinita, la función  $n \mapsto -n$ , así como cualquier translación  $n \mapsto n + m$ , es un homeomorfismo.

**ejemplo 2.19.** Una isometría entre dos espacios métricos  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  es una función invertible  $f : X \rightarrow Y$  que satisface

$$d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Dos espacios se dicen isométricos si existe una isometría entre ellos. Toda isometría es una función continua, y su inversa es también una isometría. En particular, dos espacios métricos isométricos son homeomorfos.

**ejemplo 2.20.** El espacio métrico  $\mathbb{R}$  y el intervalo abierto  $Y = ]0, 1[$  son homeomorfos ya que las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

son continuas e inversas. Estos espacios no son, sin embargo, isométricos.

**Ejercicios**

1. Probar que toda función constante es continua, independientemente de la topología.
2. Probar que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_l$  es continua si y sólo si es constante. (Sugerencia: probar que debe ser continua con la topología usual y que cada punto debe ser un máximo local).
3. Un espacio topológico  $X$  se dice homogéneo si para cada par de puntos  $x$  e  $y$  en  $X$  existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  tal que  $f(x) = y$ . Un punto  $p$ , de un espacio topológico  $X$ , se dice denso, cerrado o abierto, si, respectivamente, el conjunto  $\{p\}$  es denso, cerrado o abierto, en  $X$ . Probar que:
  - (a) Si un espacio homogéneo tiene un punto denso, entonces cada punto es denso.
  - (b) Si un espacio homogéneo tiene un punto cerrado, entonces cada punto es cerrado.
  - (c) Si un espacio homogéneo tiene un punto abierto, entonces el espacio es discreto.
  - (d) En un espacio homogéneo finito, los abiertos no vacíos minimales tienen el mismo número de elementos.
4. Sea  $x \in X$  un punto denso, y sea  $y \in Y$  un punto cerrado. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua que satisface  $f(x) = y$ . Probar que  $f$  es constante.



# Chapter 3

## Redes

Un conjunto dirigido es para nosotros un conjunto parcialmente ordenado  $\Lambda$  tal que para cada par de elementos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $\Lambda$  existe un tercer elemento  $\lambda_3$  tal que  $\lambda_3 \geq \lambda_1, \lambda_2$ . Una red en un conjunto  $X$  es una función  $\phi : \Lambda \rightarrow X$ , o equivalentemente una familia de elementos de  $X$  indexada por  $\Lambda$ . Una red se denota  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en un espacio topológico  $X$  se dice converger a un elemento  $x_\infty$  si para todo  $U \in V(x_\infty)$  existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $x_\mu \in U$  para todo  $\mu \in \Lambda$  tal que  $\mu \geq \lambda$ . Simbólicamente se escribe  $x_\lambda \rightarrow x_\infty$ . Si es necesario especificar la topología  $\tau$  de  $X$  o el conjunto dirigido  $\Lambda$  utilizaremos también las notaciones

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau} x_\infty, \quad x_\lambda \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} x_\infty.$$

**Observación 3.1.** Nótese que si  $\mathfrak{B}$  es una base de vecindades de  $x$  es suficiente comprobar que la condición se cumple para cada  $W \in \mathfrak{B}$ , ya que todo elemento  $U \in V(x)$  contiene un elemento  $W \in \mathfrak{B}$  de donde  $x_\mu \in W$  implica  $x_\mu \in U$ .

**ejemplo 3.2.** Supongamos que  $\Lambda$  tiene un último elemento  $\omega$ . Entonces  $x_\lambda \rightarrow x_\infty$  si y sólo si  $x_\omega$  está contenido en cada vecindad de  $x_\infty$ . En particular,  $x_\lambda \rightarrow x_\omega$  para toda red indexada por  $\Lambda$ .

**ejemplo 3.3.** El conjunto  $\Lambda = \{\omega\}$  es un conjunto dirigido con el único orden posible. Se sigue que la definición tiene sentido en este caso. Una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  con este conjunto de índices está totalmente determinada por el elemento  $x_\omega$  por lo que en este caso escribiremos simplemente  $x_\omega \rightarrow x_\infty$  en vez de  $x_\lambda \rightarrow x_\infty$ . Por ejemplo en el espacio de Sierpinski usual, se tiene  $1 \rightarrow 0$  pero no es cierto que 0 converja a 1.

**ejemplo 3.4.** Un ejemplo importante de conjunto dirigido es la colección  $V(x)$  de entornos de un punto  $x \in X$  con la relación de orden  $\leq$  definida por la contención inversa ( $U \leq U'$  debe interpretarse como  $U \supseteq U'$ ), ya que  $U_1 \cap U_2$  está contenido en ambos  $U_1$  y  $U_2$ , y es por lo tanto “mayor” que ambos. Si  $x_U$  es un punto de  $U$  para cada  $U \in V(x)$ , entonces  $x_U \rightarrow x$ . De hecho si  $U' \geq U$  (es decir  $U' \subseteq U$ ) entonces  $x_{U'} \in U' \subseteq U$ .

**ejemplo 3.5.** Si  $\mathfrak{B}$  es una base de vecindades de  $x$  en un espacio topológico  $X$ , entonces  $\mathfrak{B}$  es un conjunto dirigido con respecto a la contención inversa. Si  $x_B$  es un punto de  $B$  para cada  $B \in \mathfrak{B}$ , se tiene  $x_B \rightarrow x$  como en el ejemplo anterior.

**Observación 3.6.** La construcción de una red convergente que aparece en los ejemplos anteriores depende de el axioma de selección, ya que debe escogerse un elemento en cada vecindad  $U$ . Un modo de evitar esta dependencia es el siguiente: Se define un conjunto dirigido  $\tilde{V}(x)$  como el conjunto de pares  $(U, y)$  con  $U \in V$  e  $y \in U$ . Se dice que  $(U, y) \leq (U', y')$  si  $U$  contiene a  $U'$  estrictamente o bien si  $(U, y) = (U', y')$ . Con este conjunto dirigido la red  $x_{(U,y)} = y$  esta bien definida y por cierto  $x_{(U,y)} \rightarrow x$ . Nótese que para que el conjunto de pares  $(U, y)$  sea realmente un conjunto dirigido es necesario que se cumpla al menos una de las condiciones siguientes:

1.  $V(x)$  no tenga un último elemento,
2. el último elemento de  $V(x)$  es  $\{x\}$ ,

ya que, si  $U$  es la vecindad mas pequeña de  $x$ , y si  $y$  e  $y'$  son dos de sus elementos, no hay, con nuestra definición, un conjunto que sea menor que  $(U, y)$  y  $(U, y')$  simultaneamente. Esto se resuelve a su vez mediante una generalización del concepto de conjunto dirigido. Un conjunto dirigido generalizado es un conjunto  $\Lambda$  con una relación  $\leq$  reflexiva y transitiva (pero no necesariamente antisimétrica). Una red generalizada  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  donde  $\Lambda$  es un conjunto dirigido generalizado se define del mismo modo que una red, y la definición de convergencia es la misma. Con esta definición el conjunto de pares  $(U, y)$  con  $U \in V(x)$  e  $y \in U$  es un conjunto dirigido generalizado con la relación  $(U, y) \leq (U', y')$  si  $U$  contiene a  $U'$ , y la red  $x_{(U,y)} = y$  converge a  $x$  aún si  $V(x)$  tiene un último elemento. En estas notas, preferiremos construcciones que usan el axioma de selección como la del ejemplo anterior por simplicidad técnica.

**Proposición 3.7.** *Un elemento  $x$  de  $X$  pertenece a la clausura  $\bar{A}$  del conjunto  $A$  si y sólo si existe una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  con  $x_\lambda \in A$  tal que  $x_\lambda \rightarrow x$ .*

**Demostración** Sea  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red en  $A$ . Supongamos que  $x_\lambda \rightarrow x \in X$ . Si  $x \notin \overline{A}$ , entonces  $\mathcal{O} = (\overline{A})^c$  es un abierto que contiene a  $x$ . Por definición de convergencia, debe existir  $\lambda \in \Lambda$  tal que si  $\mu \geq \lambda$ , se tiene  $x_\mu \in \mathcal{O}$ , en particular,  $x_\mu \notin \mathcal{O}^c \supseteq A$ . Esto contradice la elección de la red.

Sea  $\Lambda = V(x)$  el conjunto dirigido de entornos de un punto  $x \in X$ . Sea  $U \in V(x)$  un entorno. Sea  $\mathcal{O} \subseteq U$  un abierto que contiene a  $x$  (que existe por definición de entorno). Entonces  $x \in \overline{A}$  implica que  $\mathcal{O}^c$  no contiene a  $A$  (ya que este es un subconjunto cerrado que no contiene a  $x$ ). Se concluye que  $A \cap \mathcal{O}$  es no vacío y podemos escoger un elemento  $x_U \in A \cap \mathcal{O} \subseteq A \cap U$ . Como  $x_U \in U$  para todo  $U \in V(x)$ , se tiene  $x_U \rightarrow x$ .  $\square$

**Corolario 3.7.1.** *Un elemento  $x$  de  $X$  pertenece a la frontera  $\delta(A)$  del conjunto  $A$  si y sólo si existe una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  con  $x_\lambda \in A$  tal que  $x_\lambda \rightarrow x$  y una red  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  con  $y_\mu \in A^c$  tal que  $y_\mu \rightarrow x$ .*

**Observación 3.8.** Es posible dar una demostración de la proposición precedente que no utilice el axioma de selección como sigue:

Sea  $\Lambda = \{(U, y) | U \in V(x), y \in U \cap A\}$  con la relación de orden del ejemplo 3.6. Se demuestra como en la primera demostración que para cada vecindad  $U$  existe al menos algún par  $(U, y)$  en  $\Lambda$ . De nuevo, si definimos  $x_{(U, y)} = y$ , esta red está bien definida y se tiene  $x_{(U, y)} \rightarrow x$ . Si  $V(x)$  tiene un último elemento que no es un punto, es necesario utilizar redes generalizadas como antes.

Sin embargo, utilizando la demostración dada de la proposición 3.7 puede suponerse que de hecho  $\Lambda = M = V(x)$  en el corolario. Puede también suponerse que  $\Lambda = M = \mathfrak{B}$  para una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  de  $x$ .

**ejemplo 3.9.** Utilizando redes podemos dar una segunda demostración de que si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$  con  $A \subseteq B$ , entonces  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ . Si  $x \in \overline{A}$ , existe una red de elementos de  $A$  que converge a  $x$ , pero esta es también una red de elementos de  $B$ .

**ejemplo 3.10.** Si  $X$  es el espacio de Sierpinski con  $\{1\}$  abierto, se tiene  $1 \rightarrow 0$ . Se concluye que  $0$  pertenece a la clausura de  $\{1\}$ .

**Proposición 3.11.** *Si un conjunto  $X$  tiene dos topologías  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , entonces  $\tau_1$  es mas fina que  $\tau_2$  si y sólo si cada red que converge con respecto a  $\tau_1$  es convergente con respecto a  $\tau_2$ .*

**Demostración** Si  $\tau_1$  es más fina que  $\tau_2$ , y si  $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1} x$  entonces para cada vecindad  $U$  de  $x$  en  $\tau_1$  existe un  $\lambda_0$  a partir del cual los elementos  $x_\lambda$  están en  $U$ . Como toda vecindad de  $x$  con respecto a  $\tau_2$  es en particular una vecindad de  $x$  con respecto a  $\tau_1$  se tiene también que  $x_\lambda \xrightarrow{\tau_2} x$ . Por otro lado, si  $\tau_1$  no es más fina que  $\tau_2$ , existe un cerrado  $A$  con respecto a  $\tau_2$  que no es cerrado con respecto a  $\tau_1$ . Sea  $x$  un punto de la clausura de  $A$  en la topología  $\tau_1$  que no está en  $A$  (que existe ya que  $A$  no es cerrado en esa topología). Entonces por la proposición 3.7 existe una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en  $A$  que converge a  $x$  con respecto a  $\tau_1$ . Esta red no puede converger a  $x$  con respecto a  $\tau_2$ , ya que  $A$  es cerrado en esa topología.  $\square$

**Corolario 3.11.1.** Sean  $\tau_1$  y  $\tau_2$  dos topologías en  $X$ , entonces  $\tau_1$  coincide con  $\tau_2$  si y sólo si cada red que converge con respecto a  $\tau_1$  es convergente con respecto a  $\tau_2$  y conversamente.  $\square$

**ejemplo 3.12.** Si  $\Lambda = \mathbb{N}$  ordenado de la manera usual, la red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  se denomina una sucesión. En un espacio métrico, el concepto de convergencia de sucesiones aquí introducido coincide con el concepto usual en análisis.

**ejemplo 3.13.** Si  $\Lambda = \mathbb{R}^+$  ordenado de la manera usual, la red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}$  converge a un elemento  $L \in \mathbb{R}$  si y sólo si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = L$$

en el sentido usual.

**ejemplo 3.14.** Si al conjunto  $\Lambda = \mathbb{R} - \{a\}$  se le dá el orden  $\trianglelefteq$ , donde

$$b \trianglelefteq c \iff |b - a| < |c - a| \text{ o } b = c,$$

la red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}$  converge a un elemento  $L \in \mathbb{R}$  si y sólo si

$$\lim_{r \rightarrow a} x_r = L$$

en el sentido usual.

**ejemplo 3.15.** Sea  $X$  un conjunto incontable y sea  $\tau$  la topología cofinita en  $X$ . Entonces

$$\Omega = \{T \subseteq X \mid T \text{ es finito}\}$$

es un conjunto dirigido con la contención (directa, no inversa esta vez). Para  $T \in \Omega$ , sea  $\chi_T$  su función característica (con valores reales). Entonces para

cada  $x \in X$  se tiene  $\chi_T(x) \rightarrow 1$ , ya que para cada  $x$  existe un  $T'$  suficientemente grande (de hecho  $T' = \{x\}$  es suficiente) para que si  $T \supseteq T'$  entonces  $\chi_T(x) = 1$ . Dejamos al lector la tarea de comprobar que ninguna sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con soporte finito satisface  $f_n(x) \rightarrow 1$  para todo  $x$ .

**Observación 3.16.** Para quienes conozcan la teoría de la medida, el ejemplo anterior demuestra que el teorema de convergencia dominada de Lebesgue no se extiende a redes.

**ejemplo 3.17.** Si  $\mathbb{N}_d$  es el conjunto dirigido de enteros ordenados por divisibilidad, la red  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}_d}$  converge a 0 en la topología profinita (o en la topología  $p$ -ádica para todo primo  $p$ ). Esto no es cierto para la sucesión  $x_n = n$ . Por otro lado, si una sucesión converge entonces también converge como red indexada por  $\mathbb{N}_d$ .

**ejemplo 3.18.** Mas generalmente, sean  $(X, \leq)$  y  $(X, \trianglelefteq)$  dos conjuntos dirigidos con el mismo conjunto subyacente. Si para cada  $a \in X$  existe  $c = c(a)$  tal que  $c \leq b$  implica  $a \trianglelefteq b$ , entonces cada red que converge con respecto a  $\trianglelefteq$  converge con respecto a  $\leq$ .

**ejemplo 3.19.** Sea  $[a, b]$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y sea  $\wp[a, b]$  el conjunto de particiones

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

del intervalo ordenado por contención. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Para  $P \in \wp[a, b]$ , definimos la suma superior de Riemann por

$$S^+(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Entonces  $S^+(f, P) \rightarrow \int^- f$  en el sentido de redes. Lo mismo es válido para sumas inferiores de Riemann.

**ejemplo 3.20.** Sea ahora  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función Riemann integrable. Sea  $y : \wp[a, b] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface  $y(P, i) \in [x_{i-1}, x_i]$  para  $P \in \wp[a, b]$  y para cada  $i = 1, \dots, n = n(P)$ . Diremos que  $y$  es una elección de elementos de cada partición. Sea

$$I_y(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(y(P, i)).$$

Entonces nuevamente  $I_y(f, P) \rightarrow \int f$ , para todo  $y$ . De hecho, una función  $f$  acotada en  $[a, b]$  es integrable sí y sólo si este límite existe para todo  $y$  y no depende de  $y$ , ya que puede escogerse siempre el mínimo o siempre el máximo. Dejamos al lector la tarea de determinar si es suficiente asumir que el límite siempre existe.

**ejemplo 3.21.** En algunos libros de cálculo se define la integral como sigue: Una función  $f$  acotada es Riemann-integrable si existe el límite de  $I_y(f, P)$  cuando  $|P| \rightarrow 0$  y es independiente de  $y$ . Aquí  $|P|$  es el tamaño de la partición que se define por

$$|P| = \max_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}), \quad P = \{x_0, \dots, x_n\}.$$

En términos de redes, esta definición es equivalente a la de límite de  $I_y(f, P)$  con respecto al conjunto dirigido  $\wp_0[a, b]$  de particiones con el orden

$$P \trianglelefteq P' \iff |P| < |P'| \text{ o } P = P'.$$

Si  $P'' \subseteq P'$  con  $|P'| < |P|$ , entonces  $P'' \trianglelefteq P$ . Se sigue que si una función es Riemann-integrable con esta definición también lo es con la anterior. La conversa es también cierta como veremos luego.

**ejemplo 3.22.** En análisis se dice que una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones medibles en un espacio de medida  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  converge en medida a una función  $f$  si para todo  $\epsilon > 0$  y todo  $\delta > 0$  existe  $N$  tal que  $n > N$  implica:

$$\mu \left( \left\{ x \in \Omega \mid |f(x) - f_n(x)| > \epsilon \right\} \right) < \delta.$$

Nótese que esto puede re-escribirse del siguiente modo:

Para cada par de funciones  $f$  y  $g$  sea

$$A_{f,g,\epsilon} = \left\{ x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| > \epsilon \right\},$$

y sea

$$\mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta} = \left\{ g \text{ medible en } \Omega \mid \mu(A_{f,g,\epsilon}) < \delta \right\}.$$

Entonces  $f_n$  converge a  $f$  en medida si para cada conjunto de la forma  $\mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta}$  existe  $N$  tal que  $n > N$  implica  $f_n \in \mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta}$ .

Esto equivale a decir que  $f_n$  converge a  $f$  con respecto a la topología <sup>1</sup>  $\tau_\mu$  que tiene como sub-base los conjuntos de la forma  $\mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta}$ .

**definición 3.23.** Una función  $\phi : \Lambda \rightarrow M$ , entre conjuntos dirigidos, se dice creciente, si  $\lambda \leq \lambda'$  implica  $\phi(\lambda) \leq \phi(\lambda')$  para cada par de elementos  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ . Cuando  $\lambda < \lambda'$  implica  $\phi(\lambda) < \phi(\lambda')$ , la función se dice estrictamente creciente. Una función creciente  $\phi : \Lambda \rightarrow M$ , donde  $\Lambda$  y  $M$  son conjuntos dirigidos, se dice cofinal si para todo  $\mu \in M$  existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $\phi(\lambda) \geq \mu$ . Si  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  es una red en  $X$ , entonces  $\{y_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$  es la sub-red definida por la función cofinal  $\phi$ . Cuando  $\phi$  es estrictamente creciente diremos una subred estricta. Si  $\Lambda = \mathbb{N}$  con el orden usual, se dice que  $\{y_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una sub-sucesión. Nótese, sin embargo, que el término sub-sucesión se usa, a menudo, como sinónimo de sub-sucesión estricta, en la literatura.

**ejemplo 3.24.** Si  $\Lambda$  es un conjunto dirigido y  $M$  es un subconjunto tal que para todo  $\lambda \in \Lambda$  existe un elemento  $\mu \in M$  tal que  $\mu \geq \lambda$ , entonces la inclusión  $M \hookrightarrow \Lambda$  es cofinal. En particular, si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red, entonces  $\{x_\mu\}_{\mu \in M}$  es una subred. En particular, toda red indiceada por  $V(x)$  tiene una subred indiceada por una base  $\mathfrak{B}$  de vecindades de  $B$ . Una sub-red definida por una inclusión se dice fundamental. Toda sub-red fundamental es estricta.

**Proposición 3.25.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Si una red converge a un elemento  $y \in X$ , también lo hace cualquier sub-red.*

**Demostración** Sea  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  una red que converge a  $y$  y sea  $\phi : \Lambda \rightarrow M$  una función cofinal. Para toda vecindad  $U \in V(x)$  existe  $\mu_0$  en  $M$  tal que si  $\mu \geq \mu_0$ , entonces  $y_\mu \in U$ . Sea  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $\phi(\lambda_0) \geq \mu_0$ . Entonces, para todo  $\lambda \geq \lambda_0$  se tiene  $\phi(\lambda) \geq \mu_0$  y por lo tanto  $y_{\phi(\lambda)} \in U$ .  $\square$

<sup>1</sup>Cuando  $\Omega$  tiene medida finita, esta topología está definida por la métrica  $\rho$ , donde

$$\rho(f, g) = \int_{\Omega} \max\{|f(x) - g(x)|, 1\} d\mu(x).$$

Similarmente, si  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  es no-atómica uno puede definir una métrica mediante

$$\rho(f, g) = \sup_{\mu(F)=1} \int_F \max\{|f(x) - g(x)|, 1\} d\mu(x).$$

**definición 3.26.** Una red  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ , en un espacio topológico  $X$ , permanece lejos de  $y$  si existe una vecindad  $V$  de  $y$  en  $X$  tal que  $y_\mu \notin V$  para todo  $\mu$ .

**Lema 3.27.** Sea  $y \in X$ . Sea  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  una red en  $X$  que permanece lejos de  $y$ . Entonces ninguna sub-red de  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  converge a  $y \in X$ .

**Demostración** Sea  $\phi : \Lambda \rightarrow M$  una función cofinal tal que  $y_{\phi(\lambda)} \rightarrow y$ . Entonces, si  $V$  es como en la Definición 3.26, se tiene  $y_{\phi(\lambda)} \in V$ , para algún  $\lambda \in \Lambda$ . Esto contradice la hipótesis.  $\square$

**Proposición 3.28.** Sea  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  una red en el espacio topológico  $X$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  converge a  $y$ .
2. toda sub-red de  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  tiene un sub-red convergente a  $y$ .
3. toda sub-red fundamental de  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  tiene una sub-red convergente a  $y$ .

**Demostración** Basta probar que (3) implica (1). En particular, basta ver que si  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  no converge a  $y$ , existe un sub-red fundamental que permanece lejos de  $y$ . Por definición de convergencia, existe una vecindad  $V$  de  $y$  tal que para todo  $\mu \in M$  existe  $\mu' > \mu$  tal que  $y_{\mu'} \notin V$ . Basta ver que

$$\Lambda = \{\mu \in M \mid y_\mu \notin V\}$$

es un subconjunto dirigido cofinal en  $M$ , ya que la sub-red correspondiente ciertamente permanece lejos de  $y$ . Es también inmediato del párrafo precedente que  $\Lambda$  contiene un elemento mayor o igual a cada elemento de  $M$ . Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son elementos de  $\Lambda$ , entonces existe  $\mu \in M$  mayor o igual a ambos. Como existe  $\lambda_3 \in \Lambda$  mayor a  $\mu$ , se sigue que  $\Lambda$  es un conjunto dirigido, y por lo que precede es cofinal.  $\square$

**ejemplo 3.29.** La función  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \wp_0[a, b]$  definida por

$$\phi(n) = P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, b \right\}$$



que asocia una partición a cada entero  $n$  es cofinal (ver el ejemplo 3.21 para la definición del orden en  $\wp_0[a, b]$ ). Se sigue que por lo que si una función es integrable con nuestra segunda definición de integrabilidad, se tiene

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left( a + \frac{i(b-a)}{n} \right).$$

Nótese sin embargo que  $n \mapsto P_n$  no es cofinal si se considera como una función de  $\mathbb{N}$  el el conjunto de particiones  $\wp[a, b]$  que está ordenado por contención (ver el ejemplo 3.19). Dejamos como ejercicio al lector comprobar que si  $\wp_{\mathbb{Q}}[a, b]$  es el conjunto dirigido de particiones con extremos en  $a + \mathbb{Q}(b-a)$  con la restricción del orden  $\wp[a, b]$ , entonces la función  $\phi : \mathbb{N}_d \rightarrow \wp_{\mathbb{Q}}[a, b]$  definida por  $\phi(m) = P_m$  es cofinal.

Nótese que si  $\Lambda$  es un subconjunto cofinal del conjunto de particiones  $\wp_0[a, b]$  (ver ejemplo 3.21), entonces  $\Lambda$  tiene un sub-sucesión. De hecho, basta tomar cualquier sucesión de elementos  $\{P_n\}_n$  de  $\Lambda$  tales que la sucesión  $\{|P_n|\}_n$  sea estrictamente decreciente y tienda a 0. Tal sucesión existe por la hipótesis de cofinalidad. Se sigue que para terminar la demostración de que ambas definiciones de integral coinciden, basta ver que toda sucesión de particiones  $\{P_n\}_n$  tal que  $|P_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y toda elección  $y$  de elementos de cada partición satisface

$$I_y(f, P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Basta ver que  $I_y(f, P_n) = \int f_{P_n, y}(t) dt$  donde  $f_{P_n, y}$  es una función escalonada apropiada. Si  $|P_n| \rightarrow 0$ , entonces  $f_{P_n, y}$  converge a  $f$  puntualmente en cada punto de continuidad de  $f$ . Como una función Riemann integrable es continua en casi todo punto el resultado sigue del teorema de convergencia dominada.

Otra aplicación de las funciones cofinales es la siguiente:

**Proposición 3.30.** *Si  $\phi : \Lambda \rightarrow V(x)$  es una función creciente cofinal y  $x_\lambda \in \phi(\lambda)$  para toda  $\lambda$  en  $\Lambda$  entonces  $x_\lambda \rightarrow x$ .*

**Demostración** Sea  $U$  una vecindad de  $x$ . Por definición de cofinal existe  $\lambda$  tal que  $\phi(\lambda) \subseteq U$ . Luego si  $\mu > \lambda$  se tiene  $x_\mu \in \phi(\mu) \subseteq \phi(\lambda) \subseteq U$ .  $\square$

**definición 3.31.** Un espacio topológico  $X$  se dice primero contable si para cada  $x \in X$  existe una base numerable de vecindades de  $x$ . Equivalentemente,

$X$  es primero contable si para cada  $x \in X$  existe una función cofinal  $\phi : \Lambda \rightarrow V(x)$  con  $\Lambda$  numerable. Diremos que una red  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  es numerable si  $M$  lo es. En particular, en un espacio primero contable toda red indiceada por  $V(x)$  tiene una sub-red numerable.

**Proposición 3.32.** *Si  $\Lambda$  es un conjunto dirigido numerable, entonces existe una función cofinal  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ . Además, si  $\Lambda$  no tiene último elemento, puede escogerse  $\phi$  estrictamente creciente.*

**Demostración** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ . Se define  $\mu_1 = \lambda_1$ , y para cada  $n \in \mathbb{N}$  se escoge  $\mu_{n+1}$  de modo que  $\mu_{n+1} \geq \mu_n$  y  $\mu_{n+1} \geq \lambda_{n+1}$ . Entonces la función  $n \mapsto \mu_n$  es cofinal. Además, si  $\Lambda$  no tiene último elemento, las desigualdades de arriba se pueden tomar estrictas.  $\square$

**Corolario 3.32.1.** *En un espacio primero contable cada red indiceada por  $V(x)$  tiene una sub-sucesión.*  $\square$

**Corolario 3.32.2.** *En un espacio primero contable  $X$ , un elemento  $x$  está en la clausura de un subconjunto  $A$  si y sólo si existe una sucesión de elementos de  $A$  que converge a  $x$ .*

**Demostración** Por la demostración 1 de la proposición 3.7, se tiene que existe una red de elementos de  $A$  indiceada por  $V(x)$  que converge a  $x$ . Por el corolario precedente, tal red tiene un sub-sucesión.  $\square$

**ejemplo 3.33** (Espacios métricos). Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces para cada  $x$  en  $X$  los conjuntos  $B(x, \frac{1}{n})$  son una base numerable de vecindades de  $x$ . De hecho  $n \mapsto B(x, \frac{1}{n})$  es cofinal. Se sigue que todo espacio métrico es primero contable. En particular, un elemento  $x$  está en la clausura de un subconjunto  $A$  si y sólo si hay una sucesión de elementos de  $A$  que convergen a  $x$ . Con esto recuperamos la noción usual de clausura en análisis.

**ejemplo 3.34** (Redes de Cauchy en espacios métricos). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en  $x$  se dice de Cauchy si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\lambda(\epsilon) \in \Lambda$  tal que

$$\mu, \nu \geq \lambda(\epsilon) \Rightarrow d(x_\mu, x_\nu) < \epsilon.$$

Un espacio métrico se dice completo si cada sucesión de Cauchy converge. De hecho, es cierto que toda red de Cauchy en un espacio métrico completo converge. Para ver esto, sea  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red de Cauchy. Para cada  $n$  sea

$$\lambda_n > \lambda(1/m), \quad m = 1, \dots, n,$$

entonces en particular  $\lambda_n \geq \lambda(1/n)$ , de donde la sucesión  $\{x_{\lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy y tiene un límite  $x$ . Además, tomando el límite  $m \rightarrow \infty$  en

$$d(x_{\lambda_m}, x_\mu) < \frac{1}{n}, \quad \forall m > n, \quad \forall \mu > \lambda_n,$$

se tiene

$$d(x, x_\mu) < \frac{1}{n}, \quad \forall \mu > \lambda_n,$$

por lo que la red original converge al mismo límite <sup>2</sup>.

### Redes y continuidad

**Proposición 3.35.** *Sean  $X$  y  $X'$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow X'$  una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  *$f$  es continua en  $x \in X$ .*
2. *para toda red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  que converge a  $x$  se tiene  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ .*
3. *para toda red  $\{x_U\}_{U \in V(x)}$  que satisface  $x_U \in U$  se tiene  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ .*
4. *para toda red  $\{x_U\}_{U \in V(x)}$  que satisface  $x_U \in U$  y para toda vecindad  $U'$  de  $f(x)$  se tiene que  $f(x_U) \in U'$  para algún  $U$ .*

**Demostración** Supongamos que  $f$  es continua en  $x$ . Sea  $U'$  una vecindad de  $f(x)$ . Entonces existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq U'$ . Por definición de convergencia, existe  $\lambda_0$  tal que para  $\lambda > \lambda_0$  se tiene  $x_\lambda \in U$ , de donde  $f(x_\lambda) \in U'$ . Se sigue que (1) implica (2). Es trivial que (2) implica (3) y que (3) implica (4). Por otro lado, si  $f$  no es continua en  $x$  existe una vecindad  $U'$  de  $f(x)$  tal que en cada vecindad  $U$  de  $x$  existe algún punto  $x_U$  tal que  $f(x_U) \notin U'$ . Se sigue que (4) implica (1).  $\square$

Se deja como ejercicio al lector escribir una versión de (1)  $\iff$  (2) que no dependa de el axioma de selección (usando conjuntos dirigidos generalizados). Este resultado permite estudiar propiedades de la continuidad en término de convergencia como es usual en análisis.

<sup>2</sup>Nótese, sin embargo, que  $n \mapsto \lambda_n$  no es necesariamente cofinal.

**ejemplo 3.36.** Puede demostrarse que la composición de funciones continuas es continua, usando esta caracterización, como sigue: Si  $f : X \rightarrow X'$  y  $g : X' \rightarrow X''$  son continuas entonces

$$x_\lambda \rightarrow x_\infty \quad \Rightarrow \quad f(x_\lambda) \rightarrow f(x_\infty) \quad \Rightarrow \quad g \circ f(x_\lambda) \rightarrow g \circ f(x_\infty).$$

**Proposición 3.37.** *Supongamos que  $X$  es primero contable. Una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua en un punto  $x$  de  $X$  si y sólo si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x$  se tiene  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .*

**Demostración** Si  $f$  es continua en  $x$ , entonces cada sucesión es en particular una red y se aplica el resultado precedente. Si  $f$  no es continua en  $x$ , existe una red  $\{x_U\}_{U \in V(x)}$  tal que  $x_U \in U$  y tal que existe una vecindad  $U'$  de  $f(x)$  que no contiene a ningún  $f(x_U)$ . Como  $X$  es primero contable, la red  $\{x_U\}_{U \in V(x)}$  tiene una subsucesión  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y cada  $y_n$  es uno de los  $x_U$ , de modo que  $f(y_n) \notin U'$ . Por otro lado la hipótesis implica que  $f(y_n)$  converge a  $f(x)$ . La contradicción termina la prueba.  $\square$

**Proposición 3.38.** *Sea  $\mathfrak{B}$  una base de vecindades de un punto  $x$  de  $X$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es continua en  $x \in X$ .
2. para toda red  $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{B}}$  que satisface  $x_U \in U$  se tiene  $f(x_U) \rightarrow f(x)$ .
3. para toda red  $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{B}}$  que satisface  $x_U \in U$  y para toda vecindad  $U'$  de  $f(x)$  se tiene que  $f(x_U) \in U'$  para algún  $U$ .

**Demostración** Es inmediato que (1) implica (2) y que (2) implica (3). Para ver que (3) implica (1), basta ver que (3) implica la condición (4) de la proposición 3.35.  $\square$

Existe también un modo de deducir propiedades de la convergencia utilizando propiedades de la continuidad. Para ello, a cada conjunto dirigido  $\Lambda$  se le asocia un espacio topológico  $\tilde{\Lambda}$  que como conjunto es simplemente  $\Lambda \cup \{\infty\}$ , donde  $\infty$  es un elemento arbitrario que no pertenece a  $\Lambda$ . Para definir la topología en  $\tilde{\Lambda}$ , observamos que la colección

$$B = \varnothing(\Lambda) \cup \left\{ [\lambda, \infty[ \cup \{\infty\} \right\},$$

donde  $\wp(\Lambda)$  es la colección de todos los subconjuntos de  $\Lambda$  y

$$[\lambda, \infty[ = \{\mu \in \Lambda \mid \mu \geq \lambda\},$$

entonces  $B$  es base de una topología en  $\Lambda \cup \{\infty\}$  (ejercicio). Con esta topología las vecindades de un elemento  $\lambda \in \Lambda$  son simplemente todos los conjuntos que lo contienen. Las vecindades de  $\infty$  son aquellas que contienen a un conjunto de la forma  $]\lambda, \infty[$ .

**Proposición 3.39.** *Una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a un elemento  $x_\infty$  si y sólo si la función  $f : \tilde{\Lambda} \rightarrow X$  definida por  $f(\lambda) = x_\lambda$  y  $f(\infty) = x_\infty$  es continua.*

**Demostración** Supongamos primero que  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a  $x_\infty$ . Probaremos que  $f$  es continua. Para  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\{\lambda\}$  es una vecindad de  $\lambda$  en  $\tilde{\Lambda}$  tal que  $f(\{\lambda\}) \subseteq U'$  para toda vecindad  $U'$  de  $x_\lambda$ . Basta por lo tanto considerar la continuidad en  $\infty$ . Sea  $U'$  una vecindad de  $x_\infty$ . Entonces existe  $\lambda_0$  tal que si  $\lambda \geq \lambda_0$  se tiene  $x_\lambda \in U'$ . Se sigue que  $f(U_{\lambda_0}) \subseteq U'$ , donde

$$U_\lambda = [\lambda, \infty[ \cup \{\infty\}.$$

Supongamos ahora que  $f$  es continua. Como  $\lambda \mapsto U_\lambda$  es una función cofinal entre los conjuntos dirigidos  $\Lambda$  y  $V(\infty)$ , y se tiene  $\lambda \in U_\lambda$ , se concluye que  $\lambda \rightarrow \infty$ . En particular, como  $f$  es continua

$$x_\lambda = f(\lambda) \rightarrow f(\infty) = x_\infty.$$

□

### Convergencia uniforme en espacios métricos

Sea  $X$  un conjunto arbitrario. Sea  $Y$  un espacio métrico completo. El espacio  $\mathfrak{B}(X, Y)$  de funciones acotadas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es un espacio métrico con  $d_u(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ . Si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy entonces para cada  $x \in X$  la sucesión  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $Y$ , luego converge a un elemento  $f(x)$ . La función  $f$  así definida es acotada y es el límite de la sucesión en la topología de  $\mathfrak{B}(X, Y)$ , pues tomando  $n \rightarrow \infty$  en  $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$  se tiene  $d(f(x), f_m(x)) < \epsilon$  y como  $x$  es arbitrario,  $d_u(f, f_m) < \epsilon$ . En particular, si  $Y = \mathbb{R}$  y si  $g_i : X \rightarrow Y$  es una función que satisface  $|g_i(x)| \leq m_i$  con  $\sum_i m_i$  convergente, entonces la serie  $\sum_i g_i(x)$  es uniformemente convergente. Usaremos este hecho mas adelante.

**Proposición 3.40.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $Y$  un espacio métrico. Si una red  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de funciones continuas acotadas  $f_\lambda : X \rightarrow Y$  converge uniformemente en  $X$  a una función acotada  $f$ , entonces  $f$  es continua.*

**Demostración** Sea  $\{x_\mu\}_{\mu \in M}$  una red en  $X$  que converja a un punto  $x \in X$ . Sea  $\epsilon > 0$  entonces existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow d(f(z), f_\lambda(z)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall z \in X.$$

Por otro lado, como  $f_{\lambda_0}$  es continua, se tiene  $f_{\lambda_0}(x_\mu) \rightarrow f_{\lambda_0}(x)$ , en particular existe  $\mu_0$  tal que si  $\mu > \mu_0$  se tiene

$$d(f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(x_\mu)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Se sigue que

$$d(f(x), f(x_\mu)) \leq d(f(x), f_{\lambda_0}(x)) + d(f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(x_\mu)) + d(f_{\lambda_0}(x_\mu), f_\lambda(x_\mu)) < \epsilon.$$

De donde  $f(x_\mu) \rightarrow f(x)$  como se requería.  $\square$

## Ejercicios

1. Probar que  $\mathbb{R}$  con la topología cofinita no es un espacio primero contable, pero que para todo subconjunto  $A$  y todo elemento  $a \in X$  se tiene  $a \in \bar{A}$  si y sólo si existe una sucesión en  $A$  que converge a  $a$ .
2. La topología conumerable en  $\mathbb{R}$  es la que tiene por abiertos a los complementos de los conjuntos que son a lo sumo numerables. Probar que toda sucesión convergente con esta topología es eventualmente constante pero la clausura de cualquier conjunto no numerable es el espacio completo.
3. Probar que en un espacio topológico  $X$  un punto  $a$  es un límite de cada red si y sólo si  $X$  es el único conjunto abierto que contiene a  $a$ .
4. Probar que en un espacio topológico  $X$  un punto  $a$  es un límite de cada red que converge a un punto  $b$  si y sólo si cada vecindad de  $b$  es una vecindad de  $a$  e inversamente.

5. Probar que en un espacio topológico  $X$  un punto  $a$  es un punto interior de un conjunto  $A$  si y sólo si para cada red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en  $X$  que converge a  $a$  existe un elemento  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que

$$\lambda > \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in A.$$

6. Sea  $\mathbb{R}_C$  el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma  $(-a, a)$ . Pruebe que toda red que converge a 3 converge a  $-4$ . Pruebe con un ejemplo que el recíproco no se cumple.
7. Probar que en la topología del problema anterior una sucesión  $a_n$  converge a un punto  $x \geq 0$  si y sólo si

$$-x \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x.$$

8. Probar que en la topología cofinita una sucesión converge a cada punto si y sólo si toma cada valor sólo un número finito de veces. Es esto cierto para redes?
9. Sea  $\mathbb{R}_L$  el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma  $(-\infty, a)$ . Probar que una sucesión  $a_n$  converge a un punto  $x$  en  $\mathbb{R}_L$  si y sólo si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x.$$

10. Sea  $\mathbb{R}_l$  el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma  $(a, b]$ . Probar que una sucesión  $a_n$  converge a un punto  $x$  en  $\mathbb{R}_l$  si y sólo si converge a  $x$  en el sentido usual y existe un número natural  $N$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow a_n \leq x.$$

11. Sea  $\Lambda = \mathbb{N}$  ordenado por divisibilidad. Sea  $a_\lambda = \lambda$ . Sea  $X = \mathbb{Z}$  con la topología que tiene como base los conjuntos de la forma  $a + b\mathbb{Z}$  (esta se conoce como la topología profinita). Probar que  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una subred convergente de la sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $b_n = n$ .

12. Un espacio topológico  $X$  se dice irreducible si todo par de subconjuntos abiertos de  $X$  tienen intersección no vacía. Probar que un espacio topológico  $X$  es irreducible si y sólo si existe una red en  $X$  que converge a cada punto de  $X$ .
13. Probar que toda red creciente y acotada en  $\mathbb{R}$  converge a su supremo.
14. Sea  $f$  una función continua en  $[0, 1]$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min_{\frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}} f(x).$$

Probar que los  $S_n$  forman una red creciente si se ordena  $\mathbb{N}$  por divisibilidad, pero no necesariamente por el orden usual.

15. Sea  $X$  el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es  $\mathbb{R}^2$  y cuyos cerrados no triviales son las uniones finitas de rectas y puntos. Describa el conjunto  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (n, n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}\}$ . Justifique.



# Chapter 4

## Filtros y Ultrafiltros

Otro modo de estudiar la noción de convergencia es mediante filtros. Si  $X$  es un conjunto, un filtro en  $X$  es una colección no vacía  $\mathfrak{F}$  de subconjuntos de  $X$  tal que

- Si  $F \in \mathfrak{F}$  y  $G \supseteq F$ , entonces  $G \in \mathfrak{F}$ .
- Si  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ , entonces  $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ .
- $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ .

Si  $x$  es un elemento de un espacio topológico, entonces el conjunto  $V(x)$  de vecindades de  $x$  es un filtro. Un filtro  $\mathfrak{F}$  en un espacio topológico  $X$  se dice que converge a un elemento  $x$  si para toda vecindad  $U \in V(x)$  existe un  $F \in \mathfrak{F}$  tal que  $F \subseteq U$ . En este caso escribimos  $\mathfrak{F} \rightarrow x$ . En particular,  $V(x) \rightarrow x$ . De hecho la contención  $F \subseteq U$  implica que  $U$  está también en el filtro  $\mathfrak{F}$ , de modo que un filtro  $\mathfrak{F}$  converge a  $x$  si y sólo si  $V(x) \subseteq \mathfrak{F}$ .

Una colección no vacía  $B$  que satisface

- Si  $F_1, F_2 \in B$ , entonces  $F_1 \cap F_2$  contiene algún elemento de  $B$ .
- $\emptyset \notin B$ .

se dice una base de filtro y el filtro generado por  $B$  es la colección  $\mathfrak{F}(B)$  de todos los subconjuntos de  $X$  que contienen un elemento de  $B$ .

**ejemplo 4.1.** Si  $A$  es un conjunto no vacío, entonces  $\{A\}$  es base de filtro. Al filtro generado se le llama el filtro principal  $\mathfrak{F}(A)$  generado por  $A$ . El filtro principal  $\mathfrak{F}(A)$  converge a un elemento  $x$  si y sólo si cada vecindad de  $x$  contiene al conjunto  $A$ . En particular,  $\mathfrak{F}(\{x\})$  converge a  $x$ .

**ejemplo 4.2.** Todo filtro en un conjunto finito es principal, y generado por el único elemento minimal. En particular, en el espacio de Sierpinski con  $\{1\}$  abierto hay exactamente tres filtros. Las convergencias son como siguen:

- $\mathfrak{F}(\{0\}) \rightarrow 0$ .
- $\mathfrak{F}(\{1\}) \rightarrow 0, 1$ .
- $\mathfrak{F}(\{0, 1\}) \rightarrow 0$ .

**ejemplo 4.3.** Sea  $C_n$  el círculo de radio  $1/n$  con centro 0, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , y sea  $B_n = \bigcup_{k \geq n} C_k$ . Sea  $\mathfrak{B} = \{B_n | n = 1, 2, \dots\}$ . Entonces  $\mathfrak{B}$  es base de filtro y el filtro generado  $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$  converge a 0. De hecho, si  $B_0(\epsilon)$  es la bola de radio  $\epsilon$  centrada en 0, y si  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , entonces  $B_n \subseteq B_0(\epsilon)$ , por lo que  $B_0(\epsilon) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ .

**ejemplo 4.4.** Si  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$  son filtros tales que para todo  $F \in \mathfrak{F}$  y todo  $F' \in \mathfrak{F}'$  se tiene  $F \cap F' \neq \emptyset$ , entonces el conjunto

$$\mathfrak{F}'' = \{F \cap F' | F \in \mathfrak{F}, F' \in \mathfrak{F}'\}$$

es un filtro. En este caso diremos que los filtros  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$  se intersectan no trivialmente. El filtro  $\mathfrak{F}''$  se llama el filtro generado por  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$ .

**ejemplo 4.5.** Sea  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red en un espacio topológico  $X$ . Entonces la colección  $\mathfrak{F}$  de todos los conjuntos que contienen a algún conjunto de la forma

$$F_{\lambda_0} = \{x_\lambda | \lambda \geq \lambda_0\}$$

es un filtro y de hecho  $\mathfrak{F} \rightarrow x$  si y sólo si la red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a  $x$ . Los conjuntos de la forma  $F_\lambda$  son una base de este filtro. El filtro  $\mathfrak{F}$  se llama el filtro generado por la red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

**ejemplo 4.6.** Nótese que todo filtro es en particular un conjunto dirigido. Sea  $\phi : \Lambda \rightarrow \mathfrak{F}$  una función cofinal. Se sigue que si  $\mathfrak{F} \rightarrow x$ , y si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red indiciada por  $\Lambda$  tal que  $x_\lambda \in \phi(\lambda)$  para toda  $\lambda \in \Lambda$ , entonces  $x_\lambda \rightarrow x$ . Más aún, si  $\mathfrak{F}$  no converge a  $x$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  que no contiene a ningún  $F \in \mathfrak{F}$ , luego existe una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  indiciada por  $\Lambda$  que satisface  $x_\lambda \in [\phi(\lambda) - U]$  para toda  $\lambda \in \Lambda$ , y en particular no converge a  $x$ . Sea  $B$  una base de filtro. En particular se sigue que  $B$  es un conjunto dirigido con respecto a la inclusión inversa. Sea  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(B)$  el filtro generado por  $B$ . La inclusión  $B \hookrightarrow \mathfrak{F}$  es cofinal, luego podemos tomar  $\Lambda = B$  en todo lo que

precede. Se sigue que si  $\mathfrak{F} \rightarrow x$  y si para cada  $U \in B$  se tiene un elemento  $x_U \in U$ , entonces la red  $\{x_U\}_{U \in B}$  converge a  $x$ . En particular, podemos tomar  $B = \mathfrak{F}$ , y obtenemos que toda red  $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{F}}$  que satisface  $x_U \in U$  para todo  $U \in \mathfrak{F}$  converge a  $x$ .

Los ejemplos anteriores permiten establecer una equivalencia entre la teoría de filtros y la de redes. Explotaremos esta equivalencia para utilizar filtros o redes según nos convenga. Para poder utilizar la teoría de filtros para caracterizar, por ejemplo, la clausura, necesitamos definir lo que significa que un filtro  $\mathfrak{F}$  esté en un conjunto  $A$ , ya que un filtro en  $A$  no es un filtro en  $X$ . Sin embargo un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $A$  es base de filtro en  $X$ . El filtro generado se denota  $\mathfrak{F}_X$ . Un filtro de este tipo se dice generado en  $A$ . Equivalentemente un filtro es generado en  $A$  si y sólo si tiene una base de filtro formada por subconjuntos de  $A$ .

**Proposición 4.7.** *Un elemento  $x$  de un espacio topológico  $X$  pertenece a la clausura de un conjunto  $A$  si y sólo si existe un filtro  $\mathfrak{F}$  generado en  $A$  tal que  $\mathfrak{F} \rightarrow x$ .*

**Demostración** Si  $x$  pertenece a la clausura de  $A$  entonces existe una red en  $A$  que converge a  $x$  y tomamos el filtro generado por esa red, el cual es un filtro generado en  $A$  y converge a  $x$ . Por otro lado, si  $\mathfrak{F}$  es un filtro generado en  $A$  que converge a  $x$ , los subconjuntos  $F$  de  $A$  en  $\mathfrak{F}$  forman una base de filtro  $B$  y cualquier red  $\{x_F\}_{F \in B}$  que satisface  $x_F \in F \subseteq A$  es una red en  $A$  que converge a  $x$ .  $\square$

Tal como se hizo en el caso de redes, si la topología no es clara del contexto utilizaremos la notación  $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x$  para denotar que  $\mathfrak{F}$  converge a  $x$  con respecto a la topología  $\tau$ .

**Corolario 4.7.1.** *Si un conjunto  $X$  tiene dos topologías  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , entonces  $\tau_1$  es más fina que  $\tau_2$  si y sólo si cada filtro que converge con respecto a  $\tau_1$  converge con respecto a  $\tau_2$  al mismo límite.*

**Demostración** Si  $\tau_1$  es más fina que  $\tau_2$ , y si  $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_1} x$  entonces para cada vecindad  $U$  de  $x$  en  $\tau_1$  existe un elemento  $F \in \mathfrak{F}$  contenido en  $U$ . Como toda vecindad de  $x$  con respecto a  $\tau_2$  es en particular una vecindad de  $x$  con respecto a  $\tau_1$  se tiene que  $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_2} x$ . Por otro lado si  $\tau_1$  no es más fina que  $\tau_2$ , existe un cerrado  $A$  con respecto a  $\tau_2$  que no es cerrado con respecto a  $\tau_1$ . Sea  $x$  un punto de la clausura de  $A$  en la topología  $\tau_1$  que no está en  $A$  (que existe

ya que  $A$  no es cerrado en esa topología). Entonces por la proposición existe un filtro  $\mathfrak{F}$  generado en  $A$  tal que  $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_1} x$ . Este filtro no puede converger a  $x$  con respecto a  $\tau_2$ , ya que  $A$  es cerrado en esa topología.  $\square$

Si  $f : X \rightarrow X'$  es una función, y si  $\mathfrak{F}$  es un filtro en  $X$  entonces  $\{f(F) | F \in \mathfrak{F}\}$  es base de filtro ya que

$$f(F_1) \cap f(F_2) \supseteq f(F_1 \cap F_2).$$

El filtro generado se denota  $f(\mathfrak{F})$ .

**ejemplo 4.8.** Si  $\mathfrak{F}$  es el filtro generado por la red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , entonces  $f(\mathfrak{F})$  es el filtro generado por la red  $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

**ejemplo 4.9.** Si  $A$  es un subconjunto de  $X$  e  $i : A \rightarrow X$  es la inclusión canónica, y si  $\mathfrak{F}$  es un filtro en  $A$  entonces  $i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_X$ .

**Proposición 4.10.** Si  $f : X \rightarrow X'$  es una función arbitraria, y si  $\mathfrak{F}$  es un filtro en  $X$  entonces  $A \in f(\mathfrak{F})$  si y sólo si  $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ .

**Demostración** Si  $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ , el resultado sigue de  $A \supseteq f(f^{-1}(A)) \in f(\mathfrak{F})$ . Por otro lado si  $A \in f(\mathfrak{F})$ , entonces  $A$  debe contener un conjunto de la forma  $f(B)$  con  $B$  en  $\mathfrak{F}$ . Se sigue que

$$f^{-1}(A) \supseteq f^{-1}(f(B)) \supseteq B,$$

de donde  $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ .  $\square$

**Proposición 4.11.** Una función  $f : X \rightarrow X'$  es continua en un punto  $x$  de  $X$  si y sólo si cada filtro  $\mathfrak{F}$  convergente a  $x$  satisface  $f(\mathfrak{F}) \rightarrow f(x)$ .

**Demostración** Supongamos que  $f$  es continua y sea  $\mathfrak{F}$  un filtro que converge a  $x$ . Entonces para toda vecindad  $U'$  de  $f(x)$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq U'$  y un elemento  $F$  de  $\mathfrak{F}$  tal que  $F \subseteq U$ . Como  $f(F) \subseteq U'$  el resultado sigue. Por otro lado, si cada filtro  $\mathfrak{F}$  convergente a  $x$  satisface  $f(\mathfrak{F}) \rightarrow f(x)$ , en particular es cierto para  $\mathfrak{F} = V(x)$ , luego para toda vecindad  $U'$  de  $f(x)$  existe un elemento  $F'$  del filtro  $f(V(x))$  contenido en  $U'$ , pero  $f(V(x))$  está generado por las imágenes de las vecindades de  $x$ .  $\square$

Si  $f : X \rightarrow X'$  es una función epiyectiva, y si  $\mathfrak{F}'$  es un filtro en  $X'$  entonces  $\{f^{-1}(F) \mid F \in \mathfrak{F}'\}$  es base de filtro ya que

$$f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) = f^{-1}(F_1 \cap F_2).$$

El filtro generado se denota  $f^{-1}(\mathfrak{F}')$ .

**Proposición 4.12.** *Si  $f : X \rightarrow X'$  es una función epiyectiva, y si  $\mathfrak{F}'$  es un filtro en  $X'$  entonces  $f(f^{-1}(\mathfrak{F}')) = \mathfrak{F}'$ .*

**Demostración** Basta ver que para cada  $F \in \mathfrak{F}'$  se tiene  $f(f^{-1}(F)) = F$  por ser  $f$  epiyectiva.  $\square$

Dados filtros  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$ , diremos que  $\mathfrak{F}'$  es un subfiltro de  $\mathfrak{F}$  si  $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ . En particular, si  $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ , y si  $\mathfrak{F}' \rightarrow x$ , entonces  $\mathfrak{F} \rightarrow x$ . Es inmediato de la definición que si  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  es subred de  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  el filtro  $\mathfrak{F}_x$  generado por  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es un subfiltro del filtro  $\mathfrak{F}_y$  generado por  $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$  (y no al revés). Un filtro maximal recibe el nombre de Ultrafiltro. Es inmediato del lema de Zorn que cada filtro está contenido en un ultrafiltro.

**Proposición 4.13.** *Un filtro  $\mathfrak{F}$  es un ultrafiltro si y sólo si para todo subconjunto  $A$  de  $X$  se tiene  $A \in \mathfrak{F}$  o  $A^c \in \mathfrak{F}$ .*

**Demostración** Es claro que si para todo subconjunto  $A$  de  $X$  se tiene  $A \in \mathfrak{F}$  o  $A^c \in \mathfrak{F}$ , entonces todo filtro estrictamente mayor a  $\mathfrak{F}$  debe contener un par  $\{A, A^c\}$ , lo que es imposible para un filtro. Por otro lado, si  $\mathfrak{F}$  no contiene a  $A^c$  (ni, por lo tanto, a ningún subconjunto de  $A^c$ ), se tiene que  $A \cap F$  es no vacío para todo  $F \in \mathfrak{F}$ , y por lo tanto el filtro principal  $\mathfrak{F}(A)$  interseca a  $\mathfrak{F}$  no trivialmente y el filtro generado por  $\mathfrak{F}(A)$  y  $\mathfrak{F}$  contiene a  $A$  y a cada elemento de  $\mathfrak{F}$ . En particular, si  $\mathfrak{F}$  es un ultrafiltro, debe contener a  $A$ .  $\square$

**Corolario 4.13.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función arbitraria. Si  $\mathfrak{F}$  es un ultrafiltro, entonces también lo es  $f(\mathfrak{F})$ .*

**Demostración** Si  $A$  es un subconjunto de  $Y$  entonces  $f^{-1}(A)$  o su complemento  $f^{-1}(A^c)$  está en  $\mathfrak{F}$ , por lo que  $A$  o  $A^c$  está en  $f(\mathfrak{F})$ .  $\square$

**Proposición 4.14.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función epiyectiva. Si  $\mathfrak{F}'$  es un ultrafiltro de  $Y$ , entonces existe un ultrafiltro  $\mathfrak{F}$  de  $X$  tal que  $f(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}'$ .*

**Demostración** Si  $\mathfrak{F}'$  es un ultrafiltro de  $Y$  entonces  $\mathfrak{F}_0 = f^{-1}(\mathfrak{F}')$  es un filtro de  $X$  que satisface  $f(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{F}'$ . En particular, si  $\mathfrak{F}$  es cualquier ultrafiltro que contiene a  $\mathfrak{F}_0$  se tiene  $f(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}'$ .  $\square$

Un elemento  $x$  de  $X$  se dice un punto de acumulación del filtro  $\mathfrak{F}$  si  $\mathfrak{F}$  es subfiltro de un filtro que converge a  $x$ . En particular, un ultrafiltro tiene un punto de acumulación si y sólo si converge. También es inmediato que un filtro  $\mathfrak{F}$  tiene a  $x$  como punto de acumulación si existe un ultrafiltro que contiene a  $\mathfrak{F}$  y converge a  $x$ .

**Proposición 4.15.**  *$x$  es punto de acumulación del filtro  $\mathfrak{F}$  si y sólo si para cada vecindad  $U$  de  $x$  y cada elemento  $F$  de  $\mathfrak{F}$  se tiene  $F \cap U \neq \emptyset$ .*

**Demostración** Si  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$  con  $\mathfrak{F}' \rightarrow x$ , entonces para cada vecindad  $U$  de  $x$  existe un elemento  $F' \in \mathfrak{F}'$  tal que  $U \supseteq F'$ . Como  $F$  y  $F'$  están en  $\mathfrak{F}'$ , se tiene que  $F \cap F' \neq \emptyset$ , luego  $F \cap U \neq \emptyset$ . Por otro lado si  $F \cap U \neq \emptyset$  para cada vecindad  $U$  de  $x$  y cada elemento  $F$  de  $\mathfrak{F}$ , entonces los filtros  $\mathfrak{F}$  y  $V(x)$  se intersectan no trivialmente. En particular el filtro generado por  $\mathfrak{F}$  y  $V(x)$  contiene a  $\mathfrak{F}$  y converge a  $x$ .  $\square$

**ejemplo 4.16.** Sea  $C_n$  el círculo de radio  $1 + 1/n$  con  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  centrado en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , y sea  $B_n = \bigcup_{k \geq n} C_k$ . Sea  $\mathfrak{B} = \{B_n | n = 1, 2, \dots\}$ . Entonces  $\mathfrak{B}$  es base de filtro y el filtro generado  $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$  tiene como puntos de acumulación a todos los puntos del círculo de radio 1 centrado en 0.

**ejemplo 4.17.** Si  $A \subseteq B$  son conjuntos no vacíos, entonces  $\mathfrak{F}(B) \subseteq \mathfrak{F}(A)$ . En particular, si  $A = \{x\}$ , entonces  $\mathfrak{F}(\{x\})$  es un ultrafiltro principal, ya que para todo subconjunto  $F$  de  $X$  se tiene  $x \in F$  o bien  $x \in F^c$ . Claramente  $\mathfrak{F}(\{x\}) \rightarrow x$  con cualquier topología, pues  $\{x\} \in \mathfrak{F}(\{x\})$ . Se sigue que todo elemento de  $B$  es un punto de acumulación de  $\mathfrak{F}(B)$ . Más generalmente, si  $x$  es un punto de  $\overline{B}$  entonces cada vecindad de  $x$  contiene puntos de  $B$  y por lo tanto de cada elemento de  $\mathfrak{F}(B)$ . Por otro lado, si  $x$  no es un punto de  $\overline{B}$ , existe una vecindad de  $U$  que no corta a  $B$  que es un elemento de  $\mathfrak{F}(B)$ . Se concluye que  $x$  no es un punto de acumulación de  $\mathfrak{F}(B)$ . Es decir los puntos de  $\overline{B}$  son exactamente los puntos de acumulación de  $\mathfrak{F}(B)$ .

**ejemplo 4.18.** Más generalmente, si  $x$  es punto de acumulación de un filtro  $\mathfrak{F}$ , entonces para cada  $F \in \mathfrak{F}$ , tenemos  $\mathfrak{F}(F) \subseteq \mathfrak{F}$ , por lo que  $x$  es también un punto de acumulación de  $\mathfrak{F}(F)$ . En particular, si  $x$  es punto de acumulación de  $\mathfrak{F}$ , entonces  $x$  está en la clausura de cada elemento en el filtro  $\mathfrak{F}$ .

Si  $A$  es un subconjunto de  $X$  y  $\mathfrak{F}$  es un filtro en  $X$  tal que todo elemento  $F$  de  $\mathfrak{F}$  intersecta no trivialmente a  $A$  entonces

$$\mathfrak{F}_A = \{A \cap F \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

es un filtro de  $A$ , ya que

$$(F_1 \cap A) \cap (F_2 \cap A) = (F_1 \cap F_2) \cap A$$

Y si  $A \supseteq E \supseteq F \cap A$  entonces  $E = (F \cup E) \cap A$ . De hecho, en este caso se tiene  $(\mathfrak{F}_A)_X \supseteq \mathfrak{F}$ .

**Proposición 4.19.** *Si  $\mathfrak{F}$  es un ultrafiltro de  $X$  entonces  $\mathfrak{F}_A$  es un ultrafiltro de  $A$ .*

**Demostración** Si  $B$  es un subconjunto de  $A$  que no está en  $\mathfrak{F}_A$ , entonces en particular no está en  $\mathfrak{F}$ , luego  $B^c$  está en  $\mathfrak{F}$  y por lo tanto el complemento de  $B$  en  $A$  que es  $A \cap B^c$  está en  $\mathfrak{F}_A$ .  $\square$

Obsérvese que si  $f : X \rightarrow X'$  es una función arbitraria e  $Y = f(X)$ , entonces para todo filtro  $\mathfrak{F}$  que satisfaga la condición siguiente:

Todo elemento  $F$  de  $\mathfrak{F}$  intersecta no trivialmente a  $Y$

se tiene que  $f^{-1}(\mathfrak{F}) = f^{-1}(\mathfrak{F}_Y)$  está bien definido. El resultado precedente tiene, en este contexto, la siguiente generalización:

**Proposición 4.20.** *Si  $\mathfrak{F}$  es un ultrafiltro, también lo es  $f^{-1}(\mathfrak{F})$ .*

**Demostración** Si  $B$  es un subconjunto de  $X$  que no está en  $f^{-1}(\mathfrak{F})$ , entonces su imagen  $f(B)$  no está en  $\mathfrak{F}$ . Como  $\mathfrak{F}$  es ultrafiltro, su complemento  $f(B)^c$  está en  $\mathfrak{F}$  por lo que también está su preimagen

$$f^{-1}[f(B)^c] = [f^{-1}f(B)]^c \subseteq B^c,$$

Se sigue que  $B^c \in f^{-1}(\mathfrak{F})$ .  $\square$

## Ejercicios

- Sean  $\mathfrak{F}_1$  y  $\mathfrak{F}_2$  dos filtros en un conjunto  $X$ . Probar que existe un filtro que los contiene a ambos si y sólo si para todo par de conjuntos  $U_1 \in \mathfrak{F}_1$  y  $U_2 \in \mathfrak{F}_2$  se tiene  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

2. Probar que existe un filtro que converge simultaneamente a dos puntos  $a$  y  $b$  de un espacio topológico  $X$  si y sólo si para cada par de vecindades  $U$  de  $a$  y  $V$  de  $b$  se tiene  $U \cap V \neq \emptyset$ .
3. Probar que si  $\mathfrak{F}_1$  y  $\mathfrak{F}_2$  son ultrafiltros distintos en un mismo conjunto  $X$ , se tiene que existen  $U_1 \in \mathfrak{F}_1$  y  $U_2 \in \mathfrak{F}_2$  tales que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .
4. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subconjunto arbitrario. Probar que un punto  $a$  de  $X$  está en la clausura  $\bar{A}$  de  $A$  si y sólo si existe un ultrafiltro de  $A$  que converge a  $a$ .
5. Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función arbitraria. Probar que  $f$  es continua en un punto  $a$  de  $X$  si y sólo si para cada ultrafiltro  $\mathfrak{F}$  en  $X$  que converge a  $a$  el ultrafiltro imagen  $f(\mathfrak{F})$  en  $Y$  converge a  $f(a)$ .
6. Probar que todo punto de acumulación de un ultrafiltro es un límite.
7. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subconjunto arbitrario. Probar que un punto  $a$  de  $X$  está en la clausura  $\bar{A}$  de  $A$  si y sólo si existe un filtro de  $A$  que tiene a  $a$  como punto de acumulación.
8. Probar que en un espacio topológico  $X$  un punto  $a$  es un punto interior de un conjunto  $A$  si y sólo si para cada filtro  $\mathfrak{F}$  en  $X$  que converge a  $a$  se tiene  $A \in \mathfrak{F}$ .
9. Probar que en un espacio topológico  $X$  un punto  $a$  es un límite de cada filtro que converge a un punto  $b$  si y sólo si  $\mathcal{V}(b) \rightarrow a$ .
10. Probar que la colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  con complemento a lo sumo numerable es un filtro y determine sus puntos de acumulación si  $\mathbb{R}$  tiene la topología
  - (a) usual,
  - (b) discreta,
  - (c) cofinita.
11. Describa explícitamente un filtro en  $\mathbb{R}$  que contenga al filtro del ejemplo anterior y que converja a 0.



12. Sea  $(X, <)$  un conjunto parcialmente ordenado. Para cada  $x \in X$  definimos  $B(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$ . Sea  $\mathbb{B} = \{B(x) \mid x \in X\}$ . Probar que  $\mathbb{B}$  es base de una topología  $\tau_{\mathbb{B}}$ . Probar que si  $x < y$  entonces cada red o filtro que converge a  $y$  converge también a  $x$ .
13. dé un ejemplo explícito de un filtro en  $\mathbb{R}$  sin puntos de acumulación.
14. Probar que el filtro  $\mathfrak{F}$  en  $\mathbb{R}$  generado por los conjuntos de la forma  $(a, \infty)$  no tiene puntos de acumulación, pero para cada elemento  $z$  en el círculo unitario  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$  existe un ultrafiltro  $\mathfrak{F}_z$  que contiene a  $\mathfrak{F}$  cuya imagen en  $\mathbb{U}$  bajo la función  $t \mapsto e^{it}$  converge a  $z$ .
15. Sea  $X$  un espacio topológico cualquiera y sea  $\mathfrak{F}$  un filtro en  $X$ . Probar que el conjunto  $\{x \in X \mid \mathfrak{F} \rightarrow x\}$  es cerrado.
16. Sea  $B_r$  la bola de centro 0 y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathfrak{B} = \{B_r \mid r > 1\}$ . Sea  $\mathfrak{F}$  el filtro en  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\mathfrak{B}$ . Encuentre todos los puntos de acumulación de  $\mathfrak{F}$ . Justifique.

## Chapter 5

# Topologías inducidas y co-inducidas

El propósito de este capítulo es desarrollar algunas de las principales herramientas que nos permiten crear nuevos espacios topológicos a partir de los ya conocidos. Por ejemplo, queremos dar topologías a subconjuntos o a productos cartesianos de espacios conocidos, o ser capaces de describir matemáticamente el proceso de construir un cilindro o una banda de Moebius identificando o *pegando* extremos de un cuadrado. Esto último requiere que podamos dar una topología a un conjunto de clases de equivalencia o conjunto cociente. También nos gustaría poder hablar de la unión o suma de espacios topológicos como un nuevo espacio. Las propiedades naturales que uno espera en todos estos conjuntos se traducen en la continuidad de ciertas funciones, lo que puede tomarse como un requisito mínimo que debe cumplir la topología *natural* a definir en el nuevo espacio. Por ejemplo, en el caso de un subconjunto, es natural utilizar la topología menos fina que haga de la inclusión una función continua. Veremos también que esta topología puede caracterizarse como la única topología en la cual las redes (o filtros) convergentes son aquellas que convergen en el espacio mayor. Todas las construcciones consideradas en este capítulo siguen uno de dos procesos, o una combinación de ellos. Son la inducción y la co-inducción de topologías. Comenzaremos por el primero que es técnicamente más simple.

**definición 5.1.** Si  $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$  es una familia de funciones  $\phi_i : X \rightarrow Y_i$ , donde cada  $(Y_i, \tau_i)$  con  $i \in I$  es un espacio topológico, entonces la colección

$$\{\phi_i^{-1}(\mathcal{O}) \mid i \in I, \mathcal{O} \in \tau_i\}$$

es sub-base de una topología  $\tau$ . Esta topología es la topología menos fina en  $X$  para la cual cada  $\phi_i$  es continua. La topología  $\tau$  se llama la topología inducida por la familia  $\Phi$  y se denota  $\Phi^*(\tau_i)$ . Si  $\Phi = \{\phi_0\}$ , con  $\phi_0 : X \rightarrow Y_0$  entonces la topología inducida  $\Phi^*(\tau_i)$  está generada por

$$\{\phi_0^{-1}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in \tau_0\},$$

donde  $\tau_0$  es la topología de  $Y_0$ . Esta colección es de hecho una base de  $\Phi^*(\tau_i)$  ya que

$$\phi_0^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap \phi_0^{-1}(\mathcal{O}_2) = \phi_0^{-1}(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2).$$

En general, sin embargo, la intersección de preimágenes correspondientes a funciones distintas es sólo eso, una intersección. En este caso la topología tiene como base las intersecciones del tipo

$$\bigcap_{i \in T} \phi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$$

donde cada  $\mathcal{O}_i$  es un abierto en el correspondiente espacio  $Y_i$ , y  $T$  es un subconjunto finito de  $I$ .

La principal motivación para la definición precedente radica en el siguiente resultado:

**Proposición 5.2.** *Sea  $X$  un conjunto y sea  $\tau$  la topología inducida por una familia  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  de funciones  $\phi_i : X \rightarrow Y_i$ . Entonces una función  $f : Z \rightarrow X$  es continua si y sólo si cada función  $\phi_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$  es continua.*

**Demostración** Si  $f : Z \rightarrow X$  es continua, entonces cada función  $\phi_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$  es continua por ser una composición de funciones continuas. Por otro lado, si cada función  $\phi_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$  es continua, y si  $\mathcal{O}$  es un abierto de  $X$  de la forma  $\phi_i^{-1}(U)$  donde  $U$  es un abierto de  $Y_i$ , entonces  $f^{-1}(\mathcal{O}) = (\phi_i \circ f)^{-1}(U)$  es abierto. Como los conjuntos de este tipo forman una sub-base de la topología inducida, se sigue que  $f$  es continua.  $\square$

Tenemos, por cierto, también los resultados correspondientes para redes y filtros:

**Proposición 5.3.** *Una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a un elemento  $x$  en  $X$  con respecto a la topología inducida por  $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$  si y sólo si  $\phi_i(x_\lambda) \rightarrow \phi_i(x)$  para cada  $i \in I$ .*

**Demostración** Sea  $\tilde{\Lambda}$  el espacio topológico asociado a  $\Lambda$ . Entonces una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a un elemento  $x$  si y sólo si la función definida por

$$\lambda \mapsto x_\lambda, \quad \infty \mapsto x$$

es continua, lo que es equivalente a que para cada  $i$  la función

$$\lambda \mapsto \phi_i(x_\lambda), \quad \infty \mapsto \phi_i(x)$$

sea continua, lo que a su vez es equivalente a  $\phi_i(x_\lambda) \rightarrow \phi_i(x)$  para todo  $i$ .  $\square$

**Proposición 5.4.** *Un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $X$  converge a un elemento  $x$  con respecto a la topología inducida por  $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$  si y sólo si  $\phi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi_i(x)$  para cada  $i \in I$ .*

**Demostración** Si  $\mathfrak{F}$  converge a  $x$  entonces  $\phi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi_i(x)$  pues las funciones  $\phi_i$  son continuas. Supongamos ahora que se tiene  $\phi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi_i(x)$  para cada  $i \in I$ . Sea  $\{x_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$  una red fija, pero arbitraria, que satisface  $x_F \in F$  para cada  $F \in \mathfrak{F}$ . Basta ver que  $x_F$  converge a  $x$ . Para cada una de estas redes se tiene  $\phi_i(x_F) \in \phi_i(F)$  para cada  $i \in I$ , y la función  $F \mapsto \phi_i(F)$  es una función cofinal entre  $\mathfrak{F}$  y  $\phi_i(\mathfrak{F})$  por definición de filtro imagen, por lo que a posteriori se tiene:

$$\phi_i(x_F) \xrightarrow{F \in \mathfrak{F}} \phi_i(x), \quad \forall i \in I. \quad (5.1)$$

Se concluye que  $x_F \rightarrow x$ , y como la red era arbitraria,  $\mathfrak{F} \rightarrow x$ .  $\square$

**ejemplo 5.5.** Sea  $Y$  un subconjunto de un espacio topológico  $X$ . La topología de subespacio en  $Y$  es la topología inducida por la inclusión  $Y \hookrightarrow X$ . Esta topología tiene las siguientes propiedades, de acuerdo a los resultados precedentes:

1. Una función  $f : Z \rightarrow Y$  es continua si y sólo si es continua como una función de  $Z$  en  $X$ .
2. Una red  $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a un punto  $y \in Y$ , con respecto a la topología de subespacio, si y sólo si converge con respecto a la topología de  $X$ .
3. Un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $Y$  converge a un punto  $y \in Y$ , con respecto a la topología de subespacio, si y sólo si el filtro generado por  $\mathfrak{F}$  en  $X$  converge a  $y$  con respecto a la topología de  $X$ .

**ejemplo 5.6.** Sea  $\{X_i\}_{i \in I}$  una familia de espacios topológicos. En el producto cartesiano  $X = \prod_{i \in I} X_i$  se define la topología producto como la topología inducida por las funciones coordenadas  $X \rightarrow X_i$ . Esta topología tiene las siguientes propiedades, de acuerdo a los resultados precedentes:

1. Una función  $f : Z \rightarrow X$  es continua si y sólo si cada función coordenada  $f_i : Z \rightarrow X_i$  es continua.
2. Una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a un punto  $x \in X$  si y sólo si cada coordenada  $x_{i,\lambda}$  de  $x_\lambda$  converge a la coordenada  $x_i$  de  $x$  con respecto a la topología de  $X_i$ .
3. Un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $X$  converge a un punto  $x$  si y sólo si para cada  $i \in I$  el filtro

$$\mathfrak{F}_i = \left\{ F_i \subseteq X_i \mid F_i \times \prod_{j \neq i} X_j \in \mathfrak{F} \right\}$$

converge a  $x_i$  con respecto a la topología de  $X$ .

Para comprobar esta última afirmación, basta ver que el filtro  $\mathfrak{F}_i$  definido más arriba es igual a la imagen bajo la  $i$ -ésima función coordenada del filtro  $\mathfrak{F}$ . Por un lado es claro que cada elemento  $F_i$  de  $\mathfrak{F}_i$  es la  $i$ -ésima coordenada de  $F_i \times \prod_{j \neq i} X_j$ . Por otro lado si  $G_i$  es la imagen bajo la  $i$ -ésima función coordenada de un elemento  $G$  de  $\mathfrak{F}$ , entonces  $G \subseteq G_i \times \prod_{j \neq i} X_j$ , de donde  $G_i \times \prod_{j \neq i} X_j \in \mathfrak{F}$  por definición de filtro.

La inducción de topologías es functorial en el siguiente sentido:

**Proposición 5.7.** Sea  $(Y, \tau)$  un espacio topológico, y sean  $\phi : X \rightarrow Y$ ,  $\psi : Z \rightarrow X$  funciones arbitrarias. Entonces  $\psi^*[\phi^*(\tau)] = (\phi \circ \psi)^*(\tau)$ .

**Demostración** Basta ver que un filtro  $\mathfrak{F}$  converge a un punto  $z \in Z$  con respecto a la topología  $\psi^*[\phi^*(\tau)]$  si y sólo si  $\psi(\mathfrak{F})$  converge a  $\psi(x)$  con la topología  $\phi^*(\tau)$ , lo que a su vez equivale a decir que  $\psi[\phi(\mathfrak{F})] = \psi \circ \phi(\mathfrak{F})$  converge a  $\psi[\phi(x)] = \phi \circ \psi(x)$ .  $\square$

**Corolario 5.7.1.** Si  $Z$  es subespacio de un espacio topológico  $Y$  e  $Y$  es subespacio de un espacio topológico  $X$ , entonces  $Z$  es subespacio de  $X$ .  $\square$

De hecho el resultado precedente se extiende a familias de funciones como sigue:

**Proposición 5.8.** *Sea  $Z$  un conjunto y sea  $\Psi = \{\psi_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones  $\psi_i : Z \rightarrow X_i$ . Para cada  $i \in I$ , sea  $\{(Y_{i,j}, \tau_{i,j})\}_{j \in J_i}$  una familia de espacios topológicos, y sea  $\Phi_i = \{\phi_{i,j}\}_{j \in J_i}$  una familia de funciones  $\phi_{i,j} : X_i \rightarrow Y_{i,j}$ . Entonces  $\Psi^*[\Phi_i^*(\tau_{i,j})] = (\Phi \circ \Psi)^*(\tau_{i,j})$ , donde  $\Phi \circ \Psi$  es la familia de todas las composiciones  $\phi_{i,j} \circ \psi_i$  con  $\phi_{i,j} \in \Phi_i$ .*

**Demostración** Basta ver que un filtro  $\mathfrak{F}$  converge a un punto  $z \in Z$  con respecto a la topología  $\Psi^*[\Phi_i^*(\tau_{i,j})]$  si y sólo si  $\psi_i(\mathfrak{F})$  converge a  $\psi_i(x)$  con la topología  $\Phi_i^*(\tau_i)$  para cada  $i$ , lo que a su vez equivale a decir que  $\phi_{i,j}[\psi_i(\mathfrak{F})] = (\phi_{i,j} \circ \psi_i)(\mathfrak{F})$  converge a  $\phi_{i,j}[\psi_i(x)] = (\phi_{i,j} \circ \psi_i)(x)$  para todo  $i \in I$  y todo  $j \in J_i$ .  $\square$

**Corolario 5.8.1.** *Si los conjuntos  $J_i$  son disjuntos, el producto*

$$\prod_{i \in I} \left( \prod_{j \in J_i} X_{i,j} \right)$$

*es homeomorfo al producto*

$$\prod_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} X_{i,j}.$$

$\square$

La principal razón para definir la topología inducida por una familia de funciones es definir productos. Una vez que los productos han sido definidos, puede reducirse el uso de cualquier otro tipo de topología inducida a la topología inducida por una sola función mediante el siguiente resultado.

**Proposición 5.9.** *Sea  $X$  un conjunto y sea  $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones  $\phi_i : X \rightarrow Y_i$ . Entonces la topología inducida por la familia  $\Phi$  es la misma que la topología inducida por la función*

$$\phi : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i, \quad \phi(x) = (\phi_i(x))_{i \in I}.$$

**Demostración** Basta ver que un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $X$  converge a un punto  $x \in X$  con respecto a la topología inducida por  $\Phi$  si y sólo si  $\phi_i(\mathfrak{F})$  converge a  $\phi_i(x)$  para cada  $i$ . Esto a su vez equivale a  $\phi(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi(x)$ , de donde sigue lo pedido.  $\square$

**ejemplo 5.10.** Supongamos que  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia de espacios topológicos indexada por un conjunto parcialmente ordenado  $\Lambda$ . Supongamos que para cada par de elementos  $\lambda, \mu \in \Lambda$  con  $\lambda \geq \mu$  existe una función continua  $\phi_{\lambda, \mu} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$  que es functorial en el sentido siguiente:

$$\phi_{\lambda, \lambda} = \text{Id}_{X_\lambda}, \quad \phi_{\lambda, \mu} \phi_{\mu, \nu} = \phi_{\lambda, \nu}.$$

Entonces el subespacio del producto  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  formado por aquellos elementos  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  que satisfacen

$$\phi_{\lambda, \mu}(x_\lambda) = x_\mu, \quad \forall \lambda \geq \mu \text{ en } \Lambda$$

recibe el nombre de límite inverso de la familia.

El concepto de topología co-inducida es similar al anterior pero se define a partir de funciones que tienen como imagen al conjunto en el cual se quiere definir la topología. La propiedad que caracteriza las funciones continuas a la topología inducida tiene su análogo en este contexto, pero no así los resultados concernientes a filtros y redes, ya que filtros y redes carecen de conceptos *duales*.

**definición 5.11.** Si  $\Phi$  es una familia de funciones  $\phi_i : Y_i \rightarrow X$ , donde cada  $(Y_i, \tau_i)$  con  $i \in I$  es un espacio topológico, entonces la colección

$$\Phi_*(\tau_i) = \{\mathcal{O} \in X \mid \phi_i^{-1}(\mathcal{O}) \text{ es abierto } \forall i \in I\}$$

es una topología en  $X$ . Se la llama la topología co-inducida por la familia  $\{\phi_i\}_{i \in I}$ . Es la topología mas fina en  $X$  para la cual cada  $\phi_i$  es continua.

**Proposición 5.12.** *Sea  $X$  un conjunto y sea  $\tau$  la topología co-inducida por una familia  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  de funciones  $\phi_i : Y_i \rightarrow X$ . Entonces una función  $f : X \rightarrow Z$  es continua si y sólo si cada función  $f \circ \phi_i : Y_i \rightarrow Z$  es continua.*

**Demostración** Si  $f : X \rightarrow Z$  es continua, entonces cada función  $f \circ \phi_i : Y_i \rightarrow Z$  es continua por ser una composición de funciones continuas. Por otro lado, si cada función  $f \circ \phi_i : Y_i \rightarrow Z$  es continua, y si  $\mathcal{O}$  es un abierto de  $Z$ , entonces cada conjunto  $(f \circ \phi_i)^{-1}(\mathcal{O}) = \phi_i^{-1}[f^{-1}(\mathcal{O})]$  es abierto. Luego  $f^{-1}(\mathcal{O})$  es abierto y como  $\mathcal{O}$  era arbitrario  $f$  es continua.  $\square$

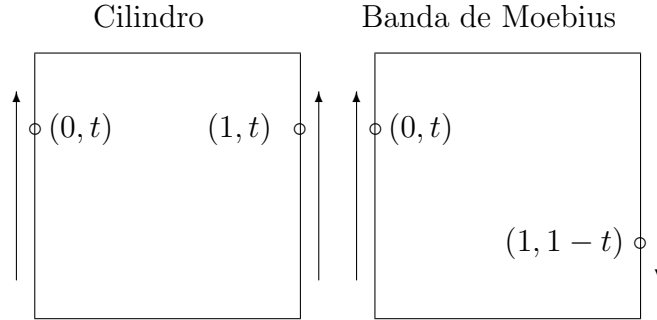


Figure 5.1: El cilindro y la banda de Moebius del ejemplo 5.14.

**ejemplo 5.13.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\equiv$  una relación de equivalencia en  $X$ . La topología cociente en el conjunto de clases de equivalencia  $Y = (X/\equiv)$  es la topología co-inducida por la proyección  $X \twoheadrightarrow Y$ . Con esta topología una función  $f : Y \rightarrow Z$  es continua si y sólo si es continua como una función de  $X$  en  $Z$ .

**ejemplo 5.14.** Como un ejemplo explícito de topología de identificación mostraremos como construir el cilindro y la banda de Moebius como espacios de identificación. Tomamos  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ .

- Para el cilindro  $C$  definimos  $\equiv$  como la relación cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma  $(0, t) \equiv (1, t)$ .
- Para la banda de Moebius  $M$  definimos  $\equiv$  como la relación cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma  $(0, t) \equiv (1, 1 - t)$ .

**ejemplo 5.15.** Sea  $\{X_i\}_{i \in I}$  una familia de espacios topológicos. El coproducto o union disjunta se define, como conjunto, como la unión

$$X = \coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times i.$$

La topología del coproducto se define como la topología co-inducida por las inclusiones  $X_i \hookrightarrow X$ . De acuerdo a los resultados precedentes una función



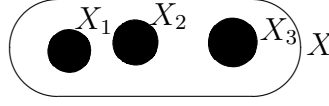


Figure 5.2: Representación gráfica del coproducto de espacios topológicos.

$f : X \rightarrow Z$  es continua si y sólo si cada restricción  $f_i : X_i \rightarrow Z$  es continua, donde se identifica  $X_i$  con su imagen en el coproducto. Intuitivamente, el coproducto se interpreta como la inclusión en un mismo espacio de los espacios  $X_i$  como subconjuntos separados o *disconexos* como en la figura 5.2.

El proceso de co-inducir una topología es functorial en un sentido similar a la inducción.

**Proposición 5.16.** *Sea  $(Y, \tau)$  un espacio topológico, y sean  $\phi : Y \rightarrow X$ ,  $\psi : X \rightarrow Z$  funciones arbitrarias. Entonces  $\psi_*[\phi_*(\tau)] = (\psi \circ \phi)_*(\tau)$ .*

**Demostración** Basta ver que un conjunto  $A \subseteq Z$  pertenece a la topología  $\psi_*[\phi_*(\tau)]$  si y sólo si  $\psi^{-1}(A) \subseteq X$  pertenece a la topología  $\phi_*(\tau)$ , lo que a su vez equivale a decir que  $\phi^{-1}[\psi^{-1}(A)] = (\psi \circ \phi)^{-1}(A)$  pertenece a  $\tau$ .  $\square$

**Corolario 5.16.1.** *Sea  $(Y, \tau)$  un espacio topológico, y sean  $\phi : Y \rightarrow X$ ,  $\psi : X \rightarrow Z$  funciones epiyectivas. Entonces si  $X$  tiene la topología cociente bajo la identificación correspondiente a  $\phi$  y si con esta topología de  $X$ , el espacio  $Z$  tiene la topología cociente bajo la identificación correspondiente a  $\psi$ , entonces  $Z$  tiene la topología cociente bajo la identificación correspondiente a  $\psi \circ \phi$ .  $\square$*

Tal como en el caso de la inducción tenemos una versión de esta última propiedad para familias arbitrarias:

**Proposición 5.17.** *Sea  $Z$  un conjunto y sea  $\Psi = \{\psi_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones  $\psi_i : X_i \rightarrow Z$ . Para cada  $i \in I$ , sea  $\{(Y_{i,j}, \tau_{i,j})\}_{j \in J_i}$  una familia de espacios topológicos, y sea  $\Phi_i = \{\phi_{i,j}\}_{j \in J_i}$  una familia de funciones  $\phi_{i,j} : Y_{i,j} \rightarrow X_i$ . Entonces  $\Psi_*[\Phi_{i,*}(\tau_{i,j})] = (\Psi \circ \Phi)_*(\tau_{i,j})$ , donde  $\Psi \circ \Phi$  es la familia de todas las composiciones  $\psi_i \circ \phi_{i,j}$  con  $\phi_{i,j} \in \Phi_i$ .*

**Demostración** Basta ver que un conjunto  $A \subseteq Z$  pertenece a la topología  $\Psi_*[\Phi_*(\tau)]$  si y sólo si  $\psi_i^{-1}(A) \subseteq X_i$  pertenece a la topología  $\Phi_{i,*}(\tau)$  para cada  $i$ , lo que a su vez equivale a decir que  $\phi_i^{-1}[\psi_{i,j}^{-1}(A)] = (\psi_{i,j} \circ \phi_i)^{-1}(A)$  pertenece a  $\tau$ .  $\square$

**Corolario 5.17.1.** *Si los conjuntos  $J_i$  son disjuntos, el coproducto*

$$\coprod_{i \in I} \left( \coprod_{j \in J_i} X_{i,j} \right)$$

*es homeomorfo al coproducto*

$$\coprod_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} X_{i,j}.$$

$\square$

**ejemplo 5.18.** Supongamos que  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia de espacios topológicos indexada por un conjunto parcialmente ordenado  $\Lambda$ . Supongamos que para cada par de elementos  $\lambda, \mu \in \Lambda$  con  $\lambda \leq \mu$  existe una función continua  $\phi_{\lambda,\mu} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$  que es functorial en el sentido siguiente:

$$\phi_{\lambda,\lambda} = \text{Id}_{X_\lambda}, \quad \phi_{\lambda,\mu} \phi_{\mu,\nu} = \phi_{\lambda,\nu}.$$

Entonces el cociente del co-producto  $\coprod_\lambda X_\lambda$ , en el que se identifica cada par de elementos  $\phi_{\lambda,\mu}(x_\lambda)$  y  $x_\mu$  de los subespacios correspondientes, recibe el nombre de límite directo de la familia.

**ejemplo 5.19.** Supongamos que  $\{X_i\}_{i \in I}$  es una familia de subconjunto abiertos en el espacio topológico  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ . En este caso diremos que la familia es un cubrimiento abierto de  $X$ . Supongamos que se tiene una función  $f : X \rightarrow Z$  tal que cada restricción  $f_i : X_i \rightarrow Z$  es continua, respecto de la topología de subespacio en  $X_i$ . Entonces, para cada conjunto abierto  $U \subseteq Z$ , se tiene

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U),$$

donde cada uno de los conjuntos de la derecha es abierto en el correspondiente subconjunto  $X_i$ , y por lo tanto también en  $X$ . Concluimos que la preimagen bajo  $f$  de todo subconjunto abierto de  $Z$  es abierta, y por lo tanto  $f$  es continua. Se concluye que la topología de  $X$  es co-inducida por las inclusiones

$e_i : X_i \rightarrow X$ . De hecho, para definir una función continua de  $X$  en un espacio arbitrario  $Z$ , es suficiente con definir  $f_i : X_i \rightarrow Z$  continua, cuidando que las definiciones coincidan en las intersecciones  $X_i \cap X_j$ .

**ejemplo 5.20.** Supongamos que  $\{X_i\}_{i=1}^n$  es una familia finita de subconjuntos cerrados en un espacio topológico  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ , a lo que llamaremos un cubrimiento cerrado finito de  $X$ . Supongamos que se tiene una función  $f : X \rightarrow Z$  tal que cada restricción  $f_i : X_i \rightarrow Z$  es continua. Entonces, para cada conjunto cerrado  $C \subseteq Z$  se tiene

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C),$$

donde cada uno de los conjuntos de la derecha es cerrado en el correspondiente subconjunto  $X_i$ , y por lo tanto también en  $X$ . Concluimos que la preimagen bajo  $f$  de todo subconjunto cerrado de  $Z$  es cerrada, y por lo tanto  $f$  es continua. Se concluye que la topología de  $X$  es co-inducida por las inclusiones  $e_i : X_i \rightarrow X$ . De hecho, para definir una función continua de  $X$  en un espacio arbitrario  $Z$ , es suficiente con definir  $f_i : X_i \rightarrow Z$  continua, cuidando que las definiciones coincidan en las intersecciones  $X_i \cap X_j$ . Esta propiedad de los cubrimientos cerrados será usada a menudo en lo que sigue, por lo que la enunciaremos como un lema.

**Lema 5.21.** *Sea  $X$  un espacio topológico y supongamos que  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$  donde cada  $X_i$  es un subconjunto cerrado. Sea  $f_i : X_i \rightarrow Y$  una función continua para cada  $i = 1, \dots, n$ , que satisfacen  $f_i(x) = f_j(x)$  para cada  $x \in X_i \cap X_j$ . Entonces la función  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f(x) = f_i(x)$  para  $x \in X_i$  es continua en  $X$ .*

**ejemplo 5.22.** A continuación mostraremos cómo dar una demostración del resultado precedente utilizando redes, de modo que el lector aprecie las dificultades adicionales del uso de redes para estudiar topologías co-inducidas. Sea  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red en  $X$  que converge a un elemento  $x_0$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$  definimos

$$\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in X_i\}.$$

Claramente  $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$ . Afirmamos que al menos uno de estos conjuntos es cofinal. Si no fuese así, para cada  $\Lambda_i$  existe un elemento  $\lambda_i \in \Lambda$  que no es menor o igual a ningún elemento de  $\Lambda_i$ . Sea  $\lambda$  un elemento mayor a cada uno de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , el que existe por ser  $\Lambda$  un conjunto dirigido. Entonces

$\lambda$  no puede pertenecer a ningún conjunto  $\Lambda_i$ , lo que se encuentra en contradicción con  $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$ . Reordenando si es necesario, podemos suponer que  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  son cofinales y los restantes no lo son. En particular, se tiene

$$x_\lambda \xrightarrow{\lambda \in \Lambda_i} x_0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Como la restricción  $f_i$  de  $f$  a cada  $X_i$  es continua, se tiene

$$f(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \Lambda_i} f(x_0), \quad i = 1, \dots, k.$$

Sea  $V$  una vecindad de  $f(x_0)$  en  $Y$ . Para cada  $i = 1, \dots, k$ , existe un elemento  $\mu_i \in \Lambda_i$  tal que  $\lambda \in \Lambda_i$  y  $\lambda \geq \mu_i$  implican  $f(x_\lambda) \in V$ . Para cada  $i = k + 1, \dots, n$  escogemos un elemento  $\mu_i \in \Lambda$  que no sea menor a ningún elemento de  $\Lambda_i$ . Sea  $\mu \in \Lambda$  un elemento mayor o igual a cada  $\mu_i$  con  $1 \leq i \leq n$ . Si  $\lambda \geq \mu$  entonces  $\lambda \in \Lambda_i$  para algún  $i = 1, \dots, k$ . Como  $\lambda \geq \mu_i$ , se sigue que  $f(x_\lambda) \in V$ . Como  $V$  era una vecindad arbitraria de  $f(x_0)$  concluimos que

$$f(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} f(x_0).$$

Por lo tanto  $f$  es continua.

### Ejercicios

1. Sean  $X \subset Y \subseteq Z$  espacios topológicos. Probar que si  $X$  tiene la topología de subespacio en  $Y$  e  $Y$  tiene la topología de subespacio en  $Z$ , entonces  $X$  tiene la topología de subespacio en  $Z$ .
2. Probar en detalle que existen los homeomorfismos naturales  $X \times Y \cong Y \times X$  y  $X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$ .
3. Sea  $X$  el espacio que se obtiene al identificar los extremos del intervalo  $[0, 1]$ . Probar que  $X$  es homeomorfo al círculo unitario.
4. Sea  $X$  es espacio obtenido al identificar todos los enteros en  $\mathbb{R}$  y sea  $Y$  la union de todos los círculos de radio  $\frac{1}{n}$  centrados en  $(1/n, 0)$ . Probar que  $X$  e  $Y$  no son homeomorfos.
5. Probar que existe un espacio cociente no numerable e indiscreto de  $\mathbb{R}$ .

# Chapter 6

## Axiomas de separación

Algunos ejemplos de espacios topológicos vistos hasta ahora resultan bastante incómodos cuando se intenta trabajar con ellos como se hace por ejemplo en análisis, como es el caso de un espacio indiscreto en el que cada sucesión o filtro converge a cada límite y no existen funciones reales continuas no constantes definidas en este espacio. En este capítulo estudiaremos las condiciones mínimas que debe cumplir un espacio topológico para tener algunas propiedades similares a las que satisfacen los espacios métricos.

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Existe una relación de equivalencia natural  $\cong$  en  $X$  definida por  $x \cong y$  si  $x$  e  $y$  están contenidos en exactamente los mismos conjuntos abiertos, es decir  $x \cong y$  si y sólo si se cumple que:

$$x \in \mathcal{O} \iff y \in \mathcal{O}, \quad \forall \mathcal{O} \in \tau.$$

El siguiente resultado es inmediato de la definición de vecindad:

**Proposición 6.1.**  $x \cong y$  si y sólo si  $V(x) = V(y)$ . □

**Proposición 6.2.**  $x \cong y$  si y sólo si toda red que converge a  $x$  converge también a  $y$  y viceversa.

**Demostración** Si  $V(x) = V(y)$  es inmediato de la definición de red convergente que una red converge a  $x$  si y sólo si converge a  $y$ . Por otro lado, si  $U$  es una vecindad de  $x$  pero no de  $y$  entonces  $y \in \overline{U^c}$ , por lo que existe una red en  $U^c$  que converge a  $y$ . Como  $U$  es vecindad de  $x$ ,  $x \notin \overline{U^c}$ , por lo que ninguna red en  $U^c$  puede converger a  $x$ . □

El mismo razonamiento demuestra:

**Proposición 6.3.**  $x \cong y$  si y sólo si todo filtro que converge a  $x$  converge también a  $y$  y viceversa.  $\square$

**Proposición 6.4.**  $x \cong y$  si y sólo si, en las notaciones del Ejemplo 3.3, se tienen simultáneamente  $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow x$ .

**Demostración** Si  $x \cong y$ , entonces las redes que convergen a  $x$  e  $y$  son las mismas, lo cual se aplica en particular a las redes indexadas por el conjunto dirigido  $\Lambda = \{\omega\}$  con un único elemento. Por otro lado, si  $x \rightarrow y$ , se sigue de inmediato que toda vecindad de  $y$  contiene a  $x$ . Si  $V$  es una vecindad de  $y$ , debe contener una vecindad abierta  $U$  de  $y$ . En particular  $x \in U$ , y como  $U$  es abierta, concluimos que  $U$  es vecindad de  $x$  y por lo tanto también  $V$ . Se sigue que  $x$  e  $y$  tienen las mismas vecindades.  $\square$

Un espacio se dice  $T_0$  si esta relación es la igualdad, es decir

$$x \cong y \iff x = y.$$

Al espacio  $X/\cong$  se le llama la  $T_0$ -identificación de  $X$  y es automáticamente  $T_0$ . Nótese que para todo espacio topológico  $X$ , los abiertos de  $X$  están en correspondencia uno-a-uno con los abiertos de la  $T_0$ -identificación de  $X$ . En general, no hace gran diferencia si uno reemplaza cada espacio por su  $T_0$ -identificación.

**ejemplo 6.5.** Todo espacio métrico y todo espacio discreto es  $T_0$ . El espacio de Sierpinski es  $T_0$ .

**ejemplo 6.6.** Si  $X$  es indiscreto, su  $T_0$ -identificación consta de un único punto.

**ejemplo 6.7.** Si  $X$  es  $T_0$ , su  $T_0$ -identificación es idéntica a  $X$ .

En un espacio  $T_0$  puede definirse una relación de orden  $\geq$  por:

$$x \geq y \iff V(x) \supseteq V(y).$$

Equivalentemente,  $x \geq y$  si todo abierto que contiene a  $y$  contiene también a  $x$ . En este caso se demuestran por el mismo argumento los siguientes resultados:

**Proposición 6.8.**  $x \geq y$  si y sólo si toda red que converge a  $x$  converge también a  $y$ .  $\square$

**Proposición 6.9.**  $x \geq y$  si y sólo si todo filtro que converge a  $x$  converge también a  $y$ .  $\square$

**Proposición 6.10.**  $x \geq y$  si y sólo si  $x \rightarrow y$ .

**ejemplo 6.11.** Es posible describir los espacios topológicos finitos simplemente describiendo la relación  $\rightarrow$ . Ilustremos esto con los espacios topológicos con dos elementos. En el espacio indiscreto ambos puntos son equivalentes. En el espacio discreto no existe ninguna relación de convergencia entre estos dos puntos. En el espacio de Sierpinski, se tiene  $1 \rightarrow 0$  pero no se tiene  $0 \rightarrow 1$ , es decir hay un punto mayor a otro. Representamos cada una de estas situaciones con un diagrama como muestra la Figura 6.1. El rectángulo en

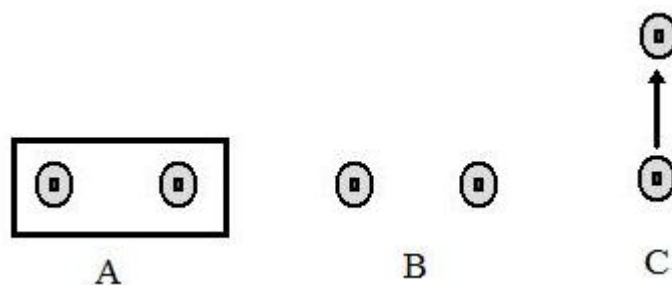


Figure 6.1: Los espacios topológicos con dos elementos: El espacio indiscreto (A), el discreto (B) y el espacio de Sierpinski (C).

A indica que los dos elementos en su interior son equivalentes. La flecha en B indica la relación ya conocida. Siguiendo la misma lógica, la Figura 6.2 ilustra las nueve topologías posibles, esencialmente diferentes de un espacio con tres elementos.

Recuérdese que si el conjunto dirigido  $\Lambda$  un tiene un último elemento  $\omega$ , una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a  $y$  si y sólo si  $x_\omega \rightarrow y$ , o equivalentemente si  $y \leq x_\omega$ . En un espacio  $T_0$  y finito, es suficiente estudiar este tipo de redes. Para ser precisos, si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red en tal espacio, podemos escribir  $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$ , donde cada  $\Lambda_i$  es la pre-imagen de un punto del espacio. Razonando como en el Ejemplo 5.22, podemos reducir el estudio de la convergencia de la red completa al estudio de la convergencia de las subredes fundamentales que corresponden a los subconjuntos  $\Lambda_i$  que sean cofinales. Tales subredes pueden

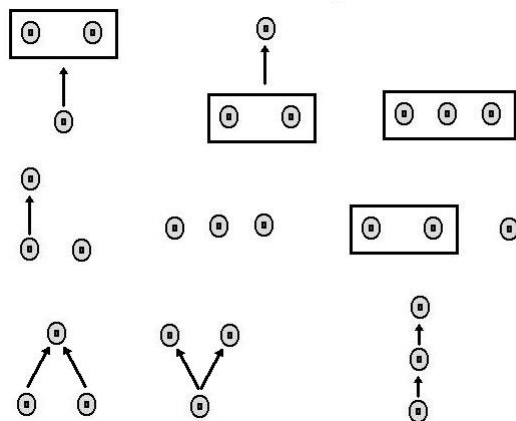


Figure 6.2: Los nueve espacios topológicos con tres elementos.

verse como subredes no estrictas de una red con último elemento. Como la topología de un espacio está determinada por la de su  $T_0$ -identificación, la topología de un espacio finito está totalmente determinada por la de su diagrama asociado. Dejamos al lector la tarea de recuperar la colección de conjuntos abiertos a partir de uno de estos diagramas.

Un espacio es  $T_1$  si la relación  $\geq$  coincide con la identidad, es decir

$$x \geq y \iff x = y.$$

Equivalentemente un espacio es  $T_1$  si y sólo si para cada par de puntos  $x$  e  $y$  existen vecindades  $U$  de  $x$  y  $W$  de  $y$  tales que  $U$  no es vecindad de  $y$  y  $W$  no es vecindad de  $x$ . Pasando a sub-vecindades si es necesario, podemos suponer  $U$  y  $W$  abiertos, de modo que la condición implica  $y \notin U$  y  $x \notin W$ . Equivalentemente, un espacio es  $T_1$  si y sólo si para cada par de puntos  $x$  e  $y$  existe una red (filtro) que converge a  $x$  pero no a  $y$  y viceversa.

Un espacio topológico  $X$  se dice  $T_2$  (o de Hausdorff) si para cada par de puntos  $x$  e  $y$  existen vecindades  $U \in V(x)$  y  $W \in V(y)$  tales que  $U \cap W = \emptyset$ .

**Proposición 6.12.**  *$X$  es Hausdorff si y sólo si ninguna red converge a más de un punto de  $X$ .*



**Demostración** Si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red que converge a  $x$  y a  $y$  y si  $U$  es una vecindad de  $x$  y  $W$  una vecindad de  $y$  entonces existen  $\mu, \nu \in \Lambda$  tal que  $x_\lambda \in U$  para  $\lambda \geq \mu$  y  $x_\lambda \in W$  para  $\lambda \geq \nu$ . Si  $\xi \geq \nu, \mu$  entonces se tiene  $x_\xi \in U \cap W$ . Como tal  $\xi$  existe por definición de conjunto dirigido, entonces  $U \cap W \neq \emptyset$ . Luego  $X$  no es Hausdorff.

Asumamos ahora que  $X$  no es Hausdorff. Es decir existen  $x$  e  $y$  en  $X$  tales que para cada par de vecindades  $U \in V(x)$  y  $W \in V(y)$  se tiene  $U \cap W \neq \emptyset$ . Entonces  $\Lambda = V(x) \times V(y)$  es un conjunto dirigido con la relación producto, y si tomamos una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  con  $x_{(U,W)} \in U \cap W$ , entonces  $x_{(U,W)} \rightarrow x$  y  $x_{(U,W)} \rightarrow y$ .  $\square$

**Proposición 6.13.**  *$X$  es Hausdorff si y sólo si ningún filtro converge a más de un punto de  $X$ .*

**Demostración** Si existe un filtro  $\mathfrak{F}$  que converge a dos elementos distintos  $x$  e  $y$ , entonces cualquier red  $\{x_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$  con  $x_F \in F$  converge a ambos  $x$  e  $y$ . Por otro lado si una red  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a dos elementos distintos  $x$  e  $y$ , entonces el filtro  $\mathfrak{F}$  generado por los conjuntos  $U_\mu = \{x_\lambda | \lambda \geq \mu\}$  converge a  $x$  y a  $y$ .  $\square$

**Proposición 6.14.**  *$X$  es Hausdorff si y sólo si la diagonal  $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$  es cerrada en  $X \times X$ .*

**Demostración** La diagonal es cerrada si y sólo si ninguna red de la forma  $\{(x_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  puede converger a un elemento  $(x, y)$  con  $x \neq y$ . Esto equivale a decir que no puede tenerse simultáneamente  $x_\lambda \rightarrow x$  y  $x_\lambda \rightarrow y$ .  $\square$

**Proposición 6.15.** *Un espacio primero contable  $X$  es Hausdorff si y sólo si ninguna sucesión converge a más de un punto.*

**Demostración** Si  $X$  es Hausdorff, ninguna red puede converger a más de un punto, y en particular ninguna sucesión. Por otro lado, si  $X$  no es Hausdorff, existen puntos distintos  $x$  e  $y$ , y una red que converge simultáneamente a  $x$  y a  $y$ . Por la demostración de la Proposición 6.12, podemos suponer que la red está indexada por  $V(x) \times V(y)$ . Como  $X$  es primero contable, existe una función cofinal  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow V(x)$ . Afirmamos que la función

$$\psi : \mathbb{Z} \rightarrow V(x) \times V(y), \quad \psi(x) = \left( \phi(x), \phi(x) \right),$$

es cofinal. De hecho para todo par de vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  existe un entero  $n$  tal que  $\phi(n) \subseteq U \cap V$  por lo que  $\psi(x) \geq (U, V)$ . La subred correspondiente a esta función cofinal es la sucesión pedida.  $\square$

**ejemplo 6.16.** Todo espacio discreto es Hausdorff. También lo es todo espacio métrico pues si  $2r < d(x, y)$  se tiene  $B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset$ .

**ejemplo 6.17.** Si  $\Lambda$  es un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden, entonces es un espacio de Hausdorff. De hecho si  $x$  e  $y$  son dos elementos de  $\Lambda$ , con  $x < y$ , sin ningún elemento entre ellos (es decir  $y$  es el sucesor de  $x$ ), entonces  $(-\infty, y)$  y  $(x, \infty)$  son disjuntos. De otro modo existe  $z$  con  $x < z < y$  de modo que  $x \in (-\infty, z)$  e  $y \in (z, \infty)$ .

**definición 6.18.** Un espacio de Hausdorff  $X$  se dice regular, si para todo conjunto cerrado  $C$  y todo elemento  $x \in C^c$  existen abiertos  $U$  y  $W$  tales que  $C \subseteq U$ ,  $x \in W$ , y  $U \cap W = \emptyset$ .

**Proposición 6.19.** *Un espacio de Hausdorff  $X$  es regular si y sólo si, para cada  $x$  en  $X$  y cada vecindad abierta  $\mathcal{O}$  de  $x$ , existe una vecindad abierta  $W$  de  $x$  tal que  $\overline{W} \subseteq \mathcal{O}$ .*

**Demostración** Supongamos primero que  $X$  es regular, y sea  $\mathcal{O}$  una vecindad abierta de  $x \in X$ . Tomando  $C = \mathcal{O}^c$  en la definición de espacio regular, obtenemos abiertos  $U \supset C$  y  $W \in V(x)$  que satisfacen  $U \cap W = \emptyset$ . Nótese que la última condición equivale a  $W \subseteq U^c$  y  $U^c$  es cerrado por lo que  $\overline{W} \subseteq U^c$ . Por otro lado  $U \supseteq \mathcal{O}^c$  implica  $U^c \subseteq \mathcal{O}$ .  $\square$

**definición 6.20.** Un espacio de Hausdorff  $X$  se dice normal, si para todo par de conjuntos cerrados disjuntos  $C$  y  $D$  existen abiertos  $U$  y  $W$  tales que  $C \subseteq U$ ,  $D \subseteq W$ , y  $U \cap W = \emptyset$ .

**Proposición 6.21.** *Un espacio de Hausdorff  $X$  es normal si y sólo si para cada subconjunto cerrado  $D$  en  $X$ , y para cada subconjunto abierto  $\mathcal{O}$  de  $X$  que contiene a  $D$ , existe un conjunto abierto  $W$  de  $X$  que contiene a  $D$  y satisface  $\overline{W} \subseteq \mathcal{O}$ .*

La demostración es similar a la del resultado precedente.

**Proposición 6.22** (Lema de Urysohn). *Si  $X$  es un espacio topológico normal, para cada par de conjuntos cerrados disjuntos  $C$  y  $D$  en  $X$ , existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x$  en  $C$  y  $f(x) = 1$  para todo  $x$  en  $D$ .*

**Demostración** Definimos una familia de conjuntos abiertos  $U_a$  para

$$a \in S = \left\{ \frac{r}{2^n} \in [0, 1] \mid n, r \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$$

como sigue:

- $U_0$  es un abierto que contiene a  $C$  y tal que  $\overline{U_0} \subseteq D^c$ .
- $U_1$  es un abierto que contiene a  $\overline{U_0}$  y tal que  $\overline{U_1} \subseteq D^c$ .
- Si  $U_a$  y  $U_b$  están definidos para  $a = \frac{r}{2^n}$  y  $b = \frac{r+1}{2^n}$ , de modo que se satisfaga  $\overline{U_a} \subseteq U_b$ , entonces para  $c = \frac{a+b}{2} = \frac{2r+1}{2^{n+1}}$  se elige el abierto  $U_c$  de modo que contenga a  $\overline{U_a}$  y que  $\overline{U_c}$  esté contenido en  $U_b$ .

Este procedimiento define  $U_a$  para todo  $a \in S$ . Definimos

$$f(x) = \inf \left\{ a = \frac{r}{2^n} \in [0, 1] \mid x \in \overline{U_a} \right\}.$$

Por convención, diremos que  $f(x) = 1$  si  $x \notin U_1$ . Afirmamos que, con esta definición,  $f$  es continua. Sea  $x$  un elemento de  $X$  tal que  $f(x) \in ]0, 1[$ . Entonces una base de entornos de  $f(x)$  está formada por intervalos del tipo  $]c, d[$  con  $c$  y  $d$  en  $S$ . Nótese que  $c < f(x)$  equivale a  $x \notin \overline{U_c}$  por definición. Por otro lado  $f(x) < d$  entonces  $f(x) \leq d'$  para algún  $d' \in S$  con  $d' < d$ . Si tomamos otro  $d'' \in S$  con  $d' < d'' < d$  se tiene  $x \in \overline{U_{d'}} \subseteq U_{d''}$ . Por otro lado si  $y \in U_{d''}$  se tiene  $f(y) \leq d'' < d$ . En particular  $f(U_{d''} - \overline{U_c}) \subseteq ]c, d[$  y  $U_{d''} - \overline{U_c}$  es una vecindad abierta de  $x$ . Se sigue que  $f$  es continua en  $x$ . La continuidad en los puntos  $x \in X$  tales que  $f(x) \in \{0, 1\}$  es similar y se deja como ejercicio al lector. Se sigue que  $f$  es continua en cada punto y por lo tanto continua.  $\square$

**Lema 6.23.** *Si  $X$  es un espacio topológico normal, y si  $h : E \rightarrow [0, a]$  es una función continua en el subconjunto cerrado  $E$  de  $X$ , entonces existe una función continua  $g : X \rightarrow [0, a/3]$  tal que para todo  $x \in E$  se tiene  $0 \leq h(x) - g(x) < (2/3)a$ .*

**Demostración** Basta probar el caso  $a = 1$ . Aplicamos el lema de Urysonh con  $C = h^{-1}([0, 1/3])$  y  $D = h^{-1}([2/3, 1])$ . Sea  $f$  una función que satisface  $f(C) = \{0\}$  y  $f(D) = \{1\}$ . Entonces  $g(x) = (1/3)f(x)$  satisface lo pedido.  $\square$

**Proposición 6.24** (Teorema de extensión de Tietze). *Si  $X$  es un espacio topológico normal, y si  $h : C \rightarrow [0, 1]$  es una función continua en el subconjunto cerrado  $C$  de  $X$ , entonces existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  que extiende  $h$ .*

**Demostración** Aplicamos el lema precedente. Sea  $g_1 : X \rightarrow [0, 1/3]$  continua y tal que  $0 \leq h(x) - g_1(x) < (2/3)$  para todo  $x \in C$ . Sea  $h_1 = h - g_1$ . Entonces  $h_1 : C \rightarrow [0, 2/3]$  por lo que aplicando el lema nuevamente se encuentra  $g_2 : X \rightarrow [0, 2/9]$  continua y tal que  $0 \leq h_1(x) - g_2(x) < (2/3)^2$  para todo  $x \in C$ . Sea  $h_2 = h_1 - g_2 = h - g_1 - g_2$ . Iterando obtenemos una serie de pares  $(h_n, g_n)$  donde cada  $h_i$  es una función continua en  $C$ , cada  $g_i$  es una función continua en  $X$ , y se tiene

$$h_n = h - \sum_{i=1}^n g_i, \quad 0 \leq h_i(x) \leq (2/3)^n, \quad 0 \leq g_i(x) \leq (1/3)(2/3)^{n-1}.$$

En particular la suma  $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$  es uniformemente convergente y su suma  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$  es continua. Por otro lado para  $x \in C$  se tiene

$$h(x) = h_n(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x),$$

por lo que al tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene  $h(x) = f(x)$  en  $C$ .  $\square$

**ejemplo 6.25.** Todo espacio métrico es normal, de hecho si  $A$  y  $B$  son cerrados y disjuntos, la función

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

satisface las condiciones del lemma de Urysohn.

## Ejercicios

1. Probar que un espacio topológico  $X$  es Hausdorff si y sólo si la diagonal es un subespacio cerrado de  $X \times X$ .
2. probar que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es Hausdorff. Lo mismo para espacios  $T_0$  y  $T_1$ .

3. probar que todo producto de espacios de Hausdorff es Hausdorff. Lo mismo para espacios  $T_0$  y  $T_1$ .
4. Probar que si  $X$  es un espacio de Hausdorff, el espacio que se obtiene al identificar dos puntos de  $X$  es Hausdorff.
5. Probar en detalle que el toro, definido como un espacio de identificación del cuadrado es un espacio de Hausdorff.
6. Probar que todo espacio métrico es normal.
7. Probar que un espacio de Hausdorff  $X$  es regular si y sólo si para cada punto  $x$  las vecindades cerradas de  $x$  forman un subconjunto cofinal.
8. Una superficie es un espacio topológico en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ . Probar que todas las superficies son regulares.
9. Sea  $X$  un espacio regular y sea  $A$  un subconjunto cerrado. Probar que el espacio que se obtiene al identificar los puntos de  $A$  es un espacio de Hausdorff.
10. Encuentre un espacio normal  $X$  y una función continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  definida en un cerrado  $A$  que no se extienda a una función continua  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ . Justifique.
11. Probar que todo producto de espacios regulares es regular.

# Chapter 7

## Compacidad

Un espacio  $X$  se dice quasi-compacto si para cada colección de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  con

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X,$$

existe una subcolección finita  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$  tal que  $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} = X$ . Equivalentemente, un espacio  $X$  es quasi-compacto si para cada colección de subconjuntos cerrados  $\{C_i\}_{i \in I}$  con

$$\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset,$$

existe una subcolección finita  $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_n}\}$  tal que  $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n} = \emptyset$ . En otras palabras, si cada subcolección finita de  $\{C_i\}_{i \in I}$  tiene intersección no vacía (en este caso se dice que la colección tiene la propiedad de la intersección finita), entonces la colección misma tiene intersección no vacía.

**Proposición 7.1.**  *$X$  es quasi-compacto si y sólo si cada filtro en  $X$  tiene un punto de acumulación.*

**Demostración** Supongamos primero que  $X$  es quasi-compacto. Recordemos que  $x$  es un punto de acumulación del filtro  $\mathfrak{F}$  si y sólo si para cada vecindad  $U$  de  $x$  existe  $F \in \mathfrak{F}$  tal que  $U \cap F \neq \emptyset$ . Si  $\mathfrak{F}$  no tuviera puntos de acumulación, para cada  $x$  en  $X$  existiría una vecindad  $U_x$  que podemos suponer abierta, y un elemento  $F_x$  en el filtro  $\mathfrak{F}$  tal que  $U_x \cap F_x = \emptyset$ . Nótese que

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$$

por lo que los conjuntos  $U_x$  constituyen un cubrimiento abierto. Si  $X$  es quasi-compacto, existen conjuntos  $U_1, \dots, U_n$  de entre los  $U_x$  tales que  $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$ . Para cada  $i$  existe un  $F_i \in \mathfrak{F}$  con  $U_i \cap F_i = \emptyset$ . Sea  $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ . Entonces  $F \in \mathfrak{F}$ , y  $F \cap U_i = \emptyset$  para todo  $i$ , luego  $F = \emptyset$ . La contradicción demuestra que todo filtro debe tener puntos de acumulación.

Supongamos ahora que todo filtro en  $X$  tiene puntos de acumulación. Sea  $\mathfrak{C}$  una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita. Sea  $C$  la intersección de los elementos de  $\mathfrak{C}$ . Basta probar que  $C$  es no vacío. Sea  $\mathfrak{F}$  el filtro generado por  $\mathfrak{C}$ . En particular, las intersecciones finitas de elementos de  $\mathfrak{C}$  son base de  $\mathfrak{F}$ . Sea  $x$  un punto de acumulación de  $\mathfrak{F}$ . Entonces cada vecindad de  $x$  intersecciona a cada elemento de  $\mathfrak{C}$ . Como  $C$  es cerrado,  $x$  está en  $C$ . Se sigue que  $x$  está en la intersección  $C$ .  $\square$

**Corolario 7.1.1.**  *$X$  es quasi-compacto si y sólo si cada ultrafiltro en  $X$  converge.*  $\square$

**Corolario 7.1.2.** *Sea  $X$  un espacio quasi-compacto. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función epiyectiva y continua entonces  $Y$  es quasi-compacto.*

**Demostración** Si  $\mathfrak{F}'$  es un ultrafiltro en  $Y$  entonces es imagen de un ultrafiltro  $\mathfrak{F}$  en  $X$ . Se sigue que  $\mathfrak{F}$  converge a un elemento  $x$  de  $X$  de donde  $\mathfrak{F}' = f(\mathfrak{F})$  converge a  $f(x) \in Y$ .  $\square$

**Proposición 7.2** (Teorema de Tychonoff). *Si  $\{X_i\}_{i \in I}$  es una familia de espacios quasi-compactos, su producto  $X = \prod_{i \in I} X_i$  es quasi-compacto.*

**Demostración** Sea  $\{X_i\}_{i \in I}$  una familia de espacios quasi-compactos y sea  $X = \prod_{i \in I} X_i$  su producto. Sea  $\mathfrak{F}$  un ultrafiltro en  $X$ . Sea  $\mathfrak{F}_i$  la imagen de  $\mathfrak{F}$  bajo la proyección en la  $i$ -ésima coordenada  $X \rightarrow X_i$ . Entonces cada  $\mathfrak{F}_i$  es un ultrafiltro y por lo tanto converge a algún  $x_i \in X_i$  ya que  $X_i$  es quasi-compacto. Luego  $\mathfrak{F}$  converge a  $x = (x_i)_{i \in I}$ . Como el ultrafiltro  $\mathfrak{F}$  era arbitrario el espacio  $X$  es quasi-compacto.  $\square$

**Proposición 7.3.**  *$X$  es quasi-compacto si y sólo si cada red en  $X$  tiene una subred convergente.*

**Demostración** Supongamos primero que  $X$  es quasi-compacto. Sea  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red en  $X$ . Entonces el filtro generado por los conjuntos  $F_\lambda =$

$\{x_\mu | \mu \geq \lambda\}$  tiene un punto de acumulación, digamos  $x$ . En particular, para cada vecindad  $U$  de  $x$  y cada  $F_\lambda$  el conjunto  $U \cap F_\lambda$  es no vacío. Sea

$$M = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times V(x) | x_\lambda \in U\}.$$

Si  $(\lambda_1, U_1)$  y  $(\lambda_2, U_2)$  están en  $M$ , y si  $\lambda_3 \geq \lambda_1, \lambda_2$  entonces existe un  $\lambda_4 \geq \lambda_3$  tal que  $x_{\lambda_4} \in U_1 \cap U_2$ , de donde  $(\lambda_4, U_1 \cap U_2)$  es un elemento de  $M$  por lo que  $M$  es un conjunto dirigido con respecto al orden producto. El mismo argumento demuestra que  $\phi : M \rightarrow \Lambda$  definido por  $\phi(\lambda, U) = \lambda$  es cofinal. Si definimos  $y_{(\lambda, U)} = x_\lambda$  para cada  $(\lambda, U) \in M$ , la red  $\{y_{(\lambda, U)}\}_{(\lambda, U) \in M}$  converge a  $x$  y es una subred de la red original.

Supongamos ahora que cada red en  $X$  tenga una subred convergente y sea  $\mathfrak{F}$  un filtro. Sea  $\{x_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$  una red que satisface  $x_F \in F$  para todo  $F \in \mathfrak{F}$ . Sea  $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una subred que converge a un punto  $y$ , digamos  $y_\lambda = x_{\phi(\lambda)}$  donde  $\phi : \Lambda \rightarrow \mathfrak{F}$  es cofinal. Entonces el filtro generado por los conjuntos  $F_\lambda = \{y_\mu | \mu \geq \lambda\}$  converge a  $y$ . Afirmamos que este filtro contiene a  $\mathfrak{F}$ , lo que concluye la demostración. Basta ver que todo elemento de  $\mathfrak{F}$  contiene a algún  $F_\lambda$ . Sea  $F \in \mathfrak{F}$  y sea  $\lambda \in \Lambda$  un elemento que satisface  $\phi(\lambda) \geq F$ , el que existe por ser  $\phi$  cofinal. Afirmamos que  $F \supseteq F_\lambda$ . De hecho si  $\mu \geq \lambda$  se tiene

$$y_\mu = x_{\phi(\mu)} \in \phi(\mu) \subseteq \phi(\lambda) \subseteq F.$$

□

**Proposición 7.4.** *Si  $X$  es un espacio quasi-compacto, todo subconjunto cerrado es quasi-compacto.*

**Demostración** Si  $Y$  es cerrado en  $X$  entonces toda red en  $Y$  tiene una subred convergente a un punto de  $X$ . Por ser  $Y$  cerrado, su límite debe estar en  $Y$ . El resultado sigue. □

**Proposición 7.5.** *Si  $X$  es Hausdorff, todo subconjunto quasi-compacto de  $X$  es cerrado.*

**Demostración** Sea  $Y$  un subconjunto quasi-compacto de  $X$ . Sea  $y \in \bar{Y}$ . Entonces existe una red  $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en  $Y$  que converge a  $y$ . Como  $Y$  es quasi-compacto, existe una subred que converge a un elemento  $y_0$  de  $Y$ . La subred debe converger también a  $y$  por ser subred. Como  $X$  es Hausdorff, cada red converge a lo más a un límite. Se sigue que  $y = y_0$  y por lo tanto  $y \in Y$ . Como  $y$  era un elemento arbitrario de la clausura,  $Y$  es cerrado. □



Una función se dice cerrada si lleva conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Una consecuencia de los resultados precedentes es la siguiente:

**Proposición 7.6.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, donde  $X$  es quasi-compacto e  $Y$  Hausdorff, Entonces  $f$  es cerrada.  $\square$*

**Corolario 7.6.1.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua y biyectiva, donde  $X$  es quasi-compacto e  $Y$  Hausdorff, Entonces  $f$  es un homeomorfismo.  $\square$*

**Proposición 7.7.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua y epiyectiva, donde  $X$  es quasi-compacto e  $Y$  de Hausdorff, Entonces  $f$  induce un homeomorfismo de un cociente de  $X$  con  $Y$ .*

**Demostración** De hecho, si  $X_1$  es el cociente de  $X$  por la relación

$$x \equiv y \iff f(x) = f(y),$$

entonces  $f$  induce una función  $F : X_1 \rightarrow Y$  tal que  $f = F \circ p$  siendo  $p : X \rightarrow X_1$  la proyección. Como  $f$  es continua, también lo es  $F$  por definición de topología co-inducida. Como  $X$  es quasi-compacto, también lo es su imagen  $X_1$ . Ahora se aplica el resultado anterior.  $\square$

**ejemplo 7.8.** Sea  $Y = S^1$  el círculo unitario en  $\mathbb{C}$  y sea  $X = [0, 1]$ . La función continua  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f(t) = e^{2\pi ti}$  induce un homeomorfismo entre  $S^1$  y el espacio que se obtiene al identificar 0 y 1 en  $[0, 1]$ .

Un espacio se dice compacto si es quasi-compacto y Hausdorff. Recuérdese que es un espacio es Hausdorff si y sólo si cada filtro tiene a lo más un límite. De hecho, es suficiente que cada ultrafiltro tenga a lo más un límite, puesto que si un filtro tiene dos límites lo mismo ocurre con cada ultrafiltro que lo contenga.

**Proposición 7.9.** *Un espacio  $X$  es compacto si y sólo si cada ultrafiltro converge exactamente a un límite.  $\square$*

**Proposición 7.10.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua y biyectiva, donde  $X$  e  $Y$  son espacios compactos, Entonces  $f$  es un homeomorfismo.  $\square$*

Aplicando este resultado a la identidad se tiene:

**Proposición 7.11.** *Dos topologías compactas distintas en un mismo conjunto son incomparables, es decir que ninguna es más fina que la otra.  $\square$*

**Proposición 7.12.** *Todo espacio compacto es normal.*

**Demostración** Sea  $X$  un espacio compacto y sean  $C_1$  y  $C_2$  subconjuntos cerrados disjuntos de  $X$ . Como  $X$  es Hausdorff, basta probar que existen abiertos  $U_1$  y  $U_2$ , que contienen respectivamente a  $C_1$  y  $C_2$ , tales que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Como  $C_1$  y  $C_2$  son cerrados, deben ser compactos. Sea  $y$  un punto en  $C_2$  y sea  $x$  un punto en  $C_1$ . Como  $X$  es Hausdorff, existen abiertos  $U_{x,y}$  y  $V_{x,y}$  con  $x \in U_{x,y}$ ,  $y \in V_{x,y}$  y  $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ . Como  $C_1$  es compacto, es recubierto por una cantidad finita de conjuntos  $U_{x_1,y}, \dots, U_{x_t,y}$ , con  $t = t(y)$ . Sean

$$U_y = \bigcup_{i=1}^t U_{x_i,y}, \quad V_y = \bigcap_{i=1}^t V_{x_i,y}.$$

Se sigue que  $C_1 \subseteq U_y$  y  $U_y \cap V_y = \emptyset$  pues cada elemento de la intersección está en algún  $U_{x_i,y}$  y en el correspondiente  $V_{x_i,y}$ . Análogamente,  $C_2$  es recubierto por una cantidad finita de conjuntos  $V_{y_1}, \dots, V_{y_k}$ . Sea

$$U = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}, \quad V = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}.$$

Entonces  $C_1 \subseteq U_y$  para cada  $y$  implica  $C_1 \subseteq U$ , y  $C_2 \subseteq V$  por hipótesis. Además se tiene  $U \cap V = \emptyset$  como antes.

## Compacificaciones

Un espacio de Hausdorff  $X$  se dice localmente compacto si cada punto en  $X$  tiene una vecindad compacta. Si  $X$  es localmente compacto puede definirse un nuevo espacio topológico  $\hat{X}$  como sigue:  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$  como conjunto, donde  $\infty$  no es un elemento de  $X$ . Los abiertos de  $\hat{X}$  son los abiertos de  $X$  y los conjuntos de la forma  $U \cup \{\infty\}$  donde  $U^c$  es compacto. Equivalentemente, los cerrados de  $\hat{X}$  son los conjuntos de la forma  $C \cup \{\infty\}$  donde  $C$  es un conjunto cerrado de  $X$  y los compactos de  $X$ . Para ver que esto define una topología en  $\hat{X}$  basta ver que los cerrados satisfacen las propiedades necesarias. Intersección de cerrados es cerrado y si al menos uno de ellos es compacto la intersección también lo es (por ser cerrada en un compacto). En particular, una intersección de conjuntos de la forma  $C \cup \{\infty\}$  es también de esa forma, y si se interseca con al menos un compacto el resultado es un compacto. La propiedad equivalente para las uniones finitas se demuestra similarmente. Una unión finita de compactos es compacto y si se unen a al menos un cerrado de la forma  $C \cup \{\infty\}$ , la unión es también de esa forma. El

conjunto  $\hat{X}$  se escribe como  $X \cup \{\infty\}$  y  $\emptyset$  es compacto, luego son cerrados en  $\hat{X}$ . Se concluye que con nuestra definición  $\hat{X}$  es efectivamente un espacio topológico.

**Proposición 7.13.** *Si  $X$  es Hausdorff y localmente compacto, entonces  $\hat{X}$  es compacto.*

**Demostración** Sea  $\mathfrak{F}$  un ultrafiltro en  $\hat{X}$ . Basta probar que  $\mathfrak{F}$  tiene exactamente un límite. Probemos primero que tiene al menos 1. Si  $\{\infty\}$  está en  $\mathfrak{F}$  entonces  $\mathfrak{F}$  converge a  $\infty$  y no hay nada que demostrar. Si no, entonces  $\mathfrak{F}_X$  es un ultrafiltro de  $X$ . Sea  $Y$  un compacto de  $X$ . Si  $Y \cap F \neq \emptyset$  para cada  $F \in \mathfrak{F}$  entonces  $\mathfrak{F}_Y$  es un ultrafiltro de  $Y$  y por lo tanto converge. Si para cada compacto  $Y$  existe un elemento  $F$  en  $\mathfrak{F}$  que no interseca a  $Y$  entonces  $F \subseteq Y^c$ , de donde cada entorno de  $\infty$  contiene un elemento de  $\mathfrak{F}$  y por lo tanto  $\mathfrak{F}$  converge a  $\infty$ .

Supongamos ahora que  $\mathfrak{F}$  tiene al menos dos límites. Si ambos están en  $X$  el filtro

$$\mathfrak{F}' = \{F \cap X \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

es un filtro en  $X$  que converge a dos límites. Lo que contradice el hecho de que  $X$  es Hausdorff. Supongamos ahora que uno de los límites de  $\mathfrak{F}$  es  $\infty$ . Sea  $x \in X$  un segundo límite y sea  $V$  una vecindad compacta de  $x$ . Entonces existen  $F_1$  y  $F_2$  en  $\mathfrak{F}$  tales que  $F_1 \subseteq V$  y  $F_2 \subseteq V^c \cup \{\infty\}$ . Se sigue que  $\emptyset = F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ , lo que es imposible.  $\square$

**Observación 7.14.** El espacio  $\hat{X}$  se llama la compactificación de Alexandroff de  $X$ .

Existe otra construcción que permite sumergir un espacio  $X$  en un espacio compacto. Un espacio  $X$  se dice completamente Hausdorff si para cada par de puntos distintos  $x$  e  $y$  en  $X$  existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  y  $f(y) = 1$ . Del mismo modo, un espacio de Hausdorff  $X$  se dice completamente regular si para cada punto  $x$  y cada conjunto cerrado  $B$  que no contiene a  $x$  existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  y  $f(y) = 1$  para todo  $y \in B$ . Todo espacio normal es completamente regular y todo espacio completamente regular es completamente Hausdorff. Sea  $X$  un espacio completamente Hausdorff. Sea  $C(X, [0, 1])$  el conjunto de funciones continuas de  $X$  en  $[0, 1]$ . Entonces la función

$$\phi : X \rightarrow \prod_{f \in C(X, [0, 1])} [0, 1]$$

definida por  $\phi(x)_f = f(x)$  es inyectiva y continua (pues lo es cada coordenada). Afirmamos que si  $X$  es completamente regular entonces  $\phi^{-1} : \phi(X) \rightarrow X$  es continua. Basta ver que si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red tal que  $f(x_\lambda)$  converge a  $f(x)$  para cada  $f$  entonces  $x_\lambda$  converge a  $x$ . Supongamos que este no es el caso. Entonces existe una vecindad  $U$  de  $x$ , que podemos suponer abierta, tal que para todo  $\lambda \in \Lambda$  existe  $\mu > \lambda$  tal que  $x_\mu \notin U$ . Sea  $f$  una función continua tal que  $f(x) = 0$  y  $f(y) = 1$  para todo  $y$  en  $U^c$ . Entonces  $f(x_\mu) = 1$  para valores de  $\mu$  arbitrariamente grandes, lo que contradice la hipótesis sobre la red.

En particular, para  $X$  completamente regular, la clausura  $\beta X$  de  $\phi(X)$  es un espacio compacto que contiene a  $\phi(X)$  como subespacio denso. A menudo se identifica  $X$  con  $\phi(X)$ , por lo que se dice que  $\beta X$  contiene a  $X$  como subespacio denso. Por esta razón,  $\beta X$  recibe el nombre de compactificación de Stone-Čech de  $X$ .

**Proposición 7.15.** *Si  $\psi : X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces existe una única función continua  $\beta\psi : \beta X \rightarrow \beta Y$  que extiende  $f$ . En otras palabras, se tiene un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta X & \xrightarrow{\beta f} & \beta Y \end{array} .$$

**Demostración** Sea

$$X_0 = \prod_{f \in C(X, [0,1])} [0, 1], \quad Y_0 = \prod_{f \in C(Y, [0,1])} [0, 1].$$

Definamos  $\Psi : X_0 \rightarrow Y_0$  mediante

$$\Psi(x)_f = x_{f \circ \psi}.$$

La función  $\Psi$  es continua pues lo es cada coordenada. Sean  $\phi_X : X \rightarrow X_0$  y  $\phi_Y : Y \rightarrow Y_0$  las funciones definidas por  $\phi_X(x)_f = f(x)$  para  $f : X \rightarrow [0, 1]$  continua y  $\phi_Y(y)_g = g(y)$  para  $g : Y \rightarrow [0, 1]$  continua. Afirmamos que  $\Psi \circ \phi_X = \phi_Y \circ \psi$ . De hecho un cálculo por coordenadas nos da:

$$\left( \phi_Y[\psi(x)] \right)_g = g[\psi(x)] = [\phi_X(x)]_{g \circ \psi} = \left( \Psi[\phi_X(x)] \right)_g .$$

En particular, si  $x$  está en  $\beta X$ , entonces existe un ultrafiltro  $\mathfrak{F}$  en  $X$  tal que  $\phi_X(\mathfrak{F})$  converge a  $x$ . En particular  $\Psi[\phi_X(\mathfrak{F})] = \phi_Y[\psi(\mathfrak{F})]$  converge a  $\Psi(x)$ , luego  $\Psi(x) \in \beta Y$ . Se sigue que  $\Psi$  tiene una restricción  $\beta\psi : \beta X \rightarrow \beta Y$ . La unicidad sigue del hecho de que la imagen de  $X$  es densa en el espacio de Hausdorff  $\beta X$ , por lo que la imagen de cada elemento  $a$  de  $\beta X$  debe ser igual al único límite de la imagen de cualquier ultrafiltro en  $X$  que converja a  $a$ .  $\square$

**ejemplo 7.16.** Si  $X$  es compacto  $\beta X$  es homeomorfo a  $X$ . En particular, si  $f : Z \rightarrow X$  es una función continua, entonces se extiende a una función  $\beta f : \beta Z \rightarrow X$ .

**Proposición 7.17.** Si  $X$  un espacio topológico discreto existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de  $\beta X$  y los ultrafiltros de  $X$ .

**Demostración** Si  $\mathfrak{F}$  es un ultrafiltro en  $X$  entonces su extensión  $\mathfrak{F}_{\beta X}$  debe tener un punto de acumulación en  $\beta X$ . Por ser  $\mathfrak{F}_{\beta X} = i(\mathfrak{F})$  donde  $i : X \rightarrow \beta X$  es la inclusión, el filtro  $\mathfrak{F}_{\beta X}$  es un ultrafiltro y por lo tanto converge a un único punto  $x_{\mathfrak{F}}$ . Por otro lado, si  $x$  es un punto de  $\beta X$  entonces existe un filtro en  $X$  que converge a  $x$  y puede suponerse que es un ultrafiltro.

Supongamos finalmente que  $x$  es punto de acumulación de dos ultrafiltros  $\mathfrak{F}_{\beta X}$  y  $\mathfrak{G}_{\beta X}$ , donde  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{G}$  son ultrafiltros distintos de  $X$ . Como  $\mathfrak{F}$  no está contenido en  $\mathfrak{G}$ , existe un conjunto  $F \in \mathfrak{F}$  tal que  $F \notin \mathfrak{G}$ . Se sigue que  $G = F^c \in \mathfrak{G}$ . La función característica  $\chi_F : X \rightarrow [0, 1]$  se extiende continuamente a una función  $\beta\chi_F : \beta X \rightarrow [0, 1]$ . Se sigue que  $\{1\} = \chi_F(F) \in \beta\chi_F(\mathfrak{F})$  por lo que se tiene

$$1 = \lim \beta\chi_F(\mathfrak{F}) = \beta\chi_F(x),$$

Pero el mismo argumento aplicado a  $G = F^c$  demuestra que  $\beta\chi_F(x) = 0$ .  $\square$

**ejemplo 7.18.** Sean ahora  $X_1$  y  $X_2$  dos espacios topológicos con el mismo conjunto subyacente y sea  $i : X_1 \rightarrow X_2$  la identidad. Supongamos que la topología de  $X_1$  es más fina que la de  $X_2$ , de modo que  $i$  sea continua. Entonces existe una función continua  $\beta i : \beta X_1 \rightarrow \beta X_2$  que la extiende. Su imagen es compacta y por lo tanto cerrada. Como contiene a la imagen de  $i$  que es densa, debemos tener  $\beta i(\beta X_1) = \beta X_2$ . Se sigue que  $\beta X_2$  es un cociente de  $\beta X_1$  por alguna relación de equivalencia. En particular, si  $X_1$  es discreto, se sigue que toda compactificación de Stone-Čech se obtiene cocientando  $\beta X_1$  por una relación de equivalencia apropiada.

**Ejercicios**

1. Sean  $\mathbb{R}_L$  y  $\mathbb{R}_l$  los espacios topológicos definidos en los ejercicios del Capítulo 2.
  - (a) Probar que un subconjunto de  $\mathbb{R}_L$  es cuasi-compacto si y sólo si tiene último elemento.
  - (b) Tiene  $\mathbb{R}_l$  subconjuntos compactos infinitos?
2. Usar la parte (a) del ejercicio precedente para probar que toda función semicontinua superiormente en un espacio compacto alcanza su máximo.
3. Probar que todo subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^n$  es compacto.
4. Probar que la función  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$f\left((a_n)_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2a_n 3^{-n}$$

es un homeomorfismo de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  con un subconjunto cerrado de  $[0, 1]$ . Este subconjunto recibe el nombre de conjunto de Cantor. Concluir que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  es compacto.

5. Sea  $X$  un espacio topológico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - (a) Cada punto de  $X$  tiene una vecindad compacta.
  - (b) Cada vecindad de un punto  $x \in X$  contiene una vecindad compacta de  $x$ .

Un espacio que cumple cualquiera de las dos propiedades anteriores se dice localmente compacto o LC.

6. Probar que todo subconjunto abierto de un espacio compacto es localmente compacto.
7. Probar que  $\mathbb{R}$  es localmente compacto.
8. Probar que todo espacio topológico compacto es normal.

9. Probar que la función  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$f\left((a_n)_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 2^{-n}$$

es continua. Utilizar este hecho para dar una demostración de la compacidad del intervalo  $[0, 1]$  utilizando el teorema de Tychonov.

10. Sea  $X$  un producto arbitrario de copias de  $\mathbb{R}$ . Diremos que un subconjunto de  $X$  es puntualmente acotado si su proyección en cada coordenada es compacta. Probar que todo subconjunto cerrado y puntualmente acotado de  $X$  es compacto.
11. Probar que en un espacio compacto primero contable cada sucesión tiene una subsucesión convergente. Es cierto que si  $X$  es primero contable (y Hausdorff) y cada sucesión en  $X$  tiene una subsucesión convergente entonces  $X$  es compacto? (Sugerencia: tómesese la topología del orden en un conjunto bien ordenado incontable en el que cada sección inicial es numerable).
12. Probar que todo subconjunto abierto de un espacio compacto es localmente compacto.
13. Probar que  $\mathbb{R}$  es localmente compacto.
14. Probar que un producto de espacios LC es LC si y sólo si el número de factores no compactos es finito.
15. Probar que todo espacio LC es completamente regular.
16. Sea  $X$  un espacio topológico discreto y sea  $\beta X$  su compactificación de Stone-Cech. Probar que la función que asigna a cada ultrafiltro  $\mathfrak{F}$  de  $X$  su (único) límite en  $\beta X$  es una biyección.
17. Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios localmente compactos con el mismo conjunto subyacente, de modo que la topología de  $X$  sea mas fina que la de  $Y$ . Probar que  $\beta Y$  es homeomorfo a un cociente de  $\beta X$ .
18. Probar que un producto numerable de intervalos es metrizable.

19. Sea  $X$  un espacio compacto segundo contable. Probar que  $X$  es metrizable (Sugerencia: Probar que  $X$  es homeomorfo a un subespacio de un producto numerable de intervalos).
20. Probar que el conjunto  $F$  de todas las funciones de  $[0, 1]$  en  $[0, 1]$  es un espacio topológico compacto pero no metrizable con la topología de la convergencia puntual (sugerencia: encontrar una sucesión sin subsucesiones convergentes).
21. Probar que toda sucesión de funciones crecientes de  $[0, 1]$  en  $[0, 1]$  tiene una subsucesión puntualmente convergente (sugerencia: Considerese la proyección del espacio de todas las funciones en un subproducto numerable apropiado).



# Chapter 8

## Compacidad secuencial

Un espacio topológico donde cada sucesión tiene una subsucesión convergente se dice secuencialmente compacto. En este capítulo estudiaremos la relación entre este concepto y compacidad. En particular en el caso de espacios métricos.

**Proposición 8.1.** *Un espacio primero contable y quasi-compacto  $X$ , es secuencialmente compacto.*

**Demostración** Sea  $X$  un espacio primero contable y quasi-compacto. Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ . Entonces tiene una subred convergente a algún elemento  $x \in X$ . Esta subred está dada por una función cofinal  $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$  para algún conjunto dirigido  $\Lambda$ . Por definición de cofinal, la imagen  $S$  de  $\phi$  es infinita. Sea  $S = \{s_1, s_2, \dots\}$  con  $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$ . Sea  $\mu_n$  un elemento de  $\Lambda$  tal que  $\phi(\mu_n) = s_n$ . Sea  $\omega : \mathbb{Z} \rightarrow V(x)$  una función cofinal. Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  escogemos inductivamente un elemento  $\lambda_n$  en  $\Lambda$  que satisfaga las 3 condiciones siguientes:

1.  $\lambda_n \geq \mu_n$ .
2.  $x_{\phi(\lambda)} \in \omega(n)$  para todo  $\lambda > \lambda_n$ .
3.  $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$  para  $n \geq 2$ .

Claramente  $x_{\phi(\lambda_n)} \rightarrow x$ . Falta ver que es una subsucesión, es decir que  $n \mapsto \phi(\lambda_n)$  es cofinal. Por definición es creciente. Por otro lado

$$\phi(\lambda_n) \geq \phi(\mu_n) = s_n$$

y la inclusión  $S \mapsto \mathbb{N}$  es cofinal. □

**Observación 8.2.** Existen espacios primero contables secuencialmente compactos que no son quasi-compactos. Por ejemplo, Sea  $\Omega$  un conjunto bien ordenado incontable y para cada  $x$  en  $\Omega$  denotamos por  $s(x)$  el conjunto  $\{y \in \Omega | y \leq x\}$ . Si  $0$  denota el primer elemento de  $\Omega$ , este conjunto es el intervalo cerrado  $[0, x]$ , o, equivalentemente, el intervalo abierto  $[0, x + 1[$ , donde  $x + 1$  denota el sucesor de  $x$ . Sea

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega | s(x) \text{ es numerable o finito}\}.$$

Este conjunto es un intervalo abierto que contiene a  $0$ , por lo que, o es igual al conjunto incontable  $\Omega$ , o es de la forma  $[0, u[$ , donde  $u \in \Omega$  es el primer elemento que no pertenece a  $\Omega_0$ . En el último caso,  $u \notin \Omega_0$ , de donde  $\Omega_0$  es incontable por definición. En cualquier caso  $\Omega_0$  es incontable. Sea  $\tau$  la topología definida en  $\Omega_0$  por los intervalos de la forma

$$]a, b[ = \{u \in \Omega_0 | a < u < b\}.$$

Esta se llama la topología del orden en  $\Omega_0$ . El espacio topológico  $(\Omega_0, \tau)$  no es compacto, ya que la red  $\{x_s\}_{s \in \Omega_0}$ , definida por  $x_s = s$ , no tiene una subred convergente a ningún elemento de  $\Omega_0$ . De hecho, la red converge al infinito en la compactificación de Alexandroff de  $\Omega_0$ . Por otro lado, el conjunto de intervalos contenidos en  $s(x)$  es numerable para cada  $x$ , por lo que  $s(x)$  es primero contable. Como cada  $s(x)$  es abierto (ejercicio), se tiene que  $\Omega_0$  es primero contable. Afirmamos que cada sucesión en  $\Omega_0$  tiene una subsucesión convergente. Para ello basta probar las siguientes afirmaciones:

1. Cada sucesión está contenida en un conjunto de la forma  $s(x)$ .
2.  $s(x)$  es compacto.

Para la primera afirmación, si la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no está contenida en  $s(x)$ , entonces existe  $n$  tal que  $x < x_n$ . En particular,  $x \in s(x_n)$  para algún  $n$ . Como  $\bigcup_{n=1}^{\infty} s(x_n)$  es numerable, no puede tenerse  $\Omega_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} s(x_n)$ , dado que  $\Omega_0$  es incontable. Concluimos que existe un elemento  $x \in \Omega_0$  tal que  $s(x)$  contiene a la sucesión completa.

Para demostrar la segunda propiedad, supongamos que  $s(x)$  no es compacto para algún  $x$ . Sea  $x_0$  el menor elemento tal que  $s(x_0)$  no es compacto. Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una colección de abiertos que recubren  $s(x)$ . Sea  $i \in I$  tal que  $x_0 \in U_i$ . Por definición de la topología del orden, existe un intervalo abierto  $]a, b[$  tal que  $x_0 \in ]a, b[ \subseteq U_i$ . Sea  $u$  el menor elemento de  $]a, b[$ . Si  $x_0 = u$ ,

entonces  $x_0$  es el sucesor de  $a$  y se tiene  $s(x_0) = s(a) \cup \{x_0\}$ . Como  $s(a)$  es compacto por la minimalidad de  $x_0$ , también lo es  $s(x_0)$  y tenemos una contradicción. Supongamos ahora que  $u < x_0$ . Entonces  $U_i$  contiene a todos los puntos entre  $u$  y  $x_0$  (si los hay). Por otro lado  $s(u)$  es quasi-compacto, por lo que existe una unión finita  $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$  que contiene a  $s(u)$ . Se sigue que  $s(x) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \cup U_i$ , lo que es nuevamente una contradicción.

**Proposición 8.3.** *En un espacio secuencialmente compacto todo recubrimiento abierto numerable tiene un sub-cubrimiento finito.*

**Demostración** Sea  $X$  un espacio secuencialmente compacto y supongamos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad X \neq \bigcup_{i=1}^N U_i \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Para cada  $N \in \mathbb{N}$ , sea  $x_N$  en el complemento de  $\bigcup_{i=1}^N U_i$ . Sea  $x$  el límite de una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces  $x$  está contenido en el complemento de  $\bigcup_{i=1}^N U_i$  para todo  $N$ , lo que contradice  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ .  $\square$

**definición 8.4.** Un espacio  $X$  se dice de Lindeloff si cada cubrimiento abierto de  $X$  tiene un sub-cubrimiento numerable.

**Proposición 8.5.** *Un espacio de Lindeloff secuencialmente compacto es quasi-compacto.*

**Demostración** Inmediato de la definición y del resultado anterior.  $\square$

**definición 8.6.** Un espacio  $X$  se dice segundo contable si la topología de  $X$  tiene una base numerable.

**Proposición 8.7.** *Un espacio segundo contable es de Lindeloff.*

**Demostración** Sea  $B$  una base numerable del espacio  $X$ . Sea  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  con cada  $U_i$  abierto. Sea  $S \subseteq B$  la colección de elementos de la base que están contenidos en al menos un  $U_i$ . Para cada  $\mathcal{O} \in S$  escojemos  $i(\mathcal{O}) \in I$  tal que  $\mathcal{O}$  está contenido en  $U_{i(\mathcal{O})}$ . Afirmamos que de hecho  $X = \bigcup_{\mathcal{O} \in S} U_{i(\mathcal{O})}$ . Esto terminará la demostración. Sea  $x \in X$ . Basta probar que  $x$  está contenido en algún  $U_{i(\mathcal{O})}$ . De hecho  $x$  está contenido en algún  $U_i$  y como este es unión de conjuntos en  $B$ , los que deben estar en  $S$  por definición,

$x$  debe estar contenido en algún  $\mathcal{O} \in S$  pero  $\mathcal{O} \subseteq U_{i(\mathcal{O})}$ . La demostración termina observando que  $S$  es numerable y por lo tanto también lo es la familia  $\{U_{i(\mathcal{O})}\}_{\mathcal{O} \in S}$  que  $S$  indexa.  $\square$

**definición 8.8.** Un espacio  $X$  se dice separable si tiene un subconjunto denso numerable.

**Proposición 8.9.** *Un espacio segundo contable es separable.*

**Demostración** Basta escoger un elemento en cada conjunto de la base numerable.  $\square$

**Proposición 8.10.** *Un espacio métrico separable es segundo contable.*

**Demostración** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y$  un subconjunto denso numerable. Sea

$$\mathfrak{B} = \{B(y, r) \mid y \in Y, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Es claro que  $\mathfrak{B}$  es numerable. Afirmamos que es base de la topología de  $X$ . Basta ver que si  $\mathcal{O}$  es un abierto en  $X$  y  $x \in \mathcal{O}$ , existe un elemento de  $\mathfrak{B}$  contenido en  $\mathcal{O}$  y que contiene a  $x$ . De hecho si  $B(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}$  tomamos  $r < \epsilon/2$  e  $y \in Y$  tal que  $d(y, x) < r$ . Si  $d(y, z) < r$  se tiene  $d(x, z) < 2r < \epsilon$ , por lo que  $z \in \mathcal{O}$ .  $\square$

**Proposición 8.11.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico secuencialmente compacto, para cada  $\epsilon > 0$  existe un conjunto finito  $x_1, \dots, x_n$ , tal que para cada  $x$  en  $X$  existe un  $i$  en  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $d(x, x_i) < \epsilon$ .*

**Demostración** En caso contrario existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$  para  $i \neq j$ , la que no puede tener una subsucesión convergente.  $\square$

**Corolario 8.11.1.** *Todo espacio métrico secuencialmente compacto es separable.*  $\square$

**Proposición 8.12.** *Todo espacio métrico secuencialmente compacto es compacto.*

**Demostración** Como cada espacio métrico es de Hausdorff, basta probar que es cuasi-compacto. Por el resultado anterior es separable, luego es segundo contable y por lo tanto de Lindeloff. Pero todo espacio secuencialmente compacto y de Lindeloff es cuasi-compacto.  $\square$

### Ejercicios

1. Probar que la compactificación de Stone-Cech  $\beta\mathbb{Z}$  del espacio discreto  $\mathbb{Z}$  no es secuencialmente compacta. **Sugerencia:** Toda sucesión creciente de enteros puede separarse en dos sucesiones crecientes con imágenes disjuntas, y existe una función continua que manda una de estas imágenes a 0 y la otra a 1.
2. Probar que el conjunto  $s(x)$  de la Observación 8.2 es efectivamente abierto para la topología dada.
3. Sea  $Y = X \cup \{p\}$ , con  $p \notin X$ , un subconjunto incontable. Sea  $\tau$  la topología que contiene a cada conjunto  $\{x\}$ , con  $x \in X$ , mientras que un subconjunto que contiene a  $p$  es abierto si y sólo si su complemento es numerable. Probar que  $(Y, \tau)$  es Lindeloff pero no separable.
4. Un espacio es  $\sigma$ -compacto si es unión numerable de subespacios compactos. Demuestre que todo espacio  $\sigma$ -compacto es Lindeloff.

# Chapter 9

## Espacios conexos

**definición 9.1.** Un espacio topológico se dice conexo si no existen dos abiertos no vacíos  $U$  y  $W$  en  $X$  tales que  $U \cap W = \emptyset$  y  $U \cup W = X$ . Un espacio que no es conexo se dice desconexo. Intuitivamente un espacio desconexo está dividido en dos partes separadas como en la Figura 9.1. Tomando complementos, se vé fácilmente que  $X$  es desconexo si y sólo si existen dos cerrados no vacíos  $C_1$  y  $C_2$  en  $X$  tales que  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  y  $C_1 \cup C_2 = X$ . Equivalentemente,  $X$  es conexo si sus únicos subconjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son  $X$  y  $\emptyset$ .

**ejemplo 9.2.** Probaremos que el intervalo  $[0, 1]$  es conexo. Sea  $W$  un subconjunto abierto y cerrado de  $[0, 1]$ . Si  $1 \in W$  reemplazamos  $W$  por su complemento  $W^c$  que es también abierto y cerrado, por lo que podemos suponer que  $W$  no contiene a 1. Supongamos que  $W$  es no vacío. Sea  $c$  el supremo de  $W$ . Como  $W$  es cerrado en  $[0, 1]$ ,  $c$  está en  $W$ . En particular  $c < 1$ . Sea  $\delta = 1 - c$ . Como  $c + \frac{\delta}{n}$  está en  $W^c$  para todo  $n$  y  $W^c$  es cerrado se tiene que su límite  $c$  está en  $W^c$ . La contradicción termina la prueba.



Figure 9.1: Un espacio desconexo.

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua e  $Y = U \cup W$  es una unión disjunta con  $U$  y  $W$  abiertos, entonces  $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(W)$  es también una unión disjunta del mismo tipo. Por otro lado, si  $f$  es epiyectiva, la preimagen de un conjunto no vacío es no vacía. Se sigue que  $U, W \neq \emptyset$  implica  $f^{-1}(U), f^{-1}(W) \neq \emptyset$ . Concluimos que si  $Y$  es desconexo, entonces también lo es  $X$ . El siguiente resultado es ahora inmediato.

**Proposición 9.3.** *Toda imagen continua de un espacio conexo es conexa.*

Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  se dice conexo si  $A$  es conexo con la topología de subespacio. En caso contrario decimos que  $A$  es desconexo.

**Proposición 9.4.** *Si  $A$  es un subconjunto conexo de un espacio topológico  $X$ , y si  $A \subseteq U \cup W$  donde  $U$  y  $W$  son abiertos disjuntos entonces  $A$  está contenido en uno de los abiertos  $U$  o  $W$ .*

**Demostración** Basta ver que  $A = (A \cap U) \cup (A \cap W)$  y los conjuntos  $A \cap U$  y  $A \cap W$  son abiertos disjuntos en  $A$ . Además

$$(A \cap U) \cup (A \cap W) = A \cap (U \cup W) = A,$$

por lo que uno de ellos  $A \cap U$  o  $A \cap W$  debe ser vacío. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $A \cap U = \emptyset$ . Entonces  $A = (A \cap U) \cup (A \cap W)$  implica  $A = A \cap W$ , de donde  $A \subseteq W$ .  $\square$

**ejemplo 9.5.** Un intervalo en  $\mathbb{R}$  se define como un subconjunto tal que si contiene a dos puntos  $a$  y  $b$  contiene a cada punto entre  $a$  y  $b$ . Afirmamos que todo subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  es un intervalo. Basta ver que si  $A$  es un conjunto en  $\mathbb{R}$  que contiene dos puntos  $a < b$  pero no contiene al punto intermedio  $c$  entonces  $A$  está contenido en la unión  $] \infty, c[ \cup ]c, \infty[$  pero no en ninguno de los abiertos  $] \infty, c[$  y  $]c, \infty[$ .

**ejemplo 9.6.** Más generalmente, si  $\Lambda$  es un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden, entonces para cada  $c \in \Lambda$  los conjuntos

$$] \infty, c[ = \{x \in \Lambda \mid x < c\}, \quad ]c, \infty[ = \{x \in \Lambda \mid x > c\},$$

son abiertos. Definimos un intervalo en  $\Lambda$  como un subconjunto  $I \subseteq \Lambda$  tal que  $a, b \in I$  y  $a < d < b$  implican  $d \in I$ . El mismo argumento del ejemplo anterior prueba que todo subconjunto conexo de  $\Lambda$  es un intervalo. La converso, sin embargo, es falsa en general. Por ejemplo si  $\Lambda = \mathbb{Z}$  con el orden usual, el intervalo  $(0, 3) = \{1, 2\}$  es desconexo.

**Proposición 9.7.** *Si  $A$  es un subconjunto conexo de un espacio topológico  $X$ , entonces  $\bar{A}$  es conexo.*

**Demostración** Si  $\bar{A}$  está contenido en la unión de dos abiertos disjuntos  $U$  y  $V$ , lo mismo ocurre con  $A$ . Se sigue que  $A$  está contenida en uno de los conjuntos  $U$  o  $V$ . Sin pérdida de generalidad,  $A \subseteq U$ . Se sigue que  $A \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$ . En particular  $A \subseteq V^c$ , que es cerrado, por lo que  $\bar{A} \subseteq V^c$  y  $\bar{A} \cap V = \emptyset$ . Se sigue que  $\bar{A} \subseteq U$ .  $\square$

Otro resultado natural sobre conjuntos conexos es el siguiente:

**Proposición 9.8.** *Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos conexos de un espacio topológico  $X$ , y si se tiene*

$$X = A \cup B, \quad A \cap B \neq \emptyset,$$

*entonces  $X$  es conexo.*

**Demostración** Si  $X = U \cup W$  con  $U$  y  $W$  abiertos disjuntos no vacíos, entonces  $A$  está contenido en  $U$  o en  $W$  y lo mismo ocurre con  $B$ . Si  $A$  está contenido en  $U$  y  $B$  en  $W$  entonces

$$A \cap B \subseteq U \cap W = \emptyset,$$

lo que contradice la hipótesis. Lo mismo ocurre si  $A$  está contenido en  $W$  y  $B$  en  $U$ . Si  $A$  y  $B$  están ambos contenidos en  $W$ , como  $X = A \cup B$ , se tiene que  $X = W$  y por lo que  $U$  es vacío. Del mismo modo si  $A$  y  $B$  están ambos contenidos en  $U$  se tiene que  $W$  es vacío.  $\square$

Iterando el resultado anterior se tiene que si  $A_1, \dots, A_n$  son subconjuntos conexos de  $X$  tales que  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ , entonces la unión  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  es conexo. Intuitivamente, el conjunto  $A$  puede interpretarse como una cadena donde los conjuntos  $A_i$  son los eslabones. Un argumento similar se aplica a conjuntos más generales como el que se muestra en la mitad derecha de la Figura 9.2.

Sin embargo, la principal aplicación del resultado precedente es que nos permite definir una relación de equivalencia estrechamente relacionada con la conexidad.

Sean  $x$  e  $y$  elementos de  $X$ . Escribiremos  $x \equiv_c y$  si existe un subconjunto conexo de  $X$  que contiene a  $x$  e  $y$ . Esta relación es reflexiva (puesto que  $\{x\}$  es conexo) y simétrica. Afirmamos que es también transitiva. Si  $C$  es un conexo que contiene a  $x$  e  $y$  y si  $D$  es un conexo que contiene a  $y$  y  $z$ ,



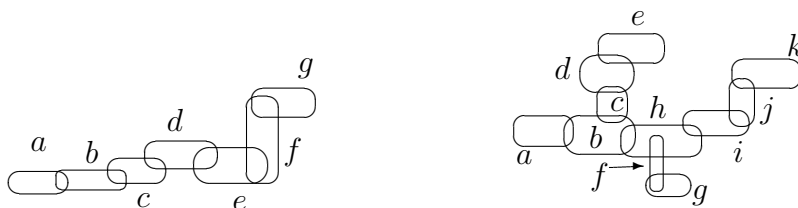


Figure 9.2: Cadenas de subconjuntos conexos que permiten inferir la conexidad del conjunto completo.

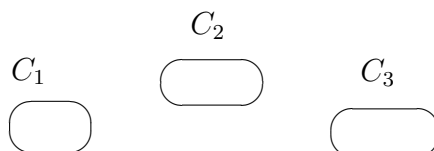


Figure 9.3: Un espacio con 3 componentes conexas.

entonces el conjunto  $C \cup D$  es conexo pues  $y \in C \cap D$ . Se tiene que  $x \equiv_c y$  y  $y \equiv_c z$  implican  $x \equiv_c z$  lo que demuestra la afirmación. Se sigue que  $\equiv_c$  es una relación de equivalencia y por lo tanto define una partición del espacio  $X$  en clases de equivalencia. A las clases de equivalencia de esta relación se le llaman componentes conexas de  $X$ . Si  $x \in X$ , su componente conexa se denota  $C_x$ . Por ejemplo, el espacio de la Figura 9.3, como subespacio de  $\mathbb{R}^2$  tiene 3 componentes conexas.

**Proposición 9.9.** *Una componente conexa de  $X$  es un conjunto conexo maximal de  $X$ .*

**Demostración** Probaremos primero que una componente conexa de  $X$  es conexa. Sea  $C$  la componente conexa de un elemento  $x$  y supongamos que  $C = U \cup W$  donde  $U$  y  $W$  son abiertos disjuntos no vacíos de  $C$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x$  está en  $U$ . Entonces para todo  $y$  en  $C$  existe un conexo  $D$  que contiene a  $x$  e  $y$ . Como  $D$  está contenido en la unión de  $U$  y  $W$  que son abiertos disjuntos, entonces  $D$  debe estar contenido en uno de

ellos. Se sigue que  $y \in D \subseteq U$ . Luego  $W$  es vacío.

Sea ahora  $D$  un conjunto conexo arbitrario en  $X$  y sea  $x$  un punto de  $X$ . Entonces si  $y$  es un punto arbitrario de  $D$ , por definición  $x \equiv_c y$ , de donde  $y$  pertenece a la componente conexa  $C$  de  $x$ . Se sigue que  $D \subseteq C$ .  $\square$

**Corolario 9.9.1.** *Una componente conexa de  $X$  es cerrada.*

**Demostración del corolario.** Basta ver que para toda componente conexa  $C$  su clausura  $\overline{C}$  es conexa. Por la maximalidad, se sigue  $C = \overline{C}$ .  $\square$

**ejemplo 9.10.** Probaremos ahora que cada intervalo en  $\mathbb{R}$  es conexo. Como cada intervalo de la forma  $[a, b]$  es imagen continua de  $[0, 1]$  es conexo. Sea  $I$  un intervalo arbitrario. Sean  $a$  y  $b$  elementos arbitrarios de  $I$ . Sin pérdida de generalidad suponemos  $a < b$ . Entonces  $[a, b]$  es conexo y está contenido en  $I$  por definición de intervalo. Se sigue que  $a$  y  $b$  pertenecen a la misma componente conexa. Como  $a$  y  $b$  eran arbitrarios, el conjunto  $I$  es una componente conexa y por lo tanto es conexo. En particular este resultado demuestra que  $\mathbb{R}$  es conexo.

Un argumento similar al del ejemplo precedente sirve para probar el siguiente resultado:

**Proposición 9.11.** *Si  $X$  es unión de una familia de conjuntos conexos  $\{C_i\}$  de modo que para cada par de elementos  $x$  e  $y$  en  $X$  existe una cadena  $C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$  tal que  $x \in C_{i_1}$ ,  $y \in C_{i_r}$  y cada  $C_{i_t} \cap C_{i_{t+1}}$  es no vacío para  $t = 1, \dots, r - 1$ , entonces  $X$  es conexo.*  $\square$

**Proposición 9.12.** *El producto  $X \times Y$  es conexo si y sólo si lo es cada uno de los espacios  $X$  e  $Y$ .*

**Demostración** Si el producto  $X \times Y$  es conexo entonces lo son  $X$  e  $Y$  ya que son imágenes continuas de  $X \times Y$ . Por otro lado si  $X$  e  $Y$  son conexos, probaremos que dos elementos cualesquiera  $(a, b)$  y  $(c, d)$  en el producto  $X \times Y$  están en la misma componente conexa. Sea  $C = (X \times \{b\}) \cup (\{c\} \times Y)$ . Basta probar que  $C$  es conexo, lo que sigue de que lo es cada uno de los conjuntos  $X \times \{b\}$  y  $\{c\} \times Y$ , mientras que

$$(X \times \{b\}) \cap (\{c\} \times Y) = \{(c, b)\}.$$

$\square$

**ejemplo 9.13.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  es conexo.

**definición 9.14.** Un Espacio Topológico  $X$  se dice localmente conexo si para cada punto  $x$  de  $X$  y cada vecindad  $V$  de  $x$  existe una vecindad conexa  $U$  de  $x$  contenida en  $V$ .

**ejemplo 9.15.** Todo conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  es localmente conexo, puesto que toda bola  $B(\vec{0}; \epsilon)$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  y por lo tanto es conexa.

**Proposición 9.16.** *En un espacio localmente conexo, cada componente conexa es abierta y cerrada.*

**Demostración** La definición de localmente conexo implica que todo punto de un espacio localmente conexo tiene una vecindad conexa. En particular, la componente conexa de un punto  $x$  contiene una vecindad de  $x$ . Como  $x$  es arbitrario, las componentes conexas son abiertas. Como el complemento de una componente conexa es la unión de las componentes restantes, es abierto. Luego las componentes conexas son cerradas.  $\square$

**Corolario 9.16.1.** *Toda componente conexa de un subconjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  es abierta.*  $\square$

## Ejercicios

1. Probar que  $\mathbb{R}_L$ , definido en los ejercicios del capítulo 2, es conexo.
2. Probar que todo subconjunto conexo de  $[0, 1]$  es un intervalo.
3. Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice convexo si para todo  $x, y \in X$  y todo  $\lambda \in [0, d(x, y)]$  existe un elemento  $z \in X$  tal que

$$d(x, z) = \lambda, \quad d(y, z) = d(x, y) - \lambda.$$

Probar que un espacio métrico compacto y convexo es conexo.

4. El orden lexicográfico se define en  $\mathbb{R}^2$  mediante

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c, \text{ o } a = c \text{ y } b \leq d.$$

Encuentre las componentes conexas en la topología definida por ese orden.

5. Sea  $X = \mathbb{R}^2$  con la topología del orden lexicográfico y sea  $Y = \mathbb{R}^2$  con la topología usual. Probar que si  $f : Y \rightarrow X$  es continua con  $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$ , entonces  $f_1$  es constante.

6. Probar que el conjunto

$$\{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left( t, \cos(1/t) \right) \mid 0 < t < \pi \right\}$$

es conexo.

7. Probar que en un conjunto totalmente ordenado que es conexo con la topología del orden, todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo.

8. Probar que todo abierto en  $\mathbb{R}^n$  es localmente conexo.

# Chapter 10

## Espacios arco-conexos

**definición 10.1.** Un espacio topológico  $X$  se dice arco-conexo si para todo par de puntos  $x$  e  $y$  en  $X$  existe una función continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = y$ . La función  $\gamma$  se dice un camino que une  $x$  con  $y$ . El punto  $x = \gamma(0)$  recibe el nombre de extremo inicial del camino, mientras que  $y = \gamma(1)$  recibe el nombre de extremo final. También diremos que  $\gamma$  es un camino de  $x$  hacia  $y$  o que une  $x$  con  $y$ . En lo que sigue, se utilizan también la palabra “curva” como sinónimo de camino, dado que ambos términos suelen ser frecuentes en la literatura. En ocasiones damos el nombre de arco a la imagen  $\gamma[0, 1]$  visto como un espacio topológico. En tal caso requeriremos que  $\gamma$  sea un homeomorfismo con su imagen, dado que incluso el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  es la imagen de una curva.

**ejemplo 10.2.** Un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  es arco-conexo. De hecho, para puntos arbitrarios  $a$  y  $b$  en  $I$  el intervalo  $[a, b]$  está contenido en  $I$  por definición de intervalo, pero este es la imagen de la función

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = a + t(b - a).$$

**ejemplo 10.3.** Un espacio vectorial topológico real, es un espacio vectorial real  $W$  provisto de una topología tal que las funciones

$$\sigma : W \times W \rightarrow W, \quad \sigma(x, y) = x + y,$$

$$\mu : \mathbb{R} \times W \rightarrow W, \quad \mu(r, y) = ry,$$

son continuas. Todo espacio vectorial topológico real  $W$  es arco-conexo, pues dados  $x$  e  $y$  en  $W$ , el punto  $x$  está unido a  $y$  por el camino  $\gamma(t) = x + t(y - x)$ .

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  es un camino que une  $x$  con  $y$ , entonces  $f \circ \gamma$  es un camino que une  $f(x)$  con  $f(y)$ . El siguiente resultado es inmediato a partir de esta observación.

**Proposición 10.4.** *Toda imagen continua de un espacio arco-conexo es arco-conexa.*  $\square$

**Proposición 10.5.** *Todo espacio arco-conexo es conexo.*

**Demostración.** Basta ver que dos puntos cualesquiera de  $X$  están en la misma componente conexa. Para ello, basta ver que dos puntos cualesquiera  $x$  e  $y$  de  $X$  están contenidos en algún conjunto conexo. Sea  $\gamma$  un camino que une  $x$  con  $y$  y sea  $C = \text{Im } \gamma$  su imagen.  $C$  es conexo por ser imagen del intervalo  $[0, 1]$ . Por otro lado

$$x = \gamma(0) \in C, \quad y = \gamma(1) \in C,$$

de donde  $C$  es un conjunto conexo que contiene a  $x$  e  $y$ .  $\square$

Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  se dice arco-conexo si  $A$  es arco-conexo con la topología de subespacio.

**Corolario 10.5.1.** *Si  $A$  es un subconjunto arco-conexo de un espacio topológico  $X$ , y si  $A \subseteq U \cup W$  donde  $U$  y  $W$  son abiertos disjuntos entonces  $A$  está contenido en uno de los abiertos  $U$  o  $W$ .*  $\square$

El siguiente resultado es un caso particular del Lema 5.21 que enunciamos independientemente aquí, dada su importancia.

**Lema 10.6.** *Sea  $Y$  un espacio topológico y sea  $f : [a, b] \rightarrow Y$  una función arbitraria. Sea  $c$  un punto del intervalo  $]a, b[$  y sean  $f_1$  y  $f_2$  las restricciones de  $f$  a  $[a, c]$  y  $[c, b]$  respectivamente. Si  $f_1$  y  $f_2$  son continuas entonces también lo es  $f$ .*

**Lema 10.7.** *Si existe un camino en  $X$  que une  $x$  con  $y$  y un camino que une  $y$  con  $z$ , entonces existe un camino que une  $x$  con  $z$ .*

**Demostración.** Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un camino que une  $x$  con  $y$ , y sea  $\mu : [0, 1] \rightarrow X$  un camino que une  $y$  con  $z$ . Entonces definimos la función  $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$  mediante

$$\lambda(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \mu(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

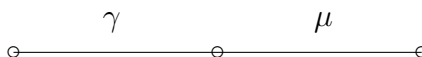


Figure 10.1: Representación gráfica de una yuxtaposición de caminos.

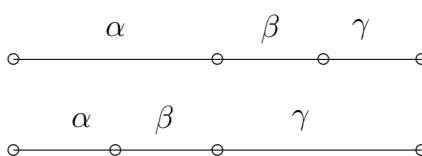


Figure 10.2: Juxtaposiciones sucesivas y ausencia de una ley asociativa.

La función  $\lambda$  está bien definida ya que  $\lambda(1/2) = \gamma(1) = \mu(0)$  y es continua por el lema precedente.  $\square$

El camino definido más arriba se denota  $\gamma * \mu$  y recibe el nombre de yuxtaposición de los caminos  $\gamma$  y  $\mu$ . Es costumbre representarlo graficamente dividiendo el intervalo en subintervalos iguales como en la Figura 10.1. mientras las yuxtaposiciones sucesivas se representan mediante una iteración de este procedimiento. El segmento correspondiente a cada camino  $\phi$  indica que la yuxtaposición se calcula en ese segmento utilizando el camino  $\phi$  (compuesto con una función afin apropiada). Por ejemplo, Si  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\delta$  son tres caminos tales que el extremo final  $\alpha(1)$  de  $\alpha$  coincide con el extremo inicial  $\beta(0)$  de  $\beta$ , y si, del mismo modo,  $\beta(1) = \gamma(0)$ , las yuxtaposiciones  $(\alpha * \beta) * \gamma$  y  $\alpha * (\beta * \gamma)$  están definidas y corresponden a los diagramas de la figura 10.2. Se sigue de dichos diagramas que la yuxtaposición de caminos no es asociativa.

Sean  $x$  e  $y$  elementos de  $X$ . Escribiremos  $x \equiv_a y$  si existe un camino en  $X$  que une a  $x$  con  $y$ .

**Lema 10.8.**  $\equiv_a$  es una relación de equivalencia.

El lema precedente demuestra que esta relación es transitiva. Para ver que la relación es reflexiva, es decir que para cada  $x \in X$  se tiene  $x \equiv_a x$ ,

consideramos el camino constante  $c_x(t) = x$ . Para ver que esta relación es simétrica basta encontrar, dado un camino  $\gamma$  que une  $x$  con  $y$ , un segundo camino que une  $y$  con  $x$ . Este está dado por

$$\gamma^{\text{op}} : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma^{\text{op}}(t) = \gamma(1 - t). \quad \square$$

A las clases de equivalencia de esta relación se le llaman componentes arco-conexas de  $X$ . La componente arco-conexa de un elemento  $x \in X$  se denota  $A_x$ .

**Proposición 10.9.** *Una componente arco-conexa de  $X$  es un conjunto arco-conexo maximal de  $X$ .*

**Demostración** Es inmediato que una componente arco-conexa de  $X$  es arco-conexa por definición. Sea ahora  $D$  un conjunto arco-conexo arbitrario en  $X$  y sea  $x$  un punto de  $D$ . Entonces si  $y$  es un punto arbitrario de  $D$ , existe un camino en  $D$  (y por lo tanto también en  $X$ ) que une  $x$  con  $y$ . Por definición se tiene  $x \equiv_a y$ , de donde  $y$  pertenece a la componente arco-conexa  $A_x$ . Se sigue que  $D \subseteq A_x$ .  $\square$

**ejemplo 10.10.** La bola unitaria  $B(0; 1)$  en  $\mathbb{R}^n$  es arco conexas. Para probar esto basta ver que cada punto  $x$  está en la componente arco conexas de  $0$ , pero se tiene el camino  $\gamma(t) = tx$  que satisface  $\gamma(0) = 0$  y  $\gamma(1) = x$ .

**Proposición 10.11.** *Si  $X$  es unión de una familia de conjuntos arco-conexos  $\{A_i\}$  de modo que para cada par de elementos  $x$  e  $y$  en  $X$  existe una cadena  $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$  tal que  $x \in A_{i_1}$ ,  $y \in A_{i_r}$  y cada  $A_{i_t} \cap A_{i_{t+1}}$  es no vacío para  $t = 1, \dots, r - 1$ , entonces  $X$  es arco-conexo.*

**Demostración** Todos los elementos de un conjunto arco-conexo  $A_i$  están en la misma componente arco-conexa, por lo que la hipótesis implica que existe una única componente conexas.  $\square$

Es posible dar una demostración constructiva del resultado precedente yuxtaponiendo caminos como muestra la figura 10.3. Los detalles se dejan al lector.

**Proposición 10.12.** *El producto  $X \times Y$  es arco-conexo si y sólo si lo es cada uno de los espacios  $X$  e  $Y$ .*



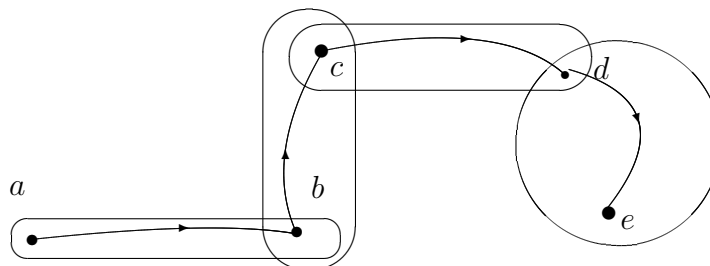


Figure 10.3: Caminos yuxtapuestos en una cadena de subconjuntos arco-conexos.

**Demostración** Si el producto  $X \times Y$  es arco-conexo entonces lo son  $X$  e  $Y$  ya que son imágenes continuas de  $X \times Y$ . Por otro lado si  $X$  e  $Y$  son arco-conexos, probaremos que dos elementos cualesquiera  $(a, b)$  y  $(c, d)$  existe un camino que los une. Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un camino que une  $a$  con  $c$  y sea  $\mu : [0, 1] \rightarrow Y$  un camino que une  $b$  con  $d$ . Entonces el camino  $\lambda : [0, 1] \rightarrow X \times Y$  definido por

$$\lambda(t) = (\gamma(t), \mu(t))$$

satisface lo pedido.  $\square$

**definición 10.13.** Un Espacio Topológico  $X$  se dice localmente arco-conexo si para cada punto  $x$  de  $X$  y cada vecindad  $V$  de  $x$  existe una vecindad arco-conexa  $U$  de  $x$  contenida en  $V$ .

**ejemplo 10.14.** Todo abierto en  $\mathbb{R}^n$  es localmente arco-conexo, ya que toda vecindad de un punto  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  contiene una vecindad de la forma  $B(x; \epsilon)$  que es homeomorfa a  $B(0; 1)$ .

**Proposición 10.15.** En un espacio localmente arco-conexo, cada componente arco-conexa es abierta y cerrada.

**Demostración** La definición de localmente arco-conexo implica que todo punto de un espacio localmente arco-conexo tiene una vecindad arco-conexa. En particular, la componente arco-conexa  $A_x$  de un punto  $x$  contiene una vecindad de  $x$ . Como  $x$  es arbitrario, las componentes arco-conexas

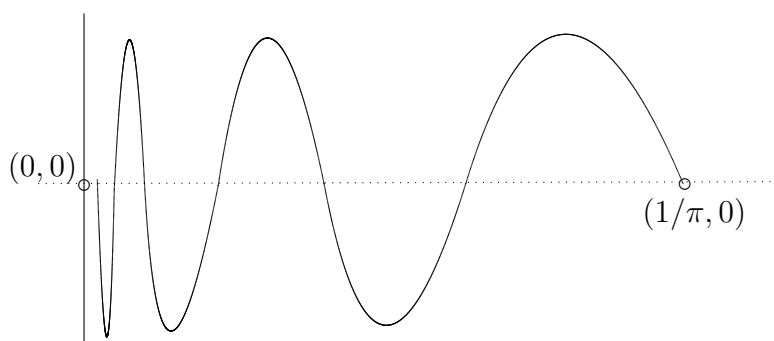


Figure 10.4: Un conjunto conexo que no es arco-conexo.

son abiertas. Como el complemento  $A_x^c$  de una componente arco-conexa es la unión de las componentes restantes, el conjunto  $A_x^c$  abierto. Luego la componente arco-conexa  $A_x$  es cerrada.  $\square$

**Proposición 10.16.** *Un espacio conexo y localmente arco-conexo es arco-conexo.*

**Demostración** Por el resultado precedente, en un espacio localmente arco-conexo las componentes arco-conexas son abiertas y cerradas, pero en un espacio conexo los únicos conjuntos con esa propiedad son el vacío y el espacio completo.  $\square$

**Corolario 10.16.1.** *Un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$  es arco-conexo.*

**ejemplo 10.17.** Consideremos el conjunto siguiente (ver Figura 10.4):

$$A = \{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, \sin(1/t)) \mid 0 < t \leq 1/\pi\}.$$

El subconjunto  $\{(t, \sin(1/t)) \mid 0 < t \leq 1\}$  es conexo por ser una imagen continua de un intervalo. Como este subconjunto es denso en  $A$ , se tiene que

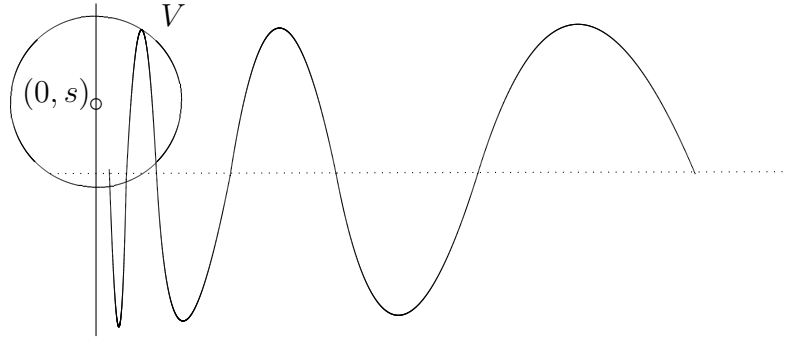


Figure 10.5: Una vecindad no conexa.

$A$  es conexo. Probaremos que  $A$  no es arco-conexo. Sea  $\alpha$  un camino que une  $(0, 0)$  con  $(1/\pi, 0)$ . Se sigue que  $\alpha^{-1}(\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\})$  es cerrado. En particular, contiene a su supremo  $t_0$ . Sea  $s$  tal que  $\alpha(t_0) = (0, s)$ . Sea  $V$  una vecindad de  $(0, s)$ . Como  $\alpha$  es continua en  $t_0$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\alpha\left((t_0, t_0 + \epsilon)\right) \subseteq V.$$

Se sigue que la componente arco-conexa de  $(0, s)$  en  $A \cap V$  contiene a  $\alpha(t_0 + \epsilon)$  el cual no pertenece a  $\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\}$ . Sin embargo, para una vecindad lo bastante pequeña de  $(0, s)$ , la componente arco-conexa de  $(0, s)$  en  $A \cap V$  es  $\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cap V$  (ver Figura 10.5).

Una manera de probar que la componente conexa es  $\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cap V$  es observar que la proyección de  $A \cap V$  en el eje  $X$  no contiene ningún punto  $t$  tal que  $(t, \sin(1/t)) \notin V$  y recordar los siguientes hechos:

1. Para  $V$  suficientemente pequeño, existe una sucesión  $\{t_n\}_n$  que converge a 0 tal que  $(t_n, \sin(1/t_n)) \notin V$ .
2. La imagen de un conjunto conexo es conexa.

3. Los únicos conjuntos conexos en  $\mathbb{R}$  son los intervalos.

Los detalles se dejan al lector.

### Ejercicios

1. Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $x$  e  $y$  dos puntos con las mismas vecindades. Probar que  $x$  e  $y$  están en la misma componente arco-conexa.
2. Probar que el conjunto

$$\{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left( t, \cos(1/t) \right) \mid 0 < t < \pi \right\}$$

no es arco-conexo.

3. Sea  $X$  un conjunto bien ordenado incontable con un último elemento  $\omega_1$  y tal que para cada elemento  $\lambda$  en  $X$  distinto de  $\omega_1$ , el conjunto de puntos que anteceden a  $\lambda$  es numerable. Sea  $Y$  el espacio que se obtiene al identificar cada par de puntos consecutivos de  $X$  con los extremos correspondientes de un intervalo. El espacio  $Y$  se conoce como la recta larga con un punto final. Determine las componentes conexas y arco-conexas de  $Y$ .
4. Sea  $X = \{0, 1\}$  con la topología de Sierpinski  $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ . encuentre las componentes arco-conexas de  $X$ .

# Chapter 11

## Espacios totalmente desconexos

Un espacio  $X$  se dice totalmente desconexo si sus componentes conexas son puntos. En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de tales espacios.

**Proposición 11.1.** *Todo subconjunto  $A$ , con más de un punto, de un espacio totalmente desconexo es desconexo.*

**Demostración.** Un subconjunto conexo está contenido en la componente conexa de cada uno de sus puntos.  $\square$

**Corolario 11.1.1.** *Para cada subconjunto  $A$ , en un espacio totalmente desconexo  $X$ , existen abiertos  $U$  y  $V$  en  $X$ , tales que:*

1.  $A \subseteq U \cup V$ .
2.  $A \cap U \neq \emptyset$  y  $A \cap V \neq \emptyset$ .
3.  $A \cap U \cap V = \emptyset$ .

Un concepto útil a la hora de estudiar espacios desconexos es el concepto de cuasi-componente. Para cada punto  $x \in X$ , su cuasicomponente  $Q(x)$  se define como la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de  $X$  que contienen a  $x$ . Si denotamos por  $\text{Cl}(X)$ , la colección de todos los subconjuntos de  $X$  que son a la vez abiertos y cerrados, se tiene

$$Q(x) = \bigcap_{\substack{x \in C \\ C \in \text{Cl}(X)}} C.$$

**Proposición 11.2.** *Toda cuasicomponente es un subconjunto cerrado.*

**Demostración.** Por definición, la cuasicomponente es intersección de subconjuntos cerrados.  $\square$

**Proposición 11.3.** *En un espacio topológico arbitrario  $X$ , la cuasicomponente  $Q(x)$  de un punto  $x \in X$  contiene a su componente conexa  $C(x)$ .*

**Demostración.** La componente conexa es conexa, y por lo tanto debe estar contenida en cualquier subconjunto  $C \subseteq X$ , que contiene a  $x$ , y que es a la vez abierto y cerrado. En caso contrario podríamos escribir

$$C(x) = \left( C \cap C(x) \right) \cup \left( C^c \cap C(x) \right)$$

y cada uno de estos conjuntos sería un abierto no trivial de  $C(x)$ .  $\square$

**Proposición 11.4.** *En un espacio compacto, la cuasicomponente  $Q(x)$  de un punto coincide con su componente conexa  $C(x)$ .*

**Demostración.** Como la componente conexa  $C(x)$  es el mayor subconjunto conexo que contiene a  $x$ , es suficiente probar que  $Q(x)$  es conexa. Supongamos que este no es el caso, y de hecho se tiene  $Q(x) = A \cup B$  donde  $A$  y  $B$  son simultaneamente abiertos y cerrados no triviales en  $Q(x)$ , con  $A \cap B = \emptyset$ . Para fijar ideas, digamos que  $x \in A$ . En particular,  $A$  y  $B$  son cerrados en el espacio ambiente  $X$ . Como un espacio compacto es normal, existen conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  tales que  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Como  $(U \cup V)^c \subseteq Q(x)^c$  es compacto, el cubrimiento

$$(U \cup V)^c \subseteq \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \in \text{Cl}(X)}} C^c$$

tiene un sub-cubrimiento finito, es decir

$$(U \cup V)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i^c = \left( \bigcap_{i=1}^n C_i \right)^c.$$

Sea  $C = \bigcap_{i=1}^n C_i$ . Nótese que  $C$  es a la vez abierto y cerrado. Como  $(U \cup V)^c \subseteq C^c$ , se tiene  $C \subseteq U \cup V$ . Además  $Q(x) \subseteq C$  por ser  $C$  abierto y cerrado. Definamos  $U' = C \cap U$  y  $V' = C \cap V$ . Afirmamos que cada uno de esos conjuntos es a la vez abierto y cerrado. Como  $A \cap V' \subseteq U \cap V = \emptyset$ ,

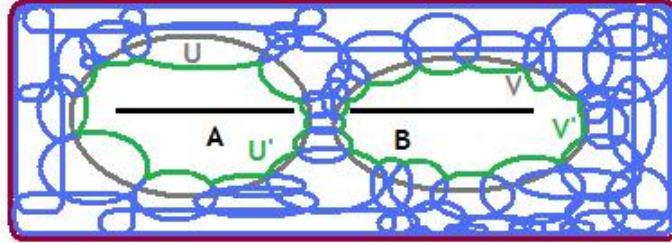


Figure 11.1: La estrategia para la demostración de la Proposición 11.4.

concluimos que  $A \subseteq U'$ , y del mismo modo  $B \subseteq V'$ . Dado que  $x \in A \subseteq U'$ , la definición de cuasi-componente nos dice que  $Q(x) \subseteq U'$ , lo que implica que  $B = \emptyset$ , contradiciendo la hipótesis.

Para probar la afirmación, observamos que  $U'$  es intersección de dos conjuntos abiertos, por lo que es abierto, y nos basta, entonces, probar que es cerrado. Si  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red en  $U'$  que converge a un punto  $a$  de  $X$ , entonces  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es de hecho una red en  $C$  que es un conjunto cerrado, por lo que  $a$  está en  $C$ . Si  $a \in V'$ , entonces  $a_\lambda \in V'$  para  $\lambda$  suficientemente grande, pues este último conjunto es abierto, lo que nos lleva a una contradicción. Debemos suponer, por lo tanto, que  $a$  está en  $U'$ .  $\square$

La Figura 11.1 muestra la estrategia utilizada en la demostración del resultado anterior. En ella se recubre el exterior de los círculos grises que representan a  $U$  y  $V$  por círculos azules, para finalmente remplazar los círculos grises por las figuras acotadas en verde, es decir  $U'$  y  $V'$ .

**Corolario 11.4.1.** *En un espacio compacto totalmente desconexo, las cuasi-componentes son puntos.*

**Corolario 11.4.2.** *En un espacio compacto totalmente desconexo, para cada par de puntos  $(x, y)$ , existe un conjunto abierto y cerrado  $C$  que contiene a  $x$  pero no a  $y$ .*

El resultado anterior suele expresarse diciendo que en un espacio compacto totalmente desconexo, los conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados separan puntos. Esto significa que un punto está totalmente determinado por la colección de conjuntos a la vez abiertos y cerrados a los que pertenece.

**Proposición 11.5.** *En un espacio compacto y totalmente desconexo, cada punto tiene una base de vecindades formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

**Demostración** Sea  $X$  un espacio compacto y totalmente desconexo. Sea  $x \in X$ , y sea  $U$  una vecindad de  $x$ . Basta ver que existe un conjunto  $C$ , a la vez abierto y cerrado, que satisface  $x \in C \subseteq U$ . Para cada punto  $y \in U^c$  existe un conjunto abierto y cerrado  $C_y$  tal que  $x \in C_y$ , pero  $y \notin C_y$ . Como  $U^c$  es compacto, el cubrimiento

$$U^c \subseteq \bigcup_{y \in U^c} C_y^c$$

tiene un sub-cubrimiento finito, digamos

$$U^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_{y_i}^c = \left( \bigcap_{i=1}^n C_{y_i} \right)^c.$$

Definimos  $C = \bigcap_{i=1}^n C_{y_i}$ . Entonces  $C$  es un conjunto abierto y cerrado que satisface  $U^c \subseteq C^c$ , y por lo tanto  $C \subseteq U$ .  $\square$

**Corolario 11.5.1.** *En un espacio compacto totalmente desconexo, existe una base de la topología formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Necesitamos una versión mas precisa de este último resultado para espacios segundo contables.

**Lema 11.6.** *Sea  $\mathfrak{B}$  una base de una topología  $\mathbb{T}$  en un espacio  $X$ , de modo que  $(X, \mathbb{T})$  es segundo contable. Entonces existe una base numerable  $\mathfrak{B}'$  de  $\mathbb{T}$  contenida en  $\mathfrak{B}$ .*

**Demostración** Sea  $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$  una base numerable de  $\mathbb{T}$ . Sea  $\Omega$  la colección de pares  $(i, j)$  de números naturales tales que existe  $B \in \mathfrak{B}$  tal que  $C_i \subseteq B \subseteq C_j$ . Para cada par  $(i, j) \in \Omega$  escogemos  $B_{i,j}$  tal que  $C_i \subseteq B_{i,j} \subseteq C_j$ . Sea

$$\mathfrak{B}' = \{B_{i,j} \mid (i, j) \in \Omega\}.$$

Claramente  $\mathfrak{B}'$  es numerable. Probaremos que es una base. Basta ver que cada elemento  $C_j \in \mathfrak{C}$  es unión de elementos de  $\mathfrak{B}'$ . Para cada  $y \in C_j$ ,



existe  $B \in \mathfrak{B}$  tal que  $y \in B \subseteq C_j$ . Como  $\mathfrak{C}$  es base, existe  $C_i \in \mathfrak{C}$  tal que  $y \in C_i \subseteq B$ . Se sigue que  $(i, j) \in \Omega$  y por lo tanto  $B_{i,j}$  está definido, luego  $y \in C_i \subseteq B_{i,j} \subseteq C_j$ . Se concluye que

$$C_j = \bigcup_{\substack{i \in \Omega_j \\ B_{i,j} \subseteq C_j}} B_{i,j},$$

donde  $\Omega_j = \{i \in \mathbb{N} \mid (i, j) \in \Omega\}$ .  $\square$

**Corolario 11.6.1.** *En un espacio compacto, segundo contable y totalmente disconexo, existe una base numerable de la topología formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Utilizaremos este resultado para caracterizar topológicamente al conjunto de Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Antes de pasar a la demostración, recordemos que una colección de subconjuntos, de un conjunto dado  $X$ , es un álgebra booleana, o más precisamente una subálgebra booleana del álgebra  $\wp(X)$  de subconjuntos de  $X$ , si es cerrada bajo uniones, intersecciones y complementos. Para estudiar esta álgebra, es extremadamente práctico el uso de funciones características. Recuérdese que la función característica  $\chi_A$  se define por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Estas funciones tienen las propiedades  $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$  y  $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ . De estas identidades se deduce mediante un cálculo directo que

$$\chi_{A \cup B} = \chi_{(A^c \cap B^c)^c} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B},$$

por lo que, si  $A$  y  $B$  son conjuntos disjuntos, se tiene  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ . De lo anterior, es fácil ver que el álgebra booleana generada por una colección  $\{A_1, \dots, A_n\}$  consiste, precisamente, en aquellos conjuntos  $E$  cuya función característica está en el anillo generado por  $\{\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}\}$ . En particular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $E$  pertenece al álgebra booleana generada por  $\{A_1, \dots, A_n\}$ .
- La función característica  $\chi_E$  es un polinomio en las funciones  $\chi_{A_i}$  con  $1 \leq i \leq n$ .

- La función característica  $\chi_E$  es una suma de términos de la forma  $\chi_{B_1} \cdots \chi_{B_n}$  con  $B_i = \{A_i, A_i^c\}$  para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ .
- $E$  es una unión disjunta de conjuntos de la forma  $B_1 \cap \cdots \cap B_n$  con  $B_i = \{A_i, A_i^c\}$  para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ .
- Toda la información necesaria para determinar si un elemento  $x \in X$  pertenece o no a  $E$  está contenida en la colección de subíndices  $j$  para los cuales  $x$  pertenece a  $A_j$ .

Las demostraciones de esta equivalencia, que se deja al lector, se simplifica bastante si se trabaja todo el tiempo con coeficientes en el cuerpo  $\mathbb{F}_2$  con dos elementos. Para pasar de la segunda a la tercera, basta observar que  $1 = \chi_{A_i} + \chi_{A_i^c}$  para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ .

**Proposición 11.7.** *Un espacio topológico compacto, totalmente desconexo, segundo contable, es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .*

**Demostración** Sea  $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sub-base numerable de la topología de  $X$  formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados<sup>1</sup>. En particular, la colección  $\mathfrak{C}$  separa puntos. Se sigue que la función

$$\psi : X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \psi_i(x) = \chi_{C_i}(x),$$

donde  $\chi_C$  es la función característica del subconjunto  $C \subseteq X$ , es inyectiva. Nótese que la función característica de un conjunto que es a la vez abierto y cerrado es continua. Como cada coordenada de  $\psi$  es continua, también lo es la función  $\psi$  misma por la propiedad universal del producto. El resultado sigue, dado que  $X$  es compacto y  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  es Hausdorff.  $\square$

**Proposición 11.8.** *Todo espacio topológico compacto  $X$ , totalmente desconexo, segundo contable, sin puntos abiertos, es homeomorfo al conjunto de cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .*

---

<sup>1</sup>Una base numerable funciona aquí, pero lo haremos con mayor generalidad para su uso en la próxima demostración.

**Demostración** Es suficiente escoger la familia  $\mathfrak{C}$  de la demostración precedente para hacer la función  $\psi$  epiyectiva. Es decir, para cada  $\epsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , queremos que exista  $x \in X$  tal que  $\psi(x) = \epsilon$ . Nótese que

$$\psi^{-1}(\epsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \psi^{-1}(U_{n,\epsilon}),$$

donde  $U_{n,\epsilon}$  es el abierto formado por todos los puntos en  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  cuyas  $n$  primeras coordenadas coinciden con las de  $\epsilon$ . En otras palabras, para determinar si un elemento dado  $x \in X$  pertenece o no a un conjunto  $\psi^{-1}(U_{n,\epsilon})$ , basta evaluar si pertenece o no a los primeros  $n$  conjuntos de la familia  $\mathfrak{C}$ . Toda intersección finita y no vacía de conjuntos de la forma  $U_{n,\epsilon}$  es un conjunto del mismo tipo. De hecho, se tiene

$$\bigcap_{k=1}^N U_{n_k, \epsilon_k} = U_{n_s, \epsilon_s}, \text{ donde } n_s = \max_{k=1}^N n_k,$$

si tal intersección es no vacía. En particular, la colección  $\{\psi^{-1}(U_{n,\epsilon}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  tiene la propiedad de la intersección finita si y sólo si  $\psi^{-1}(U_{n,\epsilon}) \neq \emptyset$  para cada entero positivo  $n$ . Como cada conjunto  $U_{n,\epsilon}$  es cerrado, la compacidad de  $X$  implica que, para una función continua  $\psi$  con esta última propiedad, cada pre-imagen  $\psi^{-1}(\epsilon)$  será no vacía, y por lo tanto  $\psi$  será epiyectiva.

Ahora, definimos la familia  $\mathfrak{C}$  de forma recursiva. Para ello, asumimos la existencia de una familia  $\mathfrak{C}' = \{C'_1, C'_2, \dots\}$  pre-existente, digamos una base numerable de conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Si  $C'_1 \notin \{X, \emptyset\}$ , definimos  $C_1 = C'_1$ . En caso contrario escogemos  $C'_2$  o  $C'_3$ , el primero que es un subconjunto no trivial. Tomamos ahora la función  $\psi_1 = \chi_{C_1}$ . Habiendo definido  $C_1, \dots, C_n$ , y las correspondientes funciones características  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , necesitamos definir el siguiente conjunto  $C_{n+1}$  con su respectiva función característica  $\psi_{n+1}$ . Sea  $\phi_n = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ . Asumimos que, por hipótesis de inducción, para cada cualquier elemento  $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$  el conjunto  $\psi_n^{-1}(\varepsilon)$  es no vacío. Es necesario definir  $C_{n+1}$ , de modo que exista, para cada elemento  $\varepsilon' \in \{0, 1\}^{n+1}$ , al menos un elemento en  $\phi_{n+1}^{-1}(\varepsilon')$ . En otras palabras, para cualquier valor de  $\varepsilon$ , deben existir elementos  $x \in X$  con  $\phi_n(x) = \varepsilon$  y  $\psi_{n+1}(x) = 0$ , así como elementos  $x \in X$  con  $\phi_n(x) = \varepsilon$  y  $\psi_{n+1}(x) = 1$ . Para conseguir esto, es necesario definir el conjunto  $C_{n+1}$  como una unión

$$C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^n} V_{n+1, \varepsilon_i}, \quad \text{con } \{0, 1\}^n = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2^n}\},$$

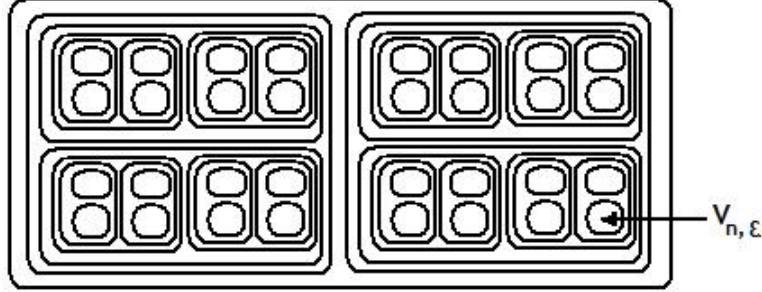


Figure 11.2: Los conjuntos anidados de la demostración de la Proposición 11.8.

donde tanto  $V_{n+1, \epsilon_i} \subseteq \phi_n^{-1}(\epsilon_i)$  como  $\phi_n^{-1}(\epsilon_i) \setminus V_{n+1, \epsilon_i}$  sean no vacíos. Esto significa que los conjuntos  $V_{n, \epsilon}$  deben estar anidados como se muestra en la Figura 11.2. Esto siempre puede hacerse, ya que los conjuntos  $\phi_n^{-1}(\epsilon_i)$  son abiertos, por lo que deben tener más de un punto, y pueden separarse en dos conjuntos que sean a la vez abiertos y cerrados, dado que  $X$  es totalmente desconexo.

Queda una condición adicional, y es que hay que asegurarse de que la función  $\psi$  resulte inyectiva. Es decir, debemos asegurarnos de que no habrá dos puntos con la misma imagen. En otras palabras, debemos asegurarnos de que este proceso separe, eventualmente, cada par de puntos del espacio  $X$ . Es por estos que se asume que la familia  $\mathfrak{C}$  es una sub-base. Una manera de conseguir esto es asegurarse de que, eventualmente, cada uno de los conjuntos  $C'_k$  de la base original pertenecen al álgebra booleana generada por  $C_1, \dots, C_n$ . Así, en cada paso, escogemos el primer  $C'_k$ , con  $k = k(n)$ , que no pertenece al álgebra booleana generada por los conjuntos  $C_1, \dots, C_n$  ya definidos. Escogemos ahora los conjuntos  $V_{n, \epsilon}$ , como arriba, asumiendo la siguiente hipótesis:

Si  $C'_k \cap \phi_n^{-1}(\epsilon_i)$  y  $C'_k \cap \phi_n^{-1}(\epsilon_i)^c$  son ambos no vacíos, entonces asumimos  $V_{n+1, \epsilon_i} = C'_k \cap \phi_n^{-1}(\epsilon_i)$ .

Nótese que, cuando uno de esos conjuntos es vacío, la intersección  $C'_k \cap \phi_n^{-1}(\epsilon_i)$  se encuentra ya en el álgebra booleana generada por los conjuntos  $C_1, \dots, C_n$ . Por esta razón, la condición nos permite asumir que  $C'_k = \bigcup_{\epsilon \in \{0,1\}^n} C'_k \cap$

$\phi_n^{-1}(\varepsilon)$  pertenece al álgebra booleana generada por  $C_1, \dots, C_{n+1}$ , de donde  $\mathfrak{C}$  es una sub-base. El resultado sigue.  $\square$

### Ejercicios

1. Probar que el producto de dos espacios totalmente desconexos es totalmente desconexo.
2. Sea  $X$  un espacio compacto y sea  $\sim$  la relación *están en la misma componente conexa*. Probar que  $X/\sim$  es un espacio compacto totalmente desconexo.
3. Probar que  $\mathbb{R}_l$ , definido como en los ejercicios del capítulo 2 es totalmente desconexo.
4. Sea  $X$  un espacio compacto totalmente desconexo. Sea  $x \in X$  y sea  $Q$  la quasi-componente de  $x$ . Probaremos en este ejercicio que  $Q = \{x\}$  utilizando el Lema de Uryson.
  - (a) Probar que si  $Q$  tiene más de un punto, entonces  $Q = U \cup V$  con  $U$  y  $V$  compactos no vacíos disjuntos.
  - (b) Probar que existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  que vale 0 en  $U$  y 1 en  $V$ .
  - (c) Sea  $B = f^{-1}[1/5, 4/5]$ . Probar que  $B$  es un compacto que no corta a  $Q$  y que existe un conjunto abierto y cerrado  $A$  que contiene a  $B$  y no corta  $Q$ .
  - (d) Probar que existe una función continua  $h : X \rightarrow [0, 1]$  que vale 0 en  $U$  y 1 en  $V$  y cuya imagen está contenida en  $[0, 1/5] \cup [4/5, 1]$ .
  - (e) Utilizar lo anterior para llegar a una contradicción.
5. Sea  $X$  un espacio compacto totalmente desconexo. Probar que  $X$  es homeomorfo a un subespacio de un producto del tipo  $\prod_{i \in I} \{0, 1\}$ .
6. Sea  $X$  un espacio compacto, y sea  $C = C_x$  la componente conexa de  $x \in X$ . Sea  $U$  un abierto que contiene a  $C$ . Probar que existe un conjunto  $D$ , simultaneamente abierto y cerrado, tal que  $C \subseteq D \subseteq U$ .

# Chapter 12

## Grupos Topológicos

Sea  $X$  un conjunto y sea “ $\cdot$ ” una operación en  $X$  que hace del par  $(X, \cdot)$  un grupo. Sea  $\mathcal{O}$  una topología en  $X$  tal que las funciones  $\pi : X \times X \rightarrow X$  e  $\mathcal{I} : X \rightarrow X$  definidas por  $\pi(x, y) = x \cdot y$  e  $\mathcal{I}(x) = x^{-1}$  son continuas. Entonces  $G = (X, \cdot, \mathcal{O})$  se dice un grupo topológico. Como es habitual confundiremos  $G$  con  $X$  en lo sucesivo para ahorrar notación. Es decir, diremos a menudo  $G = (G, \cdot, \mathcal{O})$ , sin que esto genere confusión, en tanto la operación de grupo y la topología sean claras del contexto.

### Ejemplos.

1. El conjunto de los números reales con la suma y la topología usuales es un grupo topológico. Este grupo es denotado indistintamente por  $\mathbb{R}$  o bien por  $(\mathbb{R}, +, \mathcal{O})$ , donde  $\mathcal{O}$  es la topología usual.
2. Un grupo  $G$  cualquiera es un grupo topológico con la topología discreta. De hecho, si  $G$  es discreto entonces  $\mathcal{I}$  es continua, dado que toda función de un espacio discreto a un espacio arbitrario es continua. Además, si  $G$  es discreto entonces  $G \times G$  es discreto, por lo que  $\pi$  es continua.
3.  $G$  un grupo cualquiera con la topología indiscreta es un grupo topológico. De hecho,  $\pi$  y  $\mathcal{I}$  toman valores en  $G$  y si  $G$  es indiscreto entonces ambas son continuas, dado que toda función de un espacio arbitrario a un espacio indiscreto es continua.
4. Sea  $G = \mathbb{R}$  con la suma usual y la topología cofinita. Entonces  $G$  no

es grupo topológico. De hecho,  $0$  es cerrado pero:

$$\pi^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\},$$

y este último conjunto no es cerrado en el producto, por lo que  $\pi$  no es continua.

**Proposición 12.1.** *Sea  $G$  un grupo topológico. Sea  $e$  el neutro de  $G$ . Si  $\{e\}$  es cerrado en  $G$ , entonces  $G$  es un espacio de Hausdorff.*

**Demostración:** Sea  $f : G \times G \rightarrow G$  tal que  $f(x, y) = \pi(\mathfrak{J}(x), y) = x^{-1}y$ . Tenemos que, como  $f$  es continua, entonces

$$f^{-1}(e) = \Delta = \{(x, x) \mid x \in G\},$$

debe ser cerrado en  $G \times G$ , lo que es cierto si y sólo si  $G$  es un espacio de Hausdorff.  $\square$

**Corolario 12.1.1.** *Sea  $G$  un grupo topológico. Si  $G$  es un espacio  $T_1$ , entonces  $G$  es un espacio de Hausdorff.*

**Demostración:** Si  $G$  es  $T_1$  entonces  $\{e\}$  es cerrado por lo que aplicamos el resultado precedente.  $\square$

**definición 12.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Se dice que  $X$  es *homogéneo* si, para cualquier par  $(x, y)$  de elementos de  $X$ , existe un homeomorfismo  $f_{(x,y)} : X \rightarrow X$  tal que  $f_{(x,y)}(x) = y$ .

Notar que si un espacio  $X$  es homogéneo y si  $V$  es una vecindad de un punto  $x \in X$ , entonces para todo  $y$  se tiene que  $f_{(x,y)}(V)$  es una vecindad de  $y$  homeomorfa a  $V$ . Además, si un espacio homogéneo contiene un punto cerrado, entonces todo punto del espacio es cerrado, por lo que el espacio es  $T_1$ . Análogamente, si existe un punto abierto, todo punto es abierto, luego el espacio es discreto.

**Proposición 12.3.** *Si  $G$  es un grupo topológico, entonces  $G$  es un espacio homogéneo.*

**Demostración:** Dados  $x, y \in G$ , sea  $f : G \rightarrow G$  tal que  $f(z) = yx^{-1}z$  para todo  $z \in G$ . Dicha función es continua para todo  $x$  y para todo  $y$ . La función  $g : G \rightarrow G$  tal que  $g(z) = xy^{-1}z$  es continua y tenemos que

$$g(f(z)) = xy^{-1}(yx^{-1}z) = xx^{-1}z = z = yy^{-1}z = yx^{-1}(xy^{-1}z) = f(g(z)),$$

para todo  $z$  en  $G$ , por lo que ambas funciones son inversas, de donde  $f$  es un homeomorfismo. Además se cumple que  $f(x) = yx^{-1}x = y$ .  $\square$

**Corolario 12.3.1.** *Si  $G$  tiene un punto abierto, entonces  $G$  es discreto.*

De las proposiciones 12.1 y 12.3 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 12.3.2.** *Para un grupo topológico  $G$ , cuyo neutro es  $e$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $G$  tiene un punto cerrado,
2.  $\{e\}$  es cerrado en  $G$ ,
3.  $G$  es un espacio  $T_1$ ,
4.  $G$  es un espacio de Hausdorff,

son equivalentes.

Sea  $G$  un grupo topológico y sea  $H$  subgrupo de  $G$ . Podemos tomar en  $H$  la topología de subespacio, con la cual  $H$  es a su vez un grupo topológico. Diremos que  $H$  es subgrupo topológico de  $G$  y escribiremos  $H \leq G$ . Si  $H$  es normal en  $G$  entonces denotamos  $H \trianglelefteq G$ .

**Proposición 12.4.** *Sea  $G$  un grupo topológico y sea  $H \leq G$  entonces  $\bar{H} \leq G$ . Si  $H \trianglelefteq G$  entonces  $\bar{H} \trianglelefteq G$ .*

**Demostración:** Sean  $g, h \in \bar{H}$  entonces

$$(g, h) \in \bar{H} \times \bar{H} = \overline{H \times H}.$$

Por lo tanto, existe una red  $(x_i)_{i \in \Lambda}$  en  $H \times H$  tal que  $x_\lambda \rightarrow (g, h)$ . Para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Es decir, existen redes  $g_\lambda$  y  $h_\lambda$  en  $H$  para las que  $x_\lambda = (g_\lambda, h_\lambda)$  y tenemos, simultáneamente, que  $g_\lambda \rightarrow g$  y  $h_\lambda \rightarrow h$ .



Como  $H$  es subgrupo, para todo índice  $\lambda$  se cumple que ambos,  $g_\lambda h_\lambda$  y  $g_\lambda^{-1}$ , están en  $H$ . Como el producto y la inversa son continuas,  $g_\lambda h_\lambda \rightarrow gh$ , por lo que  $gh \in \bar{H}$ , y  $g_\lambda^{-1} \rightarrow g^{-1}$ , por lo que  $g^{-1} \in \bar{H}$ . Se sigue que  $\bar{H} \leq G$ . Si  $H$  es normal, entonces para cualquier  $x \in G$ , la red  $\{xh_\lambda x^{-1}\}$  está en  $H$ , luego su límite  $xhx^{-1}$  está en  $\bar{H}$ .  $\square$

Un importante subgrupo es  $E = \overline{\{e\}}$ . Este es un subgrupo normal y cerrado de  $G$ . Este es el menor subgrupo cerrado de  $G$ , ya que todo subgrupo debe contener a la identidad.

**Proposición 12.5.** *Sean  $x$  e  $y$  elementos del grupo topológico  $G$  y sea  $E$  la clausura de la identidad. Entonces  $x$  está contenido en cada vecindad de  $y$  si y sólo si  $yx^{-1} \in E$ .*

**Demostración:** Basta ver que  $x$  está contenido en cada vecindad de  $y$  si y sólo si  $y$  está en la clausura de  $x = ex$ , la que es igual a  $Ex$  por ser  $u \mapsto ux$  un homeomorfismo. El resultado es ahora inmediato.  $\square$

Una vecindad  $V$  de  $e$  se dice simétrica si  $V = V^{-1} = \{x^{-1} | x \in V\}$ . Si  $U$  es una vecindad arbitraria de  $e$ , entonces  $U \cap U^{-1}$  es una vecindad simétrica contenida en  $U$ , por lo que la identidad tiene una base formada por vecindades simétricas en todo grupo topológico.

Recuérdese que la  $T_0$ -identificación de un espacio topológico  $X$  es el espacio que se obtiene al identificar cada par de puntos de  $X$  que tengan exactamente las mismas vecindades. Este no es en general un espacio  $T_1$ , pero sí lo es cuando la relación “ $x$  está en cada vecindad de  $y$ ” es simétrica. Esto es inmediato en el caso de grupos topológicos, ya que la relación  $y \in Ex$  es simétrica, por ser  $E$  un subgrupo. El siguiente resultado es ahora inmediato:

**Corolario 12.5.1.** *La clase de  $x$  en la  $T_0$ -identificación de  $G$  es la clase lateral  $Ex$ .*

Se sigue que si  $G$  es un espacio  $T_0$ , entonces  $E = \{e\}$ . En particular, tenemos el resultado siguiente:

**Corolario 12.5.2.** *Todo grupo topológico  $T_0$  es un espacio  $T_1$ .*

Lo que junto al Corolario 12.1.1 nos da lo siguiente:

**Corolario 12.5.3.** *Todo grupo topológico  $T_0$  es un espacio de Hausdorff.*

Si  $E = G$ , entonces la  $T_0$ -identificación de  $G$  consta de un sólo punto. En este caso la topología de  $G$  es indiscreta. En particular, tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 12.5.4.** *Si  $E = \{e\}$  es denso entonces  $G$  es indiscreto.*

Al utilizar la homogeneidad de los grupos topológicos se obtiene:

**Corolario 12.5.5.** *Si  $G$  tiene un punto denso entonces es indiscreto.*

**Observación:** Si  $G$  es grupo topológico con neutro  $e$  y  $H \leq G$  entonces podemos ver lo siguiente:

1. Si existe una vecindad  $V$  de  $e$  tal que  $V \subseteq H$ , entonces para todo  $h \in H$  el producto  $hV$  es vecindad de  $h$  y  $hV \subseteq H$  por lo que  $H$  es abierto en  $G$ .
2. Sea  $g \in G$ . Como  $x \rightarrow gx$  es homeomorfismo, entonces para todo  $H \leq G$  se cumple que:
  - $H$  es cerrado en  $G$  si y sólo si  $gH$  es cerrado en  $G$ .
  - $H$  es abierto en  $G$  si y sólo si  $gH$  es abierto en  $G$ .
3. Si  $H$  es abierto en  $G$ , entonces cada clase lateral  $gH$  es abierta en  $G$ . En particular  $H^c = \bigcup_{g \notin H} gH$  es abierto en  $G$ , por lo que  $H$  es también cerrado en  $G$ .

Dado un espacio topológico  $X$  y un elemento  $x$  de  $X$  llamaremos  $X_x$  a la componente conexa de  $x$  en  $X$ .

**Proposición 12.6.** *Sea  $G$  un grupo topológico con neutro  $e$ . Entonces  $G_e \trianglelefteq G$ .*

**Demostración:** Como todo producto de espacios conexos es conexo, se tiene que  $G_e \times G_e$  es conexo. Como  $\pi$  es continua, se tiene que  $\pi(G_e \times G_e)$  es conexo. Ahora bien, como  $\pi(e, e) = e$ , lo anterior implica que  $\pi(G_e \times G_e) \subseteq G_e$ . El razonamiento para la inversa es similar y se deja al lector. Concluimos que  $G_e \subseteq G$  es un subgrupo.

Ahora bien, dado  $g \in G$  definimos  $f_g : G \rightarrow G$  mediante  $f_g(x) = g^{-1}xg$ . La función  $f_g$  así definida es continua y satisface  $f_g(e) = g^{-1}eg = e$ . Concluimos que  $g^{-1}G_e g = f_g(G_e) \subseteq G_e$ . El resultado sigue.  $\square$

Una observación similar es válida para la componente arcoconexa, ya que si  $\gamma(t)$  es un camino que une  $x$  e  $y$ , la función  $t \mapsto g\gamma(t)$  define un camino que une  $gx$  con  $gy$ . Dejamos los detalles al lector.

**Ejemplos.**

1.  $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  es grupo topológico y  $G_1 = \mathbb{R}^+$  es el subgrupo de números reales positivos.
2. Sea  $G = GL_n(\mathbb{R})$ , y sea  $I_n$  la matriz identidad, entonces dejamos como ejercicio para el lector probar que:

$$G_{I_n} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}.$$

Sugerencia: Usar la forma de Jordan real.

**definición 12.7.** Sean  $G, G'$  dos grupos topológicos, y sea  $\phi : G \rightarrow G'$  isomorfismo de grupos. Entonces  $\phi$  se dice un isomorfismo de grupos topológicos si tanto  $\phi$  como  $\phi^{-1}$  son continuas. En este caso se dice que  $G$  y  $G'$  son isomorfos como grupos topológicos, y se escribe  $G \cong G'$ .

**Ejemplos.** Sea  $G$  un grupo arbitrario. Sea  $G_d$  el grupo  $G$  provisto de la topología discreta, y sea  $G_i$  el mismo grupo con la topología indiscreta. Sean  $Id_1 : G_d \rightarrow G_i$  e  $Id_2 : G_i \rightarrow G_d$  las funciones identidades respectivas. Claramente ambas son isomorfismos de grupos e  $Id_1$  es continua, pero  $Id_2$  no lo es si  $G$  es no trivial. En particular, los grupos topológicos  $G_d$  y  $G_i$  no son isomorfos.

Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos topológicos. Entonces definimos el grupo topológico producto  $G = \prod_{i \in I} G_i$  como el producto directo (de grupos) con la topología producto. Recordemos que la topología producto es la topología coinducida por las funciones coordenadas  $\pi_i : G \rightarrow G_i$ , y que una función  $f : X \rightarrow G$  es continua si y sólo si cada coordenada  $\pi_i \circ f : X \rightarrow G_i$  es continua.

**Proposición 12.8.** Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos topológicos. Entonces  $G = \prod_{i \in I} G_i$  es también un grupo topológico.

**Demostración:** La continuidad de la multiplicación sigue inmediatamente del diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{a} & G \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \pi_i \\ G_i \times G_i & \longrightarrow & G_i \end{array} ,$$

donde la función diagonal es continua por ser composición de funciones continuas y  $a$  es continua por ser cada coordenada  $\pi_i \circ a$  continua. La continuidad de la inversa se demuestra del mismo modo y se deja al lector.  $\square$

**ejemplo 12.9.** Sea  $G = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$  con  $G_n = \{0, 1\}$ , con su estructura natural de grupo cíclico discreto, para todo  $n$ . El grupo  $G$  consiste de todas las sucesiones  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  de 0s y 1s y es un grupo de Hausdorff compacto por el Teorema de Tychonoff. Dejamos como ejercicio al lector determinar si los siguientes subgrupos:

1.  $A = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_1 + a_4 + a_7 = 0\}$ ,
2.  $B = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i = 0 \text{ para todo } i \text{ par}\}$ ,
3.  $C = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \neq 0 \text{ para un número finito de coordenadas } i\}$ ,

son abiertos y/o cerrados.

Sea  $G$  un grupo topológico y  $H \trianglelefteq G$  entonces  $\frac{G}{H}$  es un grupo. Lo podemos dotar de la topología cociente, es decir la topología coinducida por la proyección  $p : G \rightarrow \frac{G}{H}$ . En esta topología, un conjunto  $A \subseteq \frac{G}{H}$  es abierto si y sólo si

$$p^{-1}(A) = \bigcup_{xH \in A} xH$$

es abierto en  $G$ . Se sigue que la topología de  $\frac{G}{H}$  está generada por ciertos abiertos de la forma  $p(Z)$  con  $Z \subseteq G$  abierto. Nótese, no obstante, que no es siempre cierto para espacios de identificación que  $p(Z)$  es abierto para todo abierto  $Z \subseteq G$ , es decir, la proyección  $p$  no siempre es abierta. Sin embargo, en el caso de grupos topológicos, Las pre-imagenes de los subconjuntos de  $\frac{G}{H}$  son precisamente los conjuntos  $Z$  que satisfacen  $HZ = Z$ . Más generalmente, se tiene  $p^{-1}p(Z) = HZ$ . En este caso, si  $Z$  es abierto se tiene de inmediato que  $HZ$  es abierto, y por lo tanto también  $p(Z)$ . Se concluye que la proyección  $p$  es abierta para cocientes de grupos topológicos.

**Proposición 12.10.** *Sea  $G$  un grupo topológico y  $H \trianglelefteq G$  entonces  $\frac{G}{H}$  es un grupo topológico.*

**Demostración:** Basta ver que el producto y el inverso son funciones continuas. La continuidad de la función inverso es inmediata del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \frac{G}{H} & \longrightarrow & \frac{G}{H} \end{array},$$

donde las funciones verticales son las proyecciones canónicas y las funciones horizontales son las funciones inverso. La continuidad de la función diagonal sigue del hecho de que es composición de funciones continuas y la demostración se termina por la definición de topología cociente, tal como en el caso del producto de grupos.

Similarmente el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & G \times G & \longrightarrow & G \\ & p \times p \swarrow & \downarrow P & \searrow & \downarrow p \\ \frac{G}{H} \times \frac{G}{H} & \xrightarrow{a} & \frac{(G \times G)}{(H \times H)} & \longrightarrow & \frac{G}{H} \end{array}$$

prueba que la función  $\frac{(G \times G)}{(H \times H)} \rightarrow \frac{G}{H}$  inducida por el producto es continua. La demostración se termina si probamos que la biyección  $a$  es continua. La topología en  $\frac{G \times G}{H \times H}$  está generada por abiertos de la forma  $P(Z)$ , donde  $Z$  es un abierto en  $G \times G$ . La topología de  $\frac{G}{H} \times \frac{G}{H}$  está generada por abiertos del tipo  $p(U) \times p(V)$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $G$ . Lo anterior, en particular, implica que  $a^{-1}$  es continua, pues  $Z = U \times V$  nos da  $P(Z) = a(p(U) \times p(V))$ . Sin embargo, necesitamos la continuidad de  $a$ . Para eso, observamos que todo abierto  $Z \subseteq G \times G$  es unión de abiertos de la forma  $U \times V$ . Si ponemos  $Z = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ , entonces  $a^{-1}(P(Z)) = \bigcup_{i \in I} p(U_i) \times p(V_i)$ , de donde se obtiene el resultado.  $\square$

**Observación 12.11.** En la demostración precedente, la caracterización de los abiertos de  $\frac{G}{H}$  como imágenes de abiertos en  $G$  juega un papel fundamental. Una demostración puramente functorial es bastante elusiva, excepto si admitimos hipótesis fuertes en  $G$  y  $H$ , como por ejemplo  $G$  compacto y  $H$  cerrado.

**ejemplo 12.12.**  $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$  y  $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong S^1$ . Para probar esto último observamos que  $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$  es compacto, por ser una imagen continua del compacto  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ , y por

ser Hausdorff (ya que  $\mathbb{Z}$  es cerrado). Basta por lo tanto recordar que una biyección continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrada, y por lo tanto un homeomorfismo.

**Proposición 12.13.** *Sea  $H$  un subgrupo normal de  $G$ .*

- i)  $\frac{G}{H}$  es Hausdorff si y sólo si  $H$  es cerrado en  $G$ .*
- ii)  $\frac{G}{H}$  es discreto si y sólo si  $H$  es abierto en  $G$ .*
- iii)  $\frac{G}{H}$  es indiscreto si y sólo si  $H$  es denso en  $G$ .*

**Demostración:** Las dos primeras afirmaciones son inmediatas, dado que  $\frac{G}{H}$  es Hausdorff o discreto si y sólo si  $\{e_{\frac{G}{H}}\} = \{eH\}$  es respectivamente cerrado o abierto. Para la última, Si  $H$  es denso, existe una red  $\{h_\lambda\}_\lambda$  en  $H$  que converge a cada elemento de  $G$ . Por continuidad, concluimos que la red constante con valor  $e_{\frac{G}{H}}$  converge a cada punto del cociente y por lo tanto  $\{e_{\frac{G}{H}}\}$  es denso. Para la converso, observamos que la clausura  $\bar{H}$  satisface  $H\bar{H} = \bar{H}$ , por lo que es la pre-imagen de un subconjunto  $C \subseteq \frac{G}{H}$  que es necesariamente cerrado, y por lo tanto  $\bar{H} = G$  si  $\{e_{\frac{G}{H}}\}$  es denso.  $\square$

**Proposición 12.14.** *Sean  $G$  y  $G'$  grupos topológicos. Sean  $H$  y  $N$  subgrupos de  $G$ .*

- i.- Sea  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo continuo. Entonces el isomorfismo canónico de grupos  $\phi : G/\ker f \rightarrow \text{im } f$  es continuo.*
- ii.- Si  $N$  y  $H$  son normales en  $G$  y  $N \subseteq H$ , el isomorfismo canónico de grupos*

$$\phi : \frac{G}{H} \rightarrow \frac{G/N}{H/N}$$

*es bicontinuo, es decir es un isomorfismo de grupos topológicos.*

- iii.- Si  $N$  es normal en  $G$ , el isomorfismo canónico de grupos  $\phi : \frac{H}{H \cap N} \rightarrow \frac{HN}{N}$  es continuo.*

**Demostración:** (ii) es inmediato de la definición de abiertos en el cociente, dado que los abiertos en cada lado son aquellos subconjuntos cuyas

pre-ímagenes en  $G$  son abiertas. (i) se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow & \searrow & \searrow \\ \frac{G}{\ker f} & \xrightarrow{\quad} & \text{im } f \xrightarrow{\quad} G' \end{array},$$

y de la caracterización de funciones continuas *en* un cociente y *hacia* un subespacio. Finalmente, (iii) sigue de aplicar (i) a la función canónica  $H \rightarrow \frac{G}{N}$ .  $\square$

**ejemplo 12.15.** Sea  $G = \mathbb{R}$  con la topología discreta, y sea  $G' = \mathbb{R}$  con la topología indiscreta. Entonces el homomorfismo identidad  $i : G \rightarrow G'$  es continuo y es un isomorfismo de grupos. En particular, su núcleo es trivial y su imagen es todo el codominio. Sin embargo, su inversa no es continua. Esto muestra que el isomorfismo inverso en (i) no es continuo en general.

**ejemplo 12.16.** Sea  $G = \mathbb{R}$  con la topología usual, y sean  $H = \mathbb{Z}$ ,  $N = \sqrt{2}\mathbb{Z}$ . Claramente  $H \cap N = 0$ , luego  $\frac{H}{H \cap N}$  tiene la topología usual de  $\mathbb{Z}$ . Sin embargo El Cociente  $\frac{H+N}{N}$  está contenido en  $\frac{G}{N} = \frac{\mathbb{R}}{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$  que es un compacto. Se concluye que existe una sucesión  $\{k_i\}$  en  $\mathbb{Z}$  con  $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty$  tal que la sucesión  $\{2^{k_i} + N\}_i$  es convergente en  $\frac{G}{N}$ , y por lo tanto  $\{(2^{k_i} - 2^{k_{i-1}}) + N\}_i$  converge a 0 en  $\frac{H+N}{N}$ . En particular  $\frac{H+N}{N}$  no es discreto.

**Proposición 12.17.** *Sea  $G$  un grupo topológico. Sea  $C \subseteq G$  un subconjunto compacto, y sea  $U$  un abierto que contiene a  $C$ . Entonces existe una vecindad  $W$  de la identidad que satisface  $CW \subseteq U$ .*

**Demostración:** Para cada punto  $x \in C$ , escojamos una vecindad  $V_x$  de  $e$  tal que  $xV_x \subseteq U$ , y sea  $W_x$  una vecindad simétrica de  $e$  tal que  $W_x^2 \subseteq V_x$ . Tal vecindad existe por la continuidad de la multiplicación. El cubrimiento

$$C \subseteq \bigcup_{x \in C} xW_x$$

tiene un sub-cubrimiento finito, ya que  $C$  es compacto. Si  $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i}$ , y si  $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$ , entonces  $W$  cumple lo pedido. De hecho,  $x \in x_i W_{x_i}$  para algún  $i$ . Luego

$$xW \subseteq x_i W_{x_i}^2 \subseteq x_i V_{x_i} \subseteq U.$$

Concluimos que  $CW \subseteq U$ .  $\square$

**Proposición 12.18.** *Un grupo compacto totalmente desconexo tiene una base de vecindades de la identidad formada por subgrupos abiertos.*

**Demostración:** Por los resultados del capítulo precedente, sabemos que hay una base de vecindades de la identidad formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Sea  $C$  una vecindad de la identidad de este tipo. Es suficiente probar que  $C$  contiene algún subgrupo abierto  $H$ . Nótese que  $C$  es compacto por ser cerrado en un compacto. Poniendo  $U = C$  en el resultado precedente, lo que puede hacerse por ser  $C$  abierto, concluimos que  $CW \subseteq C$  para cierta vecindad  $W$  de la identidad. Sea  $H$  el grupo generado por  $W$ . Este es un subgrupo abierto, dado que contiene a la vecindad  $W$  de la identidad. Cada elemento de  $H$  se escribe como una palabra en elementos de  $W$  o sus inversos. Estos últimos están también en  $W$  por ser  $W$  una vecindad simétrica. Un sencillo argumento por inducción en el largo de tales palabras muestra que  $H \subseteq C$ .  $\square$

### Ejercicios

1. Probar que si  $G$  es un grupo conexo y si  $N$  es un subgrupo normal y discreto, entonces  $N$  está contenido en el centro  $Z(G)$  de  $G$ .
2. Probar que si  $A$  es un subconjunto cerrado de  $G$  y  $B$  es un subconjunto compacto de  $G$  entonces  $AB$  es cerrado en  $G$ .
3. Encontrar subconjuntos cerrados  $A$  y  $B$  de algún grupo  $G$  tales que  $AB$  sea un subconjunto propio denso en  $G$ .
4. Probar que si  $G$  es un grupo topológico de Hausdorff, entonces  $Z(G)$  es cerrado.
5. Probar que si  $G$  es un grupo topológico, entonces todo subgrupo maximal de  $G$  es cerrado o denso.
6. Probar que si  $G$  es compacto y si  $f : G \rightarrow G'$  es un homomorfismo continuo entonces  $G/\ker f \cong \text{Im} f$  como grupos topológicos.
7. Probar que si  $H$  es un subgrupo compacto de  $G$  y si  $N$  es un subgrupo normal cerrado de  $G$  entonces  $H/(H \cap N) \cong HN/N$  como grupos topológicos.
8. Probar que si  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  entonces  $G/\bar{H}$  es la  $T_0$  identificación de  $G/H$ .



9. Probar que todo subgrupo cerrado y conexo de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$  es isomorfo a  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$  para algún  $m \leq n$ .
10. Probar que  $(\sqrt{2} + \mathbb{Z}, \sqrt{3} + \mathbb{Z})$  genera un subgrupo denso de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ .
11. Probar que  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  generan un subgrupo denso de  $\mathbb{R}$ .
12. Encontrar subgrupos  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{R}$  tales que  $(A + B)/B$  es indiscreto, pero  $A/A \cap B$  es discreto.
13. Probar de dos maneras que si  $G$  es Hausdorff, el conjunto de los pares  $(a, b)$  en  $G \times G$  que satisfacen  $ab = ba$  es cerrado:
  - Utilizando redes.
  - Directamente de la definición.

Utilice esto para dar una segunda demostración de que la clausura de un grupo abeliano es abeliana.

14. Demuestre que todo subgrupo cerrado propio de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es finito.
15. Probar que todo subgrupo cerrado no nulo de  $\mathbb{Z}_p$  es de la forma  $p^t \mathbb{Z}_p$  para algún  $t \in \mathbb{N}$ .
16. Sea  $G$  un grupo topológico, y sea  $\mathcal{V}(e)$  su conjunto dirigido de vecindades de la identidad. Sea  $A$  un subconjunto de  $G^n = G \times \dots \times G$ . Probar que todo  $x \in G^n$  satisface  $x \in \bar{A}$  sí y sólo si existe una red  $\{a_V\}_{V \in \mathcal{V}(e)}$  en  $A$  tal que  $a_V \rightarrow x$ .
17. Sea  $\Lambda$  el conjunto dirigido de los enteros ordenados por divisibilidad. Encontrar una función cofinal  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \lambda$ .
18. Sea  $G$  un grupo topológico, y sea  $\Lambda$  un conjunto dirigido tal que existe una función cofinal  $\phi : \Lambda \rightarrow \mathcal{V}(e)$ . Sea  $A$  un subconjunto de  $G$ . Probar que todo  $x \in G$  satisface  $x \in \bar{A}$  sí y sólo si existe una red  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en  $A$  tal que  $a_\lambda \rightarrow x$ .
19. Probar que  $\mathcal{V}(e)$  tiene último elemento si y sólo si  $G/\overline{\{e\}}$  es discreto.
20. Probar que el grupo

$$\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

donde  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tiene la topología usual es homeomorfo al toro.

21. Considere el homomorfismo canónico

$$\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{n>1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

donde el grupo de la derecha tiene la topología producto (con cada factor discreto). Sea  $\hat{\mathbb{Z}}$  la clausura de la imagen de  $\mathbb{Z}$  bajo  $\phi$ . Probar que  $\hat{\mathbb{Z}}$  es un grupo topológico compacto y metrizable.

22. Sea  $G$  un grupo topológico Hausdorff. Sean  $N$  y  $K$  subconjuntos compactos de  $G$ . Probar que  $NK$  es compacto.
23. Sea  $G$  un grupo topológico conexo. Probar que su subgrupo conmutador  $G'$  es un subgrupo conexo.
24. Probar que  $\mathbb{R}$  no tiene subgrupos conexos no triviales.
25. Probar que todo subgrupo conexo de  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio vectorial.
26. Sea  $G$  un grupo topológico compacto y sea  $C$  la componente conexa de la identidad. Probar que  $G/C$  es totalmente desconexo.
27. Sea  $G$  el grupo de matrices reales  $M$  que satisfacen  $MM^t = I$  donde  $I$  es la matriz identidad. Probar que  $G$  tiene 2 componentes conexas.
28. Sea  $G$  un grupo topológico Hausdorff. Sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $G$  y sea  $K$  un subconjunto compacto de  $G$ . Probar que  $KA$  es cerrado.
29. Sea  $G$  un grupo topológico. Una red  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  en  $G$  se dice de Cauchy por la izquierda si para toda vecindad  $V$  de la identidad existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que

$$\lambda, \mu > \lambda_0 \Rightarrow a_\lambda^{-1} a_\mu \in V.$$

Probar que en un grupo compacto toda red de Cauchy por la izquierda es convergente.

30. Sea  $G$  un grupo topológico. Un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $G$  se dice de Cauchy por la izquierda si para toda vecindad  $V$  de la identidad existe  $F \in \mathfrak{F}$  tal que  $F^{-1}F \subseteq V$ . Probar que en un grupo compacto todo filtro de Cauchy por la izquierda es convergente.
31. Sea  $G$  un grupo topológico compacto y sea  $C$  la componente conexa de la identidad. Probar que  $G/C$  es totalmente desconexo.

32. Sea  $G$  un grupo topológico, y sea  $\mathfrak{F}$  un filtro que converge a la identidad  $e$ . Sea  $A$  un subconjunto de  $G$  y sea  $\mathfrak{F}A$  el filtro generado por  $\{FA|F \in \mathfrak{F}\}$ . Probar que los puntos de acumulación de  $\mathfrak{F}A$  son exactamente los elementos de  $\overline{A}$ .

# Chapter 13

## Homotopías

**definición 13.1.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  dos funciones continuas. Una homotopía entre  $f$  y  $g$  es una función continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x$  en  $X$ . Las funciones  $f$  y  $g$  se dicen homotópicas si existe una homotopía entre ellas.

**ejemplo 13.2.** Sea  $X = \{p\}$  el espacio con un sólo punto. Entonces dos funciones  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  son homotópicas si y sólo si  $f(p)$  y  $g(p)$  están en la misma componente arco-conexa de  $X$ .

**ejemplo 13.3.** Sea  $Y$  un espacio vectorial topológico real y sea  $X$  un espacio topológico arbitrario. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos funciones continuas arbitrarias. Entonces  $f$  y  $g$  son homotópicas con la homotopía

$$H(x, t) = f(x) + t[g(x) - f(x)].$$

**ejemplo 13.4.** Sea  $Y = S^1$  el círculo unitario y sea  $X$  un espacio topológico arbitrario. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos funciones continuas tales que  $f(x) \neq -g(x)$  para todo  $x \in X$ . Entonces  $f$  y  $g$  son homotópicas con la homotopía

$$H(x, t) = \frac{f(x) + t[g(x) - f(x)]}{\|f(x) + t[g(x) - f(x)]\|}.$$

Esta homotopía se construye multiplicando el punto  $f(x) + t[g(x) - f(x)]$ , el cual se encuentra en el segmento que une  $f(x)$  con  $g(x)$ , por una constante que lo proyecta radialmente en el círculo. Esto es posible si dicho punto no es el centro del círculo, por lo que necesitamos la condición  $f(x) \neq -g(x)$  (ver Fig. 13.1).

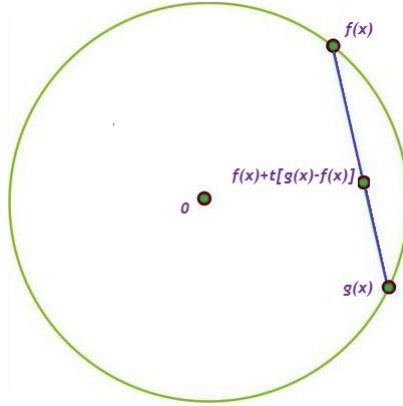


Figure 13.1: Una homotopía en el círculo.

La relación de homotopía puede caracterizarse en términos de componentes arco-conexas en el espacio de funciones continuas, para lo cual debemos definir primero una topología apropiada.

**definición 13.5.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos de Hausdorff. Sea  $C(X, Y)$  el conjunto de funciones continuas de  $X$  en  $Y$ . La topología compacto-abierta en  $C(X, Y)$  es la que tiene como sub-base los conjuntos

$$\mathcal{O}_{C,U} = \{f : X \rightarrow Y \mid f(C) \subseteq U\},$$

donde  $C$  recorre la colección de conjuntos compactos de  $X$  y  $U$  recorre la colección de abiertos de  $Y$ .

**Proposición 13.6.** Una red  $\{f_\lambda\}_\lambda$  converge a  $f$  en  $C(X, Y)$  con respecto a la topología compacto abierta si y sólo si para cada compacto  $C \subseteq X$ , y para cada abierto  $U \subseteq Y$ , tales que  $f(C) \subseteq U$ , se tiene  $f_\lambda(C) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande.

**Demostración** La hipótesis es equivalente a  $f_\lambda \in \mathcal{O}_{C,U}$  para  $\lambda$  suficientemente grande.  $\square$

**Proposición 13.7.** Si  $Y$  es un espacio métrico y  $X$  es un espacio compacto, entonces la topología compacto abierta en  $C(X, Y)$  es la topología de la convergencia uniforme. En otras palabras, una red  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a una función  $f$  en la topología compacto-abierta si y sólo si  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge uniformemente a  $f$ .

**Demostración** Supongamos primero que  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge uniformemente a  $f$ . Sea  $C$  un subconjunto compacto de  $X$  y sea  $U$  un abierto de  $Y$ , de modo que  $f(C) \subseteq U$ . Sea  $d$  una métrica que define la topología de  $Y$ . Entonces se tiene

$$e = d(f(C), U^c) > 0,$$

por ser  $C$  compacto y  $U^c$  cerrado. Se sigue que si  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge uniformemente a  $f$  en  $C$ , para  $\lambda$  suficientemente grande  $d_u(f_\lambda, f) < e$ , por lo que para todo  $c \in C$  se tiene

$$d(f_\lambda(c), U^c) \geq d(f(c), U^c) - d(f(c), f_\lambda(c)) > 0.$$

Se concluye que  $f_\lambda(C) \subseteq U$ .

Supongamos ahora que  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge a  $f$  en la topología compacto-abierto. Sea  $\epsilon > 0$ . Para cada  $x \in X$  existe una vecindad compacta  $V_x$  de  $x$  tal que, si  $y \in V_x$ , entonces  $d(f(y), f(x)) < \epsilon/2$ . En otras palabras

$$f(V_x) \subseteq B(f(x), \epsilon/2).$$

Como  $X$  es compacto, existe una colección finita  $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_r}\}$  de tales vecindades cuyos interiores cubren  $X$ . Para cada  $x_i$  existe un  $\lambda \in \Lambda$  tal que para  $\lambda > \lambda_i$  se tiene

$$f_\lambda(V_{x_i}) \subseteq B(f(x_i), \epsilon/2).$$

Sea  $\lambda_0 > \lambda_i$  para cada  $i$ . Si  $\lambda > \lambda_0$  y si  $a \in X$ , se tiene  $a \in V_{x_i}$  para algún  $i$  y por lo tanto

$$d(f(a), f_\lambda(a)) \leq d(f(a), f(x_i)) + d(f_\lambda(a), f(x_i)) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Se sigue que  $f_\lambda$  converge uniformemente a  $f$ . □

**Lema 13.8.** Si  $f : X \times Y \rightarrow Z$  es una función continua, entonces para todo  $x \in X$  la función  $f_x : Y \rightarrow Z$  definida por  $f_x(y) = f(x, y)$  es continua. Además la función  $F : X \rightarrow C(Y, Z)$  definida por  $F(x) = f_x$  es continua cuando  $C(Y, Z)$  tiene la topología compacto-abierto.

**Demostración**  $y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$  es continua, ya que es la composición  $y \mapsto (x, y) \mapsto f(x, y)$ . Sea ahora  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red que converge a  $x$ . Probaremos que  $f_{x_\lambda}$  converge a  $f_x$  en la topología compacto-abierta. Sea  $C$  un compacto de  $Y$  y  $U$  un abierto de  $Z$ . Basta ver que si  $f_x(C) \subseteq U$ , se tiene  $f_{x_\lambda}(C) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Para cada  $y$  en  $C$  se tiene  $f(x, y) \in U$ , luego existen vecindades abiertas  $V_y$  de  $x$  y  $W_y$  de  $y$  tales que  $f(V_y \times W_y) \subseteq U$ . Si  $\lambda(y)$  es suficientemente grande, de modo que  $x_\lambda \in V_y$  para  $\lambda \geq \lambda(y)$ , se tiene

$$f_{x_\lambda}(W_y) \subseteq U, \quad \forall \lambda > \lambda(y).$$

Los conjuntos  $W_y$  forman un cubrimiento abierto de  $C$  por lo que tiene un sub-cubrimiento finito formado por  $W_{y_1}, \dots, W_{y_r}$ . Sea  $\lambda \geq \lambda(y_1), \dots, \lambda(y_r)$ . Entonces  $f_{x_\lambda}(C) \subseteq U$  como se pide.  $\square$

**Proposición 13.9.** *Para todo punto  $x \in X$ , la función evaluación  $e_x : C(X, Y) \rightarrow Y$  definida por  $e_x(f) = f(x)$  es continua.*

**Demostración** Basta ver que si  $f_\lambda \rightarrow f$ , entonces  $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$ . Sea  $U$  una vecindad abierta de  $f(x)$ . Como  $C = \{x\}$  es un compacto y se tiene  $f(C) \subseteq U$ , se sigue que  $f_\lambda(C) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande, es decir  $f_\lambda(x) \in U$  y el resultado sigue.  $\square$

**Proposición 13.10.** *Si  $X$  es localmente compacto, la función evaluación  $e : X \times C(X, Y) \rightarrow Y$  definida por  $e(x, f) = f(x)$  es continua.*

**Demostración** Basta ver que si  $f_\lambda \rightarrow f$  y  $x_\lambda \rightarrow x$  entonces  $f_\lambda(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ . Sea  $U$  una vecindad abierta de  $f(x)$ . Existe una vecindad  $V$  de  $x$ , que podemos suponer compacta, tal que  $f(V) \subseteq U$ . Se sigue que  $f_\lambda(V) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Además  $x_\lambda \in V$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Se deduce que  $f_\lambda(x_\lambda) \in f_\lambda(V) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande.  $\square$

**Proposición 13.11.** *Supongamos que  $Y$  es localmente compacto. Una función  $f : X \times Y \rightarrow Z$  es continua si y sólo si*

1. *para todo  $x \in X$  la función  $f_x : Y \rightarrow Z$  definida por  $f_x(y) = f(x, y)$  es continua.*
2. *la función  $F : X \rightarrow C(Y, Z)$  definida por  $F(x) = f_x$  es continua cuando  $C(Y, Z)$  tiene la topología compacto-abierta.*

**Demostración** La necesidad es el lema 13.8. La suficiencia sigue de que  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  es la composición  $(x, y) \mapsto (f_x, y) \mapsto f_x(y)$ , por lo que podemos aplicar el resultado precedente.  $\square$

Aplicando este resultado al caso  $X = [0, 1]$  se tiene:

**Corolario 13.11.1.** *Supongamos que  $X$  es localmente compacto. Dos funciones continuas  $f$  y  $g$  son homotópicas si y sólo si están en la misma componente arco-conexa de  $C(X, Y)$  con la topología compacto abierta.*  $\square$

**Corolario 13.11.2.** *Supongamos que  $X$  es localmente compacto. La relación de homotopía en  $C(X, Y)$  es una relación de equivalencia.*

Se deja al lector la tarea de escribir una demostración directa del resultado precedente. Una demostración directa permite eliminar la hipótesis de que  $X$  es localmente compacto. Lo mismo sucede con los corolarios 13.12.1 y 13.13.1 mas abajo. Se verá en un capítulo posterior una estrategia para describir explícitamente las homotopías. En este capítulo nos contentaremos con resultados de existencia.

**Proposición 13.12.** *Sea  $h : Y \rightarrow Z$  una función continua. Entonces la función  $h_* : C(X, Y) \rightarrow C(X, Z)$  definida por  $h_*(f) = h \circ f$  es continua en la topología compacto-abierta.*

**Demostración** Basta ver que si  $f_\lambda \rightarrow f$  en la topología compacto-abierta, entonces  $h \circ f_\lambda \rightarrow h \circ f$ . Sea  $C$  un compacto en  $X$  y sea  $U$  un conjunto abierto en  $Z$  que contiene a  $h \circ f(C)$ . Entonces  $h^{-1}(U)$  contiene a  $f(C)$ . Se sigue que  $f_\lambda(C) \subseteq h^{-1}(U)$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Se deduce que  $h \circ f_\lambda(C) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande, y el resultado sigue.  $\square$

**Corolario 13.12.1.** *Supongamos que  $X$  es localmente compacto. Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, y si  $h : Y \rightarrow Z$  es continua, también son homotópicas las funciones compuestas  $h \circ f$  y  $h \circ g$ .*  $\square$

**Proposición 13.13.** *Sea  $h : Z \rightarrow X$  una función continua. Entonces la función  $h^* : C(X, Y) \rightarrow C(Z, Y)$  definida por  $h^*(f) = f \circ h$  es continua con respecto a la topología compacto-abierta.*



**Demostración** Basta ver que si  $f_\lambda \rightarrow f$  en la topología compactoabierta, entonces  $f_\lambda \circ h \rightarrow f \circ h$ . Sea  $C$  un compacto en  $Z$  y sea  $U$  un conjunto abierto en  $Y$  que contiene a  $f \circ h(C)$ . En otras palabras, el conjunto abierto  $U$  contiene al conjunto compacto  $f[h(C)]$ . Entonces, como  $h(C)$  es un compacto, se tiene que  $f_\lambda[h(C)] \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Se deduce que  $f_\lambda \circ h(C) \subseteq U$  para  $\lambda$  suficientemente grande, y el resultado sigue.  $\square$

**Corolario 13.13.1.** *Supongamos que  $X$  y  $Z$  son localmente compactos. Si  $f$  y  $g$  son homotópicas, también lo son  $f \circ h$  y  $g \circ h$ .*  $\square$

**definición 13.14.** Dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  se dicen homotópicamente equivalentes si existen funciones  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $f \circ g$  es homotópica a la identidad de  $Y$  y  $g \circ f$  es homotópica a la identidad de  $X$ . Un espacio se dice contractible si es homotópicamente equivalente al espacio trivial  $\{p\}$ .

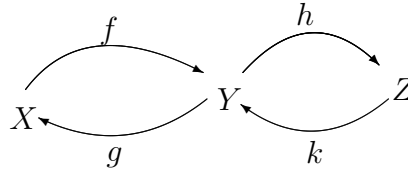
**Proposición 13.15.** *Un espacio topológico  $X$  es contractible si y sólo si la identidad  $i : X \rightarrow X$  es homotópica a una función constante.*

**Demostración** Sea  $H : X \times I \rightarrow X$  una homotopía entre  $i$  y una función constante  $c_p : X \rightarrow X$  definida por  $c_p(x) = p$ . Definimos  $f : \{p\} \rightarrow X$  por  $f(p) = p$ . Basta ver que  $f$  e  $i$  son inversas de homotopía. De hecho,  $i \circ f = \text{id}_{\{p\}}$  y  $f \circ i = c_p$ . El resultado sigue, ya que, por hipótesis  $c_p$  es homotópica a la identidad.

Conversamente, si  $X$  es homotópicamente equivalente a un punto, deben existir inversas de homotopía  $f : X \rightarrow \{p\}$  y  $g : \{p\} \rightarrow X$ . Es claro que  $f \circ g$  es una función constante, la cual debe ser homotópica a la identidad por definición de inversas de homotopía.  $\square$

**Proposición 13.16.** *La equivalencia homotópica es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.*

**Demostración** Supongamos que  $X, Y, Z$  son espacios topológicos tales que existe un diagrama conmutativo



de modo que

$$f \circ g \sim \text{Id}_Y, \quad g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad h \circ k \sim \text{Id}_Z, \quad k \circ h \sim \text{Id}_Y.$$

Basta probar que

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) \sim \text{Id}_Z, \quad (g \circ k) \circ (h \circ f) \sim \text{Id}_X.$$

Para la primera de estas equivalencias observamos que

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) \sim h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ \text{Id}_Y \circ k = h \circ k \sim \text{Id}_Z.$$

La segunda equivalencia es análoga y se deja al lector.  $\square$

**ejemplo 13.17.** Un espacio vectorial topológico real es contractible como lo demuestra el ejemplo dado al comienzo del capítulo. Un argumento similar prueba que el intervalo es contractible.

**ejemplo 13.18.** Si  $X$  es un espacio topológico arbitrario, el cilindro sobre  $X$  es el espacio producto  $X \times [0, 1]$ . El espacio  $X$  puede identificarse con su imagen  $X \times \{0\}$  en el cilindro. Veremos que esta inclusión es una equivalencia homotópica. De hecho, si consideramos las funciones  $f : X \rightarrow X \times [0, 1]$  y  $g : X \times [0, 1] \rightarrow X$  definidas por  $f(x) = (x, 0)$  y  $g(x, s) = x$ , basta probar que  $f \circ g$  es homotópica a la identidad, lo que sigue de la homotopía

$$H((x, s), t) = (x, st).$$

**ejemplo 13.19.** Si  $X$  es un espacio topológico arbitrario, el cono sobre  $X$  es el espacio de identificación  $C(X) = (X \times [0, 1]) / \equiv$  donde  $\equiv$  es la relación de equivalencia cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma

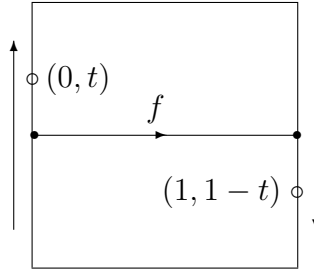


Figure 13.2: Una equivalencia homotópica entre el círculo y la banda de Moebius.

$(x, 0) \equiv (y, 0)$  con  $x, y \in X$  cualesquiera. Entonces La identidad  $i : C(X) \rightarrow C(X)$  es homotópica a una constante mediante la homotopía

$$H([x, s], t) = [x, st],$$

donde  $[x, s]$  denota la clase de equivalencia de  $(x, s)$ . Se sigue que  $C(X)$  es contractible.

**ejemplo 13.20.** La Banda de Moebius  $M$  es el espacio de identificación  $C(X) = ([0, 1] \times [-1, 1]) / \equiv$  donde  $\equiv$  es la relación de equivalencia cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma  $(0, t) \equiv (1, -t)$  con  $t \in [-1, 1]$  cualquiera. Afirmamos que la inclusión  $f$  del círculo unitario  $S^1 = [0, 1] / \sim$ , donde  $\sim$  identifica sólo el 0 y el 1, en la Banda de Moebius dada por  $f([t]) = [t, 0]$  es una equivalencia homotópica (ver Figura 13.1), con una inversa de homotopía dada por  $g([t, s]) = [t]$ . Basta ver que la función  $[t, s] \mapsto [t, 0]$  es homotópica a la identidad mediante la homotopía

$$H([r, s], t) = [r, st]$$

(ver Figura 13.2).

**definición 13.21.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$ . Diremos que  $A$  es un retracto de  $X$  si existe una función continua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo elemento  $a \in A$ . Diremos que  $A$  es un retracto de deformación de  $X$  si la función  $r$  puede escogerse homotópica a la identidad de  $X$ .

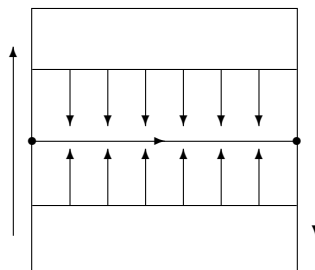


Figure 13.3: Una homotopía entre la identidad y la proyección de toda la banda de Moebius en su círculo ecuatorial.

**Lema 13.22.** *Si un subconjunto  $A \subseteq X$  es un retracto de deformación de  $X$ , entonces la inclusión  $i : A \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica.*

**Demostración** Si existe una función continua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo elemento  $a \in A$ , entonces  $r \circ i = \text{id}_A$ , mientras que  $r$ , como función de  $X$  a  $X$ , se identifica con  $i \circ r$ , por lo que la definición de retracto de deformación nos dice que  $i \circ r$  es homotópica a la identidad.  $\square$

A menudo encontrar la función  $r$  que cumple las condiciones para hacer de  $A \subseteq X$  un retracto en la definición precedente requiere proyectar, de algún modo, un conjunto de regiones que dividen el complemento de  $A$ , por lo que se requiere hacer uso del hecho de que la topología de un espacio  $X$  es co-inducida por las inclusiones de una colección finita de conjuntos cerrados que lo recubre (Capítulo 5), por lo que basta con definir la función  $r$  en cada región cerrada y comprobar que dichas definiciones coinciden en las intersecciones. Un ejemplo aclarará esta idea.

Sea  $X$  el plano  $\mathbb{R}^2$  del cual se han removido dos puntos,  $a$  y  $b$ , a distancia  $2r$ . Para fijar ideas asumiremos que  $a = (-r, 0)$  y  $b = (r, 0)$ . Sea  $A$  la unión de una circunferencia de radio  $r$  alrededor de  $a$  y una circunferencia de radio  $r$  alrededor de  $b$ , como muestra la mitad izquierda de la Figura 13.3. Tal conjunto  $A$  es conocido como “la figura 8”. Para construir  $r$ , se divide  $X$  en 6 regiones llamadas  $L, R, D, U, J$  e  $I$ , como muestra la mitad derecha de la Figura 13.3. La función  $r$  se define por trozos como sigue:

1. En cada círculo  $I$  o  $J$ , la función  $r$  es la proyección radial en la circun-

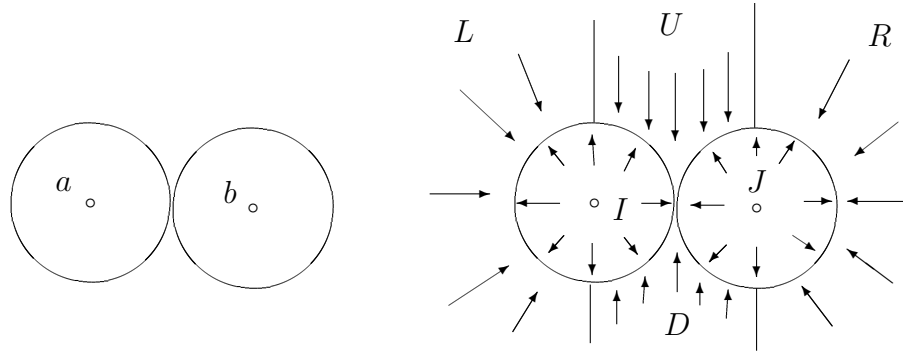


Figure 13.4: El plano con dos puntos removidos y la figura 8.

ferencia.

2. En las regiones  $L$  y  $R$ , la función  $r$  es la proyección radial en la circunferencia respectiva.
3. En la región  $U$ , la función  $r$  toma la forma  $(x, y) \mapsto (x, h(x))$ , donde  $h$  es la función cuyo gráfico es el límite inferior de esta región, es decir:

$$h(x) = \sqrt{r^2 - (r - |x|)^2} = \sqrt{2r|x| - x^2}.$$

La región  $D$  es similar.

Para comprobar que  $r$  es efectivamente homotópica a la identidad, observamos que el segmento que une cada punto  $x \in X$  con su imagen  $r(x)$  está contenido en  $X$ , por lo que existe una homotopía  $H : X \times I \rightarrow X$  del tipo

$$H(x, t) = tx + (1 - t)r(x).$$

Un argumento similar al usado aquí nos permite ver que las dos figuras que aparecen en la Figura 10.4 son homotópicas al plano sin dos puntos, y por lo tanto también a la figura 8.

Con lo dicho hasta aquí, podría ser que todo par de funciones continuas entre los mismos espacios fuesen homotópicas. Probaremos ahora que este no es el caso. Estudiaremos las clases de homotopía de funciones de  $S^1$  en  $S^1$ , o equivalentemente, las componentes arco-conexas en el espacio  $C(S^1, S^1)$ . Para ello necesitamos cierta preparación.

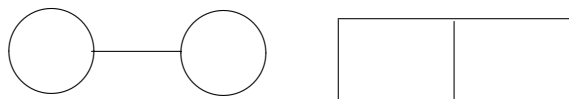


Figure 13.5: Dos figuras homotópicamente equivalentes a la figura 8.

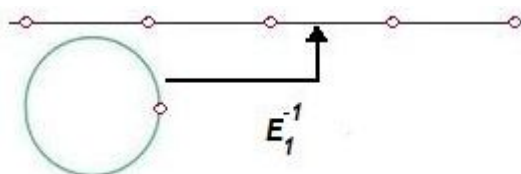


Figure 13.6: Levantando una función no epiyectiva.

**definición 13.23.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $f : X \rightarrow S^1$  una función continua. Entonces una función  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$  se denomina un levantamiento a  $\mathbb{R}$  de  $f$ . Evidentemente, si  $g$  es un levantamiento de  $f$  a  $\mathbb{R}$ , también lo es  $g_1(x) = g(x) + n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $g$  y  $g_1$  son ambos levantamientos de  $f$  entonces  $g_1(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$  para todo  $x \in X$ . En particular, si  $X$  es conexo entonces  $g_1(x) = g(x) + n$  para  $n \in \mathbb{Z}$  fijo. Observemos también que si  $f$  tiene un levantamiento a  $\mathbb{R}$ , lo mismo vale para cualquier restricción de  $f$ .

**Lema 13.24.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow S^1$  una función continua. Si  $f([a, b]) \neq S^1$  entonces existe un levantamiento de  $f$  a  $\mathbb{R}$ .

**Demostración** Sea  $E$  la función  $E(t) = e^{2\pi i t}$ . Sea  $y \in S^1$  un punto que no está en la imagen de  $f$ . Sea  $C$  una componente conexa de  $E^{-1}(S^1 - \{y\})$ . Entonces la restricción  $E_1$  de  $E$  a  $C$  es un homeomorfismo (ejercicio). Se sigue que podemos definir

$$g(x) = E_1^{-1}(f(x)).$$

Véase Fig. 13.6. □

**Lema 13.25.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow S^1$  una función continua. Sea  $c$  un punto de  $]a, b[$ . Sea  $f_1$  la restricción de  $f$  a  $[a, c]$  y sea  $f_2$  la restricción de  $f$  a  $[c, b]$ . Si  $f_1$  y  $f_2$  tienen levantamientos a  $\mathbb{R}$ , entonces también lo tiene  $f$ .*

**Demostración** Sean  $g_1$  y  $g_2$  los levantamientos a  $\mathbb{R}$  de  $f_1$  y  $f_2$ . Como

$$e^{2\pi i g_1(c)} = f_1(c) = f(c) = f_2(c) = e^{2\pi i g_2(c)},$$

se tiene que  $g_1(c) - g_2(c)$  es un entero. Modificando  $g_2$  por un entero si es necesario puede suponerse que  $g_1(c) = g_2(c)$ . Definimos ahora  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } a \leq t \leq c \\ g_2(t) & \text{si } c \leq t \leq b \end{cases},$$

La que es continua por el lema 10.6. □

**Lema 13.26.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$  una función continua. Entonces existe un levantamiento de  $f$  a  $\mathbb{R}$ .*

**Demostración** Sea  $A$  el conjunto de los elementos  $s \in [0, 1]$  tales que la restricción de  $f$  a  $[0, s]$  tiene un levantamiento a  $\mathbb{R}$ . Claramente  $0 \in A$  y  $A$  es un intervalo, ya que si la restricción de  $f$  a  $[0, t]$  tiene un levantamiento, con mayor razón la restricción de  $f$  a  $[0, s]$  tiene un levantamiento para  $s < t$ . Sea  $a$  el supremo de  $A$  y supongamos  $a < 1$ . Existe un intervalo  $[b, c]$  con  $b < a < c$  que cumple las siguientes condiciones:

- $f([b, c])$  no es todo  $S^1$ , de modo que la restricción de  $f$  a  $[b, c]$  tiene un levantamiento, y
- $b \in A$ , luego la restricción de  $f$  a  $[0, b]$  tiene un levantamiento.

Se sigue que la restricción de  $f$  a  $[0, c]$  tiene un levantamiento a  $\mathbb{R}$ , lo que contradice la elección de  $a$ . Se sigue que  $a = 1$ , de donde la restricción de  $f$  a  $[0, u]$  tiene un levantamiento para todo  $u < 1$ . Ahora escogemos un intervalo  $[b, 1]$  tal que  $f([b, 1])$  no es todo  $S^1$ , de modo que la restricción de  $f$  a  $[b, 1]$  tiene un levantamiento a  $\mathbb{R}$ , y repetimos el razonamiento. □

**Proposición 13.27.** *El espacio  $C(S^1, S^1)$  tiene una cantidad infinita de componentes conexas.*

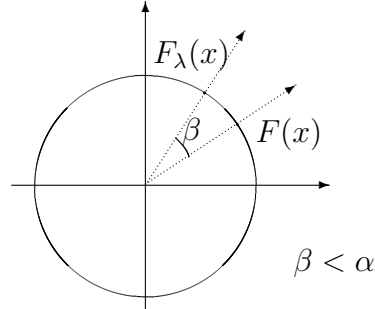


Figure 13.7: Caminos cercanos subtienden un ángulo pequeño.

**Demostración** Definimos  $\Phi : C(S^1, S^1) \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue: Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  una función continua, y sea  $E : [0, 1] \rightarrow S^1$  la función  $E(t) = e^{2\pi it}$ . Sea  $F : [0, 1] \rightarrow S^1$  la función definida por  $F = f \circ E$ . Sea  $g$  un levantamiento de  $F$ . Sea  $\Phi(f) = g(1) - g(0)$ . Afirmamos que  $\Phi$  es continua y su imagen es  $\mathbb{Z}$ . Esto concluye la demostración.

Para ver que la imagen es  $\mathbb{Z}$ , basta ver que la función  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f_n(z) = z^n$  satisface  $f_n(e^{2\pi it}) = e^{2\pi int}$ , luego un levantamiento es la función  $g_n(t) = nt$ . Se sigue que  $g_n(1) - g_n(0) = n$ , y por lo tanto  $\Phi(f_n) = n$ .

Ahora veremos que  $\Phi$  es continua. Sea  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red de funciones que converge uniformemente a una función  $f$ . En particular, si  $F_\lambda = f_\lambda \circ E$ , se tiene que  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  converge uniformemente a  $F$ , pues la composición es continua con respecto a la topología compacto-abierto, la que coincide en este caso con la topología de la convergencia uniforme. Tomemos ahora  $\lambda$  suficientemente grande, de modo que  $d_u(F, F_\lambda) < \epsilon < 1$  y sea  $\alpha \in [0, \pi/2[$  el único elemento que satisface  $\epsilon = 2\text{sen}(\alpha)$ . Geométricamente,  $\alpha$  es una cota para el ángulo que subtienden los vectores  $F(x)$  y  $F_\lambda(x)$  en el círculo  $S^1$  (ver Figura 13.5). Entonces para cada  $x \in S^1$  los levantamientos  $g$  y  $g_\lambda$  satisfacen:

$$d(g_\lambda(x), g(x) + n_\lambda(x)) < \alpha,$$

donde  $n_\lambda(x)$  es una función a valores enteros, la que está únicamente determinada si asumimos que  $\epsilon$  es lo bastante pequeño para que  $\alpha < 1/2$ . De



hecho  $n_\lambda(x)$  puede calcularse como el entero más cercano a  $g_\lambda(x) - g(x)$ , por lo que es continua en los puntos en los que

$$g_\lambda(x) - g(x) \notin \mathbb{Z} + 1/2,$$

y todo punto de  $[0, 1]$  cumple esa condición si  $\alpha < 1/2$ . Se sigue que  $n_\lambda(x)$  es continua en  $x$ , e independiente de  $x$  por la conexidad de  $[0, 1]$ . Si se escogen los levantamientos  $g_\lambda$  de modo que  $n_\lambda(0) = 0$ , se tiene que  $n_\lambda(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , por lo que se tiene

$$d(g_\lambda(x), g(x)) < \alpha,$$

y tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se sigue que  $\alpha \rightarrow 0$ , de donde concluimos que  $g_\lambda \rightarrow g$  uniformemente. Como  $\Phi(f) = g(1) - g(0)$ , y la evaluación es continua con respecto a la topología compacto-abierta, se concluye que  $\Phi(f_\lambda) \rightarrow \Phi(f)$ .  $\square$

Nótese que si bien se demostró arriba que si una red de funciones  $F_\lambda : [0, 1] \rightarrow S^1$  converge uniformemente, sus levantamientos  $g_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  pueden escogerse convergentes, no existe una función levantamiento

$$L : C(X, S^1) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$$

bien definida, ni siquiera cuando  $X = \{p\}$ . Sin embargo, esta función levantamiento puede definirse para caminos con un punto inicial dado. La función  $\Phi$  definida más arriba es un invariante del tipo de homotopía conocido como el índice o número de vueltas.

## Ejercicios

1. Dar una demostración directa de los corolarios 13.12.1 y 13.12.1, de modo que no sea necesario suponer que  $X$  es localmente compacto.
2. Sea  $X$  un conjunto bien ordenado incontable con un último elemento  $\omega_1$  y tal que para cada elemento  $\lambda$  en  $X$  distinto de  $\omega_1$ , el conjunto de puntos que anteceden a  $\lambda$  es numerable. Sea  $Y$  el espacio que se obtiene al identificar cada par de puntos consecutivos de  $X$  con los extremos correspondientes de un intervalo. El espacio  $Y$  se conoce como la recta larga con un punto final. Determine si este espacio es o no contractible.
3. Sea  $X$  un espacio discreto y sea  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones arbitrarias. Probar que  $f$  y  $g$  son homotópicas si para cada  $x \in X$  los elementos  $f(x)$  y  $g(x)$  están en la misma componente arco-conexa de  $Y$ .

4. Sea  $X$  un espacio contractible y sea  $Y$  un espacio arco-conexo. Probar que dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas.
5. Probar que un intervalo es contractible.
6. Probar que todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es contractible.
7. Probar que si  $X$  es contractible, entonces  $X \times Y$  es homotópicamente equivalente a  $Y$ .
8. Sea  $X$  un espacio topológico. El cono sobre  $X$  es el espacio obtenido de  $X \times [0, 1]$  al identificar todos los puntos de la forma  $(x, 1)$ . Probar que el cono sobre  $X$  es contractible.
9. Probar que dos espacios homotópicamente equivalentes tienen el mismo número de componentes arco-conexas.
10. Probar que el conjunto

$$S^2 \cup \{(0, 0, t) \mid 0 < t < 1\}$$

es homotópicamente equivalente a la esfera.

11. Probar que no existe una homotopía entre el círculo central  $f : S^1 \rightarrow M$  y el círculo borde  $g : S^1 \rightarrow M$  de la banda de Moebius.
12. Sea  $f$  un polinomio complejo sin raíces. Probar que el camino

$$\alpha_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}, \quad \alpha_R(t) = f(Re^{2\pi it})$$

es homotópico al camino constante. Utilizar esta observación para demostrar el teorema fundamental del álgebra.

13. Probar que los espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes si:
  - (a)  $X$  es el círculo unitario e  $Y$  en la esfera sin los polos.
  - (b)  $X$  es el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  e  $Y = X \cup [\{0\} \times \mathbb{R}^+]$ .
  - (c)  $X$  es la unión de dos círculos con un punto en común e  $Y$  es el espacio que se obtiene al remover un punto de un toro.

14. Probar que si  $X$  es un espacio topológico contractible e  $Y$  es un espacio arco-conexo, entonces  $C(X, Y)$  es un espacio arco-conexo.
15. Sea  $X$  un espacio topológico. Sea  $Y$  un espacio de identificación de  $X$  y sea  $p : X \rightarrow Y$  la proyección canónica.
  - (a) Probar que para todo espacio topológico  $Z$  podemos identificar  $C(Y, Z)$  con un subconjunto de  $C(X, Z)$  identificando a cada función continua  $f : Y \rightarrow Z$  con la función  $\tilde{f} : X \rightarrow Z$  que induce.
  - (b) Si  $C(X, Z)$  tiene la topología compacto-abierta, pruebe que la topología compacto-abierta de  $C(Y, Z)$  es mas fina que la topología de subespacio.
  - (c) probar que las topologías coinciden si  $p$  es un recubrimiento (ver capítulo 17).
16. Sea  $c : Y \rightarrow C(X, Y)$  la función definida por  $c(y) = c_y$  donde  $c_y(x) = y$  para todo  $x \in X$ . Probar que  $c$  es un homeomorfismo de  $Y$  con su imagen.

## Chapter 14

# La propiedad de extensión de homotopías

Sea  $X$  un espacio topológico arbitrario y sea  $A \subseteq X$  un subconjunto cerrado. Diremos que el par  $(X, A)$  tiene la propiedad de extensión de homotopías (o PEH), si para cada espacio topológico  $Y$ , y para toda función continua  $f : X \rightarrow Y$ , cada homotopía  $H : A \times I \rightarrow Y$  que satisface  $H(a, 0) = f(a)$  para todo  $a \in A$ , puede extenderse a una homotopía  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  que satisface  $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Un par de observaciones son apropiadas aquí. En primer lugar la propiedad sólo requiere que exista una homotopía a “alguna función continua”, no hace referencia alguna a la función final. Por otro lado, la intersección  $A \times \{0\}$  es cerrada, tanto en  $X \times \{0\}$ , como en  $A \times I$ , por lo que  $H$  y  $f$  definen de manera única una función continua

$$K : M_i = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y.$$

Se sigue que la PEH es equivalente a que cada función continua definida en  $M_i$  se extiende a  $X \times I$ .

**definición 14.1.** Un subespacio  $Z \subseteq X$  se dice un retracts de  $X$  si la inclusión  $i : Z \hookrightarrow X$  tiene una inversa por la izquierda, es decir, existe una función continua  $r : X \rightarrow Z$  tal que  $r \circ i = \text{Id}_Z$ .

**Proposición 14.2.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $Z \subseteq X$  un retracts de  $X$ . Entonces para todo espacio topológico  $Y$  se tiene que  $Z \times Y$  es un retracts de  $X \times Y$ .

**Demostración** Basta ver que la función  $\tilde{r} : X \times Y \rightarrow Z \times Y$  definida por  $\tilde{r}(x, y) = (r(x), y)$  es continua, y es una inversa por la izquierda de la inclusión.  $\square$

**Proposición 14.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $Z$  un subconjunto cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda función continua  $f : Z \rightarrow Y$  se extiende a  $X$ .*
2.  *$Z$  es un retracto de  $X$ .*

**Demostración** Si  $Z$  es un retracto y  $r : X \rightarrow Z$  es una inversa por la izquierda de la inclusión  $i : Z \hookrightarrow X$ , entonces cada función continua  $f : Z \rightarrow Y$  se extiende a  $f \circ r : X \rightarrow Y$ . Por otro lado, si cada función continua se extiende, entonces en particular, la identidad  $\text{id}_Z : Z \rightarrow Z$  se extiende a una función continua  $r : X \rightarrow Z$ .  $\square$

**Corolario 14.3.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El par  $(X, A)$  tiene la PEH.*
2.  *$M_i$  es un retracto de  $X \times I$ .*

**Corolario 14.3.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subconjunto cerrado. Sea  $Z$  un segundo espacio topológico. Si el par  $(X, A)$  tiene la PEH, entonces  $(X \times Z, A \times Z)$  tiene la PEH.*

**definición 14.4.** Un subespacio  $Z$  de un espacio  $X$  se dice un retracto de deformación fuerte de  $X$ , si existe una homotopía  $H : X \times I \rightarrow X$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $x \mapsto H(x, 0)$  es la identidad de  $X$ ,
2.  $H(x, 1) \in Z$  para todo  $x \in X$ , y
3.  $H(z, t) = z$  para todo  $t \in I$  y todo  $z \in Z$ .

Una homotopía que cumple estas 3 condiciones se denomina una retracción fuerte de  $X$  a  $Z$ . Cuando se cumplen sólo las dos primeras, se dice que  $Z$  es un retracto de  $X$  y que  $H$  es una retracción de  $X$  en  $Z$ . Cualquier

homotopía que cumple la tercera condición se dice constante en  $Z$ . En lo sucesivo, diremos que el par  $(X, A)$  tiene la propiedad fuerte de extensión de homotopías (o PFEH), si el espacio  $M_i = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ , definido antes, es un retracto de deformación fuerte del espacio  $X \times I$ .

El siguiente resultado es inmediato de las definiciones:

**Lema 14.5.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $Z$  un subconjunto cerrado. Si  $Z$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$ , entonces  $Z \times Y$  es un retracto de deformación fuerte de  $X \times Y$  para todo espacio topológico  $Y$ .*

**Corolario 14.5.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subconjunto cerrado. Sea  $Y$  un segundo espacio topológico. Si el par  $(X, A)$  tiene la PFEH, entonces  $(X \times Y, A \times Y)$  tiene la PFEH.*

El espacio  $M_i$  considerado hasta aquí es un caso particular de una construcción mucho más general que jugará un papel fundamental en lo que sigue.

**definición 14.6.** El cilindro de mapeo  $M_f$  de una función  $f : X \rightarrow Y$  es el cociente

$$\frac{(X \times I) \amalg Y}{\cong}$$

donde la única instancia no trivial de la relación  $\cong$  es  $(x, 0) \cong f(x)$ . Nótese que  $Y$  es un retracto de deformación de  $M_f$ .

El siguiente resultado es inmediato de las definiciones y se deja al lector:

**Lema 14.7.** *Sea  $M_f$  el cilindro de mapeo de una función  $f$ . Entonces existe una función continua  $h : M_f \rightarrow [0, 1]$  que satisface  $h([x, t]) = t$  para  $x \in X$ ,  $t \in I$ , y además  $h([y]) = 0$  para  $y \in Y$ .*

**ejemplo 14.8.** Probaremos que el par  $(I, \{0, 1\})$  tiene la PFEH, o equivalentemente que el subconjunto  $A = (I \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times I)$  es un retracto de deformación fuerte de  $I \times I$ . Consideremos el cuadrado  $I \times I$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  de la manera usual, es decir como el conjunto de puntos con coordenadas entre 0 y 1. Sea  $P = (1/2, 3/2)$ . Para cada punto  $(x, y)$  del cuadrado  $I \times I$ , sea  $f(x, y)$  el punto en el cual la recta que une  $P$  con  $(x, y)$  intersecta el conjunto  $A$  (Ver Figura 14.1). No es difícil comprobar que dicha

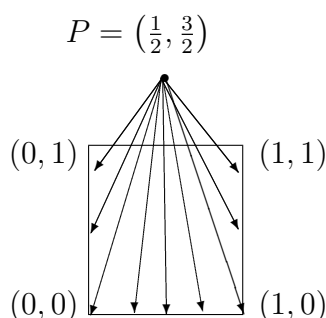


Figure 14.1: Proyectando el cuadrado en su borde no superior.

función está dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(0, \frac{y-3x}{1-2x}\right) & \text{si } 3x \leq y \\ \left(\frac{3x-y}{3-2y}, 0\right) & \text{si } y \leq 3x \leq 3-y \\ \left(1, \frac{y-3(1-x)}{1-2(1-x)}\right) & \text{si } 3x \geq 3-y \end{cases} .$$

Cada función está definida en un conjunto cerrado y coinciden en las rectas de intersección, por lo que definen una función continua por el Lema 5.21. Esta función  $f$  es una inversa por la izquierda de la inclusión. Esto prueba que  $A$  es un retracto. Para probar que es un retracto de deformación fuerte, consideramos la homotopía

$$H(x, y, t) = (1-t)(x, y) + tf(x, y),$$

y razonamos como en el capítulo precedente, en la demostración de que el plano con dos puntos removidos es homotópico a la figura 8.

Un argumento enteramente análogo, y que se deja al lector, permite demostrar el siguiente resultado:

**Lema 14.9.** *El conjunto  $L = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$  es un retracto de deformación fuerte del triángulo  $T$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ .*

En el capítulo 16 veremos un método via triangulaciones que permite dar una demostración simplificada de este resultado y del ejemplo que lo precede.

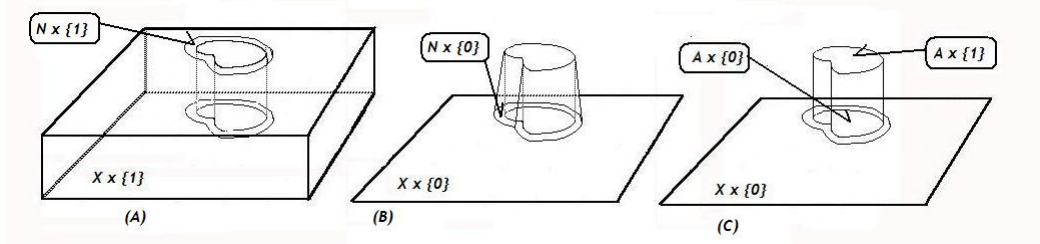


Figure 14.2: Ilustración de la demostración de la Proposición 14.11.

**definición 14.10.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto cerrado. Suponga que existe un espacio topológico  $Z$ ; así como funciones continuas  $f : Z \rightarrow A$  y  $j : M_f \rightarrow X$  con las siguientes propiedades:

1.  $U = j(M_f - Z \times \{1\})$  es una vecindad abierta de  $A$ .
2.  $j$ , vista como una función de  $M_f$  en  $N = \bar{U}$  es un homeomorfismo.

Entonces diremos que  $N$  es una vecindad de  $A$  en  $X$  tipo cilindro de mapeo.

**Proposición 14.11.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto cerrado. Suponga que  $A$  tiene una vecindad tipo cilindro de mapeo en  $X$ . Entonces el par  $(X, A)$  tiene la PFEH.

**Demostración** Nótese que la función  $h$  del Lema 14.7 puede extenderse a una función continua  $\tilde{h} : X \rightarrow I$  si se define como 1 en  $X \setminus N$ , ya que  $\overline{X \setminus N} \cap N \subseteq N \setminus U = h^{-1}(0)$  (utilizando, una vez más, el Lema 5.21). Esto nos permite utilizar la homotopía

$$H(x, s, t) = \left( x, (1-t)s + st(1 - \tilde{h}(x)) \right)$$

para retraer (fuertemente) el producto  $X \times I$  en el subconjunto

$$\Omega = \{(x, s) \in X \times I \mid s \leq 1 - \tilde{h}(x)\}.$$

El conjunto  $\Omega$  es el conjunto con forma de volcán en la Figura 14.2(B).

El siguiente paso es retraer fuertemente el volcán en el cilindro de mapeo de la Figura 14.2(C). Para ello observamos que el homeomorfismo  $j$  identifica



la ladera del volcán con el conjunto  $Z \times T$ , donde  $T$  es el triángulo en el Lema 14.9, al que se ha pegado dos conjuntos:

- El “plano basal”  $X \times \{0\}$ , el que contiene a los elementos de la forma  $(n, 0)$  con  $n \in \overline{(N - A)} = j(\widetilde{Z \times I})$ , donde  $\widetilde{Z \times I}$  es la imagen de  $Z \times I$  en  $M_f$ .
- El cilindro  $A \times I$ , que contiene a los puntos de la forma  $(f(z), t)$ , donde  $f(z)$  se identifica con  $[f(z)] \in M_f$  via  $j$ .

Todos estos puntos corresponden a los elementos en  $Z \times L$ , donde  $L$  se define como en el Lema 14.9. Como la homotopía obtenida en dicho lema deja fijos los puntos de  $L$ , la correspondiente retracción de  $Z \times T$  a  $Z \times L$  se extiende, vía Lema 5.21, por una homotopía constante, al resto de  $\Omega$ .  $\square$

**Proposición 14.12.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto cerrado. Suponga que el par  $(X, A)$  tiene la PEH, y que la inclusión  $i : A \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica. Entonces  $A$  es un retracto de deformación de  $X$ .*

**Demostración** Sea  $f : X \rightarrow A$  una inversa de homotopía de  $i$ , es decir  $f \circ i \sim \text{id}_A$  y  $i \circ f \sim \text{id}_X$ . En particular, existe una homotopía  $H : A \times I \rightarrow A$  tal que  $H(a, 0) = f(a)$  para cada  $a \in A$ , mientras que  $H(a, 1) = a$  para cada  $a \in A$ . Extendiendo esta homotopía a  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow A$ , de modo que  $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$ , y definiendo  $r(x) = \tilde{H}(x, 1)$ , se obtiene una inversa por la izquierda de  $i$  que es homotópica a la identidad en  $X$ .  $\square$

**Proposición 14.13.** *Sea  $X$  un espacio topológico Hausdorff y sea  $A$  un subconjunto cerrado. Suponga que el par  $(X, A)$  tiene la PEH, y que  $A$  es contractible. Entonces la proyección  $\pi : X \rightarrow X/A$  es una equivalencia homotópica.*

**Demostración** La propiedad de extensión de homotopías nos garantiza la existencia de una homotopía  $H : X \times I \rightarrow X$  que satisface las condiciones siguientes:

1.  $H$  es la identidad en 0, es decir satisface  $H(x, 0) = x$  para cada  $x \in X$ .
2. La restricción de  $H$  a  $A \times I$  es una contracción, es decir  $a \mapsto H(a, 1)$  es constante.

3. La contracción del punto anterior toma valores en  $A$ , es decir  $H(a, t) \in A$  para cada  $a \in A$  y cada valor del parámetro  $t$ .

Como  $I$  es localmente compacto,  $H$  puede verse como una función continua  $\widehat{H} : X \rightarrow C(I, X)$ . La propiedad 3 de arriba nos proporciona un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widehat{H}} & C(I, X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ X/A & \xrightarrow{\widetilde{H}} & C(I, X/A) \end{array} ,$$

para una función apropiada  $\widetilde{H}$ , dado que  $\pi_* \circ \widehat{H} : X \rightarrow C(I, X/A)$  lleva cualquier punto de  $A$  a la función constante definida por  $c(t) = \bar{a}$ , donde  $\bar{a} \in X/A$  es la clase de los puntos de  $A$ . Concluimos que existe una homotopía  $\overline{H} : X/A \times I \rightarrow X/A$  que satisface  $\pi \circ H = \overline{H} \circ (\pi \times \text{id}_I)$ , y tal que las funciones  $h_0 : X \rightarrow X$  y  $\bar{h}_0 : X/A \rightarrow X/A$  definidas por  $h_0(x) = H(x, 0)$  y  $\bar{h}_0(x) = \overline{H}(x, 0)$  son la identidad, mientras las funciones  $h_1 : X \rightarrow X$  y  $\bar{h}_1 : X/A \rightarrow X/A$  definidas por  $h_1(x) = H(x, 1)$  y  $\bar{h}_1(x) = \overline{H}(x, 1)$  hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_1} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{\bar{h}_1} & X/A \end{array} .$$

Como  $h_1$  envía cada punto de  $A$  en un mismo punto, se factoriza a través de una función  $g : X/A \rightarrow X$  que hace que el triángulo superior del siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_1} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{\bar{h}_1} & X/A \end{array} .$$

El triángulo inferior debe conmutar también por ser  $\pi$  epiyectiva (se utiliza la  $\pi$  de la izquierda en el diagrama). Se concluye que  $g \circ \pi = h_1$  y  $\pi \circ g = \bar{h}_1$  son homotópicas a las identidades respectivas. Esto dice que  $X$  y  $X/A$  son homotópicamente equivalentes.  $\square$

Sea  $A$  un subconjunto de un espacio  $X$ , y sea  $f : A \rightarrow Y$  una función continua. El espacio  $X \coprod_f Y$  se define como el espacio cociente

$$X \coprod_f Y = \frac{X \coprod Y}{\equiv},$$

donde la única instancia no trivial de la relación es  $a \equiv f(a)$  para  $a \in A$ .

**Lema 14.14.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hausdorff. Si  $Z$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$ , entonces para toda función  $f : A \rightarrow Y$ , con  $A \subseteq Z$  compacto, se tiene que  $Z \coprod_f Y$  es un retracto de deformación fuerte de  $X \coprod_f Y$ .*

**Demostración** Sea  $\tilde{X} = X \coprod_f Y$  y  $\tilde{Z} = Z \coprod_f Y$ . Sea  $H : X \times I \rightarrow X$  una retracción fuerte de  $X$  en  $Z$ . Definimos una retracción  $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$  de  $\tilde{X}$  en  $\tilde{Z}$  como sigue:

$$H(u, t) = \begin{cases} H(x, t) & \text{si } u = [x] \text{ para algún } x \in X, \\ u & \text{si } u = [y] \text{ para algún } y \in Y. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que  $H$  está bien definida, es decir, que las dos definiciones de arriba coinciden en los puntos que han sido identificados. La continuidad sigue del hecho de que las imágenes de  $X$  e  $Y$  en  $X \coprod_f Y$  son cerradas (por Lema 5.21). De hecho, por ser  $A$  y  $f(A)$  compactos, se tiene que  $X \setminus A$  e  $Y \setminus f(A)$  son abiertos en  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Como  $(X \setminus A) \subseteq X \coprod_f Y$  es también la pre-imagen del complemento en  $X \coprod_f Y$  de la imagen de  $Y$ , la imagen de  $Y$  es cerrada. La afirmación para  $X$  es análoga.  $\square$

**Proposición 14.15.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hausdorff compactos. Sea  $A$  un subconjunto cerrado (y por lo tanto compacto) de  $X$ . Suponga que el par  $(X, A)$  tiene la PFEH, y que las funciones  $f, g : A \rightarrow Y$  son homotópicas. Entonces los espacios  $X \coprod_f Y$  y  $X \coprod_g Y$  son homotópicamente equivalentes.*

**Demostración** Sea  $H : A \times I$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ , y sea  $Z = (X \times I) \coprod_H Y$ . Si el par  $(X, A)$  tiene la PFEH, entonces  $M_i$  es un retracto de deformación fuerte de  $X \times I$ , y por el lema anterior,  $M_i \coprod_H Y$  es un retracto de deformación fuerte de  $Z$ . Afirmamos que  $M_i \coprod_H Y$  es homeomorfo a  $X \coprod_f Y$ . De hecho la inclusión  $j : X \cong X \times \{0\} \rightarrow M_i$  induce una inclusión

continua  $\phi : X \coprod_f Y \rightarrow M_i \coprod_H Y$ , que es la identidad en  $Y$ , puesto que  $H$  se restringe a  $f$  en  $A \times \{0\}$ . Por la compacidad, basta observar que  $\phi$  es epiyectiva. Esto es inmediato, pues cada punto de  $M_i$  que no está en  $X \times \{0\}$  se identifica a algún punto de  $Y$ . Concluimos que  $X \coprod_f Y \sim Z$ . La demostración de que  $X \coprod_g Y \sim Z$  se obtiene reemplazando 0 por 1 en la definición de  $M_i$ .  $\square$

Una familia de espacios topológicos que siempre tiene la PFEH es la de CW-complejos. Por un disco, o más precisamente un  $n$ -disco, se entiende un espacio topológico  $D$  homeomorfo al disco unitario cerrado  $B[0; 1] \subseteq \mathbb{R}^n$ . El borde  $\partial D$  de un  $n$ -disco  $D$  es el subespacio correspondiente al borde de  $B[0; 1]$  en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, a  $B[0; 1] \setminus B(0; 1)$ . Un CW-complejo es un espacio topológico  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$ , que se construye, paso a paso, a partir de la siguiente información:

- Una sucesión de familias  $\left( \{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_n} \right)_{n=0}^{\infty}$ , donde  $\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_0}$  es una familia de puntos y, para cada  $n \geq 1$ ,  $\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_n}$  es una familia de  $n$ -discos.
- Una familia de funciones de pegado, las que son funciones continuas  $\phi_\omega : \partial D_\omega \rightarrow X^{n-1}$ , donde  $X^{n-1}$  es el espacio obtenido al identificar los discos cuyas dimensiones no excedan  $n - 1$ .

Cada espacio sucesivo  $X^n$  se obtiene pegando los  $n$ -discos de la familia  $\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_n}$  a  $X^{n-1}$  mediante las correspondientes funciones de pegado. El espacio  $X$  se define así como la unión creciente (o si se lo prefiere, el límite directo) de los espacios  $X^n$ . El subespacio  $X^n$  recibe el nombre de  $n$ -esqueleto del complejo.

**ejemplo 14.16.** Nótese que la condición de pegar el borde de cada  $n$ -disco al  $n - 1$  esqueleto nos impide pegar, por ejemplo, todo el borde de un  $n$ -disco en un punto interior de otro  $n$ -disco, como en la Figura 14.3, pero no de un  $(n - 1)$ -disco.

**ejemplo 14.17.** En la Figura 14.4 se muestran algunos ejemplos de CW-complejos. En (i), se construye un toro tomando un punto  $p$  como 0-esqueleto y dos círculos como uno esqueleto. Cada círculo se visualiza como un segmento cuyo borde (consistente en dos puntos) está identificado con  $p$ . El toro así definido tiene un único disco bidimensional, el cual puede pensarse como un cuadrado cuyo borde se pega como indica la figura. En (ii), la esfera se

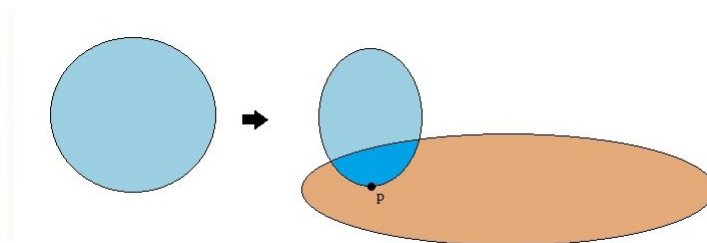


Figure 14.3: Esta no es una posible función de pegado si los dos discos tienen la misma dimensión.

construye como un complejo cuyos 0-esqueleto y 1-esqueleto consisten precisamente de un único punto. Todo el borde de la 2-celda se identifica con este punto. En (iii) se muestra una construcción algo más compleja de la esfera, con 4 vértices, 6 aristas, y 4 caras bidimensionales.

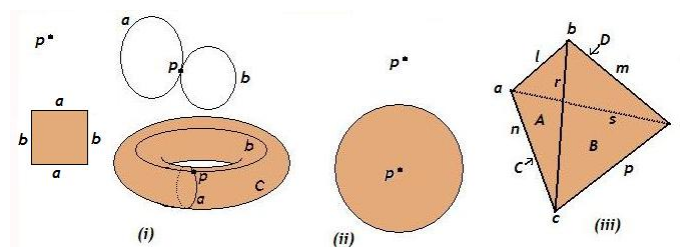


Figure 14.4: Algunos espacios descritos como CW-complejos.

Si  $X$  es un CW-complejo y si  $A$  es un subcomplejo, es decir un CW-complejo formado por una subfamilia de las celdas que conforman  $X$ , entonces el par  $(X, A)$  tiene la PFEH. Para probar esto es suficiente demostrar el lema siguiente, para luego aplicar, una vez más, el Lema 5.21.

**Lema 14.18.** *El par  $(D, \partial D)$ , donde  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  es un disco con borde  $\partial D$ , tiene la PFEH.*

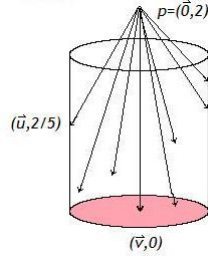


Figure 14.5: Proyectando el cilindro en su borde no superior.

**Demostración** Consideremos el cilindro  $D \times I$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la manera usual, es decir

$$D \times I = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \mid \max_{0 \leq t \leq 1} \{ |t|, \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \} \leq 1 \right\}.$$

Sea  $P = (0, \dots, 0, 2)$ . Para cada punto  $(\vec{x}, t)$  del cuadrado  $I \times I$ , sea  $f(\vec{x}, t)$  el punto en el cual la recta que une  $P$  con  $(\vec{x}, t)$  intersecta el conjunto  $(D \times \{0\}) \cup \partial D \times I$  (Ver Figura 14.5). No es difícil comprobar, razonando como en el Ejemplo 14.8, que dicha función está dada por:

$$f(\vec{x}, t) = \begin{cases} \left( \frac{2\vec{x}}{2-t}, 0 \right) & \text{si } t \leq 2 - 2x \\ \left( \vec{u}, \frac{t+2x-2}{x} \right) & \text{si } t \geq 2 - 2x \end{cases},$$

donde  $x = |\vec{x}|$  y  $\vec{u} = \vec{x}/x$ . Cada función está definida en un conjunto cerrado y coinciden en el cono de intersección, por lo que definen una función continua con las propiedades requeridas por el mismo lema de siempre (el 5.21!).

**ejemplo 14.19.** En el primer ejemplo, tomaremos el collar de una cuenta, el espacio que se obtiene al identificar los extremos del intervalo  $I$  con los polos norte y sur de una esfera. Este ejemplo requiere tomar  $Y = S^2$ ,  $X = I$  y  $A = \{0, 1\}$  en la teoría precedente. Si  $f : A \rightarrow Y$  se define de modo que  $f(0)$  sea el polo norte y  $f(1)$  sea el polo sur, como en la figura 14.6, el collar de una cuenta es el espacio  $X \amalg_f Y$ . Si ahora tomamos  $g : A \rightarrow Y$  de modo que  $g(0) = g(1)$ , el espacio resultante  $X \amalg_g Y$  es conocido como el medallón. Una aplicación directa del resultado precedente nos dice que el collar de una cuenta y el medallón son homotópicamente equivalentes.

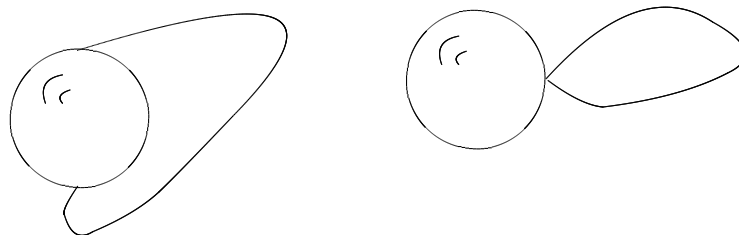


Figure 14.6: El collar y el Medallón.

**ejemplo 14.20.** En el siguiente ejemplo,  $X = D$  es un disco,  $A = \partial D$  es su borde, mientras que  $Y$  es el círculo unitario. Consideremos el espacio que se obtiene al pegar el borde del disco  $D$  al círculo  $S^1$  mediante una función del tipo  $a * a * a^{-1}$ , que recorre el círculo dos veces en una dirección, y una en sentido contrario. Podemos realizar dicha yuxtaposición mediante la fórmula  $f(e^{2\pi xi}) = e^{2\pi f(x)i}$ , donde  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } x \leq 2/3 \\ 4 - 3x & \text{if } x \geq 2/3 \end{cases} .$$

Este espacio, conocido como el *Gorrito de burro*, es contractible, dado que es homotópicamente equivalente al disco. El disco puede verse como el espacio que se obtiene al pegar el borde del disco  $D$  al círculo  $S^1$  mediante la función identidad. La Homotopía se realiza, por lo tanto mediante una función del tipo

$$H(e^{2\pi xi}, t) = e^{2\pi [tx + (1-t)f(x)]i} .$$

Esta función está bien definida y es continua, dado que  $x = 0$  y  $x = 1$  definen el mismo valor  $H(e^{2\pi \cdot 0 \cdot i}, t) = H(e^{2\pi \cdot 1 \cdot i}, t) = 1$  para cada valor de  $t$ .

## Ejercicios

1. Sea  $G$  un grafo, es decir el espacio que se obtiene a partir de una unión finita disjunta de intervalos (o aristas), identificando algunos de sus extremos (o vértices). Sea  $A$  una arista de  $G$  con vértices distintos. Probar que  $G$  es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene identificando entre sí todos los puntos de  $A$ .

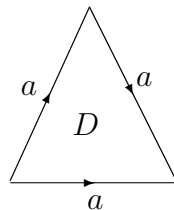


Figure 14.7: El gorrito de burro.

2. Probar que los espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes si:
  - (a)  $X$  es la unión de dos círculos con un punto en común e  $Y$  es la unión de un círculo con uno de sus diámetros.
  - (b)  $X$  es la unión de una esfera con uno de sus diámetros e  $Y$  es el espacio que se obtiene al identificar dos puntos de una esfera.
  - (c)  $X$  es la unión de una esfera con uno de sus diámetros e  $Y$  es la unión de un círculo y una esfera con un punto en común.
3. Clasifique las letras del alfabeto en clases de equivalencia homotópica.
4. Sea  $X$  un espacio topológico, sea  $A$  un subconjunto cerrado, y sea  $p \in A$ . Supongamos que existe una homotopía  $H : X \times I \rightarrow X$  tal que:

$$H(x, 0) = x \forall x \in X, \quad H(a, 1) = p \forall a \in A,$$

$$H(a, t) \in A \quad \forall (a, t) \in A \times I.$$

Probar que  $X$  es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene al identificar todos los puntos de  $A$ .

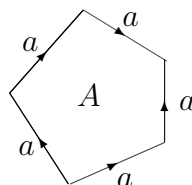
5. Probar que el espacio proyectivo  $n$ -dimensional es un complejo de celdas.
6. La conjunción  $X * Y$  de dos espacios  $X$  e  $Y$  se define como el cociente del espacio  $X \times Y \times I$  por las identificaciones  $(x, y_1, 0) \cong (x, y_2, 0)$   $(x_1, y, 1) \cong (x_2, y, 1)$ . Probar que la conjunción de dos complejos de



celdas es un complejo de celdas. Construir el cono y la suspensión de un espacio  $X$  mediante conjunciones.

7. Probar que si  $A$  es un retracto de deformación de  $X$ , entonces el par  $(X, A)$  tiene la propiedad de extensión de homotopías.
8. Probar que todo grafo finito es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene pegando un número finito de círculos por un punto.
9. Dar un ejemplo de un complejo de celdas  $X$  homeomorfo al toro y de un subcomplejo  $A$  tal que  $X/A$  es homeomorfo a la esfera. Puede  $A$  ser contractible?
10. Sea  $X$  un complejo de celdas y sea  $A$  un subcomplejo contractible. Demostrar directamente que si pegamos  $X$  con  $A$  mediante la identidad  $i : A \rightarrow A$  se obtiene un espacio homeomorfo a  $X$ , mientras que si se pega  $X$  con  $A$  mediante una función constante  $c : A \rightarrow A$  se obtiene un espacio homotópicamente equivalente a  $X/A$ . Utilizar esto para dar una segunda demostración de la equivalencia homotópica entre  $X$  y  $X/A$ .
11. Probar que el tipo de homotopía de un complejo de celdas depende sólo del tipo de homotopía de las funciones que se utilizan para pegar el borde de cada  $n$ -celda al  $(n - 1)$ -esqueleto.
12. Sean  $X$  e  $Y$  complejos de celdas arco-conexos y sea  $X * Y$  el espacio que se obtiene al pegar  $X$  con  $Y$  por un punto. Probar el tipo de homotopía del espacio resultante es independiente de los puntos escogidos. Es cierto que el tipo de homeomorfía del espacio resultante es independiente de los puntos escogidos?
13. Probar que un espacio homotópicamente equivalente a un espacio contractible es contractible.

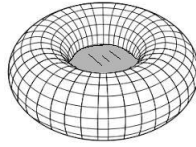
14. Probar que el espacio de identificación:



es contractible (Sugerencia: definirlo pegando una 2-celda a un círculo mediante una función apropiada).

15. Probar que si  $X$  e  $Y$  son contractible, entonces  $X * Y$  es contractible.
16. Probar que si  $Y$  es un espacio contractible, entonces el espacio que se obtiene al pegar  $X$  e  $Y$  por un punto es homotópicamente equivalente a  $X$ .
17. Sea  $Z$  el espacio que se obtiene pegando  $X$  e  $Y$  por un punto y sea  $W$  el espacio que se obtiene pegando los extremos de un intervalo a  $X \amalg Y$  mediante una función  $f : \{0, 1\} \rightarrow X \amalg Y$ , tal que  $f(0) \in X$  y  $f(1) \in Y$ . Probar que  $Z$  y  $W$  son homotópicamente equivalentes.
18. Sea  $Z$  un complejo de celdas que es la unión de dos subcomplejos contractibles  $X$  e  $Y$ , de tal modo que la intersección  $X \cap Y$  es también contractible. Probar que  $Z$  es contractible.
19. Sea  $A$  la unión de la esfera unitaria (centrada en el origen) con su proyección en el plano  $XY$  y con un segmento que une los puntos  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, -1)$ . Sea  $B$  el espacio que se obtiene al unir el plano  $XY$  con dos círculos de radio 1 centrados en los puntos  $(2, 0, 1)$  y  $(-2, 0, 1)$ , así como dos esteras de radio 1 centradas en los puntos  $(0, 2, 1)$  y  $(0, -2, 1)$ . Determine si  $A$  y  $B$  son homotópicamente equivalentes o no.
20. Determine si el toro (hueco), con una disco pegado horizontalmente por el círculo central interno como se vé en la figura, es o no homotópicamente equivalente al medallón, es decir la unión por un punto

de un círculo y una esfera.



21. Probar que  $\mathbb{R}^3 - C$ , donde  $C$  es un círculo, es homotópicamente equivalente al medallón (Sugerencia: usar el ejercicio anterior).

# Chapter 15

## El grupo fundamental

En lo que sigue,  $I$  denota el intervalo  $[0, 1]$ .

Sea  $X$  un espacio topológico arco-conexo y sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $X$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  caminos en  $X$  que satisfacen

$$\alpha(0) = \beta(0) = x, \quad \beta(1) = \alpha(1) = y.$$

Una homotopía  $H$  entre los caminos  $\alpha$  y  $\beta$  se dice una homotopía de extremos fijos si satisface:

$$H(0, t) = x, \quad H(1, t) = y, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Equivalentemente, dos caminos  $\alpha$  y  $\beta$  tienen una homotopía de extremos fijos entre ellos si están en la misma componente arco-conexa del subespacio

$$C_{x,y}(I, X) = \{\gamma \in C(I, X) \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \subseteq C(I, X).$$

El conjunto de clases de homotopía de tales caminos se denota  $\pi_1(X; x, y)$ . Si  $y = x$ , escribiremos  $C_x(I, X)$  y  $\pi_1(X; x)$  en lugar de  $C_{x,x}(I, X)$  y  $\Pi_1(X; x, x)$ . Recordemos que para cada par de caminos  $\alpha$  y  $\beta$  que satisfacen  $\alpha(1) = \beta(0)$  podemos definir su producto o yuxtaposición mediante la fórmula siguiente:

$$\alpha * \beta(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{array} \right\|.$$

La yuxtaposición de dos caminos es también un camino por el lema 10.6.

**Proposición 15.1.** *La función*

$$m : C_{x,y}(I, X) \times C_{y,z}(I, X) \rightarrow C_{x,z}(I, X)$$

*definida por  $m(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$  es continua con respecto a la topología compacto-abierta.*

**Demostración** Sea  $\mathcal{O}_{C,U}$  un abierto de la sub-base canónica de la topología compacto-abierta, y definamos los conjuntos compactos

$$C' = 2C \cap I = \left\{ a \in I \mid \frac{a}{2} \in C \right\}, \quad C'' = (2C-1) \cap I = \left\{ a \in I \mid \frac{a+1}{2} \in C \right\}.$$

Se tiene que  $\alpha * \beta(C) \subseteq U$  si y sólo si  $\alpha(C') \subseteq U$  y  $\beta(C'') \subseteq U$ . En particular se tiene que  $m(\mathcal{O}_{C',U} \times \mathcal{O}_{C'',U}) \subseteq \mathcal{O}_{C,U}$ , y  $\mathcal{O}_{C',U} \times \mathcal{O}_{C'',U}$  es una vecindad de  $(\alpha, \beta)$  para cada par de caminos  $\alpha$  y  $\beta$  que satisfacen  $\alpha * \beta \in \mathcal{O}_{C,U}$ .  $\square$

El resultado siguiente es ahora inmediato, si se recuerda que las funciones continuas llevan conjuntos conexos en conjuntos conexos y que el producto de espacios conexos es conexo.

**Corolario 15.1.1.** *La componente arco-conexa de  $\alpha * \beta$  en  $C_{x,z}(I, X)$  depende sólo de la componente arco-conexa de  $\alpha$  en  $C_{x,y}(I, X)$  y de la componente arco-conexa de  $\beta$  en  $C_{y,z}(I, X)$ .*

Se sigue del corolario precedente que la función  $m$  induce una función bien definida

$$\tilde{m} : \pi_1(X; x, y) \times \pi_1(X; y, z) \rightarrow \pi_1(X; y, z).$$

El producto  $\tilde{m}(a, b)$  de dos clases se homotopía  $a$  y  $b$  se denotará simplemente  $ab$  en lo sucesivo, y se denominará el producto o la multiplicación de las clases  $a$  y  $b$ .

Recordemos que un camino  $\beta$  se dice una reparametrización de un camino  $\alpha$  si existe un homeomorfismo creciente  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\beta = \alpha \circ h$ .

**Lema 15.2.** *Si  $\beta = \alpha \circ h$ , donde  $h : I \rightarrow I$  es una función continua tal que  $h(0) = 0$  y  $h(1) = 1$ , entonces existe una homotopía de extremos fijos entre  $\alpha$  y  $\beta$ . En particular, la conclusión se obtiene si  $\beta$  es una reparametrización de  $\alpha$ .*

**Demostración** Basta tomar  $H(s, t) = \alpha(s(1-t) + h(s)t)$ .  $\square$

**Proposición 15.3.** *La multiplicación de caminos define una estructura de grupo en  $\pi_1(X; x)$ .*

Este grupo recibe el nombre de grupo fundamental de  $X$  con base en  $x$ .

**Demostración** Para ver que el producto de clases es asociativo basta ver que los caminos  $\delta_1 = (\alpha * \beta) * \gamma$  y  $\delta_2 = \alpha * (\beta * \gamma)$  son homotópicos. De hecho

$$\delta_1(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ \beta(4s - 1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|,$$

y

$$\delta_2(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(4s - 2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ \gamma(4s - 3) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|.$$

Afirmamos que  $\delta_1$  es una reparametrización de  $\delta_2$ , de hecho  $\delta_1 = \delta_2 \circ h$  donde

$$h(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ s + 1/4 & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ (s + 1)/2 & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|.$$

Por el resultado precedente, existe una homotopía de extremos fijos entre  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .

Sea  $e$  el camino constante. Entonces  $\alpha * e = \alpha \circ h$  donde

$$h(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|,$$

por lo que nuevamente se aplica el lema 15.2, y se tiene  $[\alpha][e] = [\alpha]$ . La demostración de que  $[e][\alpha] = [\alpha]$  es análoga.

Finalmente si  $\alpha$  es un camino cerrado, también lo es el camino  $\alpha^{\text{op}}$  definido por  $\alpha^{\text{op}}(s) = \alpha(1 - s)$ , de donde

$$\alpha * \alpha^{\text{op}}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2 - 2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|,$$

por lo que una homotopía de extremos fijos entre este camino y el camino constante  $e$  está dada por

$$H(s, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2ts) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 2ts) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|.$$

La continuidad de la función  $H$  arriba definida sigue fácilmente del Lema 5.21. La demostración de que  $\alpha^{\text{op}} * \alpha$  es homotópico a  $e$  es análoga.  $\square$

La misma demostración de la proposición anterior demuestra que la multiplicación de clases es asociativa y que  $[e][\alpha] = [\alpha]$  dondequiera que los productos estén definidos. En particular se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 15.4.** *La multiplicación de caminos define una acción por la izquierda del grupo  $\pi_1(X; x)$  en el conjunto  $\pi_1(X; x, y)$ .  $\square$*

**Proposición 15.5.** *La acción de  $\pi_1(X; x)$  en  $\pi_1(X; x, y)$  es libre y transitiva.*

**Demostración** Para probar que la acción es libre, observamos que si  $a$  es una clase de caminos cerrados en  $\pi_1(X; x)$ , y si  $g = [\gamma]$  es una clase de caminos de  $x$  a  $y$  que satisface  $ag = g$ , entonces  $agg^{-1} = gg^{-1}$ , donde  $g^{-1}$  es la clase del camino inverso  $\gamma^{\text{op}}$ . Nótese que la demostración de que  $\gamma * \gamma^{\text{op}}$ , dada en la página anterior, no depende en absoluto de que el punto final de  $\gamma$  coincida con su punto inicial. Se sigue que  $gg^{-1}$  es la identidad  $e$  de  $\pi_1(X; x)$ , de donde concluimos que  $a = ae = e$ .

Para la transitividad, observamos que, si  $a$  y  $b$  son dos clases de caminos de  $x$  a  $y$ , y si  $e_y = [c_y]$  denota la clase del camino constante  $c_y \in C_y(I, X)$ , entonces tenemos una cadena de identidades:

$$a = ae_y = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b, \quad (15.1)$$

donde  $ab^{-1}$ , es la clase del camino  $\alpha * \beta^{\text{op}}$ , un camino cerrado con extremos en  $x$ , por lo que  $g = ab^{-1}$  es un elemento de  $\pi_1(X; x)$  que satisface  $gb = a$ .  $\square$

**Proposición 15.6.** *Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $X$  y sea  $\gamma$  un camino que une  $x$  e  $y$ . La función  $a \mapsto [\gamma]a[\gamma^{\text{op}}]$  define un isomorfismo entre  $\pi_1(X; y)$  y  $\pi_1(X; x)$ .*

**Demostración** Para ver que es un homomorfismo, basta ver que  $\gamma^{\text{op}} * \gamma$  es homotópico a un camino constante y esta demostración es análoga al caso de un camino cerrado por lo que se deja como ejercicio al lector. El homomorfismo inverso es entonces  $b \mapsto [\gamma^{\text{op}}]b[\gamma]$ .  $\square$

En particular, la clase de isomorfía del grupo fundamental de un espacio arco-conexo es independiente del punto base. Sin embargo, el isomorfismo entre los grupos  $\pi_1(X; y)$  y  $\pi_1(X; x)$  no es canónico en general. De hecho si  $\delta$  es un segundo camino entre  $x$  e  $y$  se tiene

$$[\delta]a[\delta^{\text{op}}] = ([\delta][\gamma^{\text{op}}])[\gamma]a[\gamma^{\text{op}}]([\gamma][\delta^{\text{op}}]).$$

Dado que las clases  $[\delta][\gamma^{\text{op}}] = [\delta][\gamma]^{-1}$  y  $[\gamma][\delta^{\text{op}}] = [\gamma][\delta]^{-1}$  son inversas, el homomorfismo entre  $\pi_1(X; y)$  y  $\pi_1(X; x)$  está definido sólo módulo conjugación. Sin embargo, cuando  $\pi_1(X; y)$  es abeliano (y por lo tanto también  $\pi_1(X; x)$ ), entonces el homomorfismo es canónico.

**definición 15.7.** Un espacio topológico arco-conexo se dice simplemente conexo si el grupo  $\pi_1(X; x)$  es trivial para algún (cada) punto  $x$  de  $X$ .

**Proposición 15.8.** *En un espacio topológico simplemente conexo el conjunto  $\pi_1(X; x, y)$  es trivial para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de  $X$ .*

**Demostración** Por la proposición 15.5, la acción de  $\pi_1(X; x)$  en  $\pi_1(X; x, y)$  es transitiva, de modo que  $\pi_1(X; x)$  es trivial, también lo es  $\pi_1(X; x, y)$ .  $\square$

**Proposición 15.9.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces se tiene una función  $f_* : \pi_1(X; x, y) \rightarrow \pi_1(Y; f(x), f(y))$  definida por  $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ , para cada par de puntos  $x, y \in X$ . Estas funciones satisfacen la relación  $f_*(ab) = f_*(a)f_*(b)$  cada vez que el producto  $ab$  está definido.*

**Demostración** Afirmamos que la imagen  $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$  es independiente de la elección del camino  $\alpha$  que sirve de representante a la clase. Esto es una consecuencia del hecho de que la composición con  $f$  es continua en la topología compacto-abierta, por lo que lleva componentes arco-conexas en componentes arco-conexas.

La última propiedad sigue del hecho de que  $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ , lo que es inmediato a partir de la definición de yuxtaposición de caminos.  $\square$

**Corolario 15.9.1.** *La correspondencia  $f \mapsto f_*$ , que asigna a cada función continua  $f : X \rightarrow Y$  un homomorfismo*

$$f_* : \pi_1(X; x) \rightarrow \pi_1(Y; f(x)),$$

*de acuerdo a la Proposición 15.9, satisface las identidades  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  e  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X; x)}$ , cada vez que la composición tenga sentido.*

**Corolario 15.9.2.** *Espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos.*

**Proposición 15.10.** *Sean  $X_1$  e  $X_2$  espacios topológicos. Sea  $X = X_1 \times X_2$ . Sea  $p_i : X \rightarrow X_i$  la proyección en la  $i$ -ésima coordenada. Entonces la función*

$$\left( (p_1)_*, (p_2)_* \right) : \pi_1(X; (x_1, x_2)) \rightarrow \pi_1(X_1; x_1) \times \pi_1(X_2; x_2)$$

*es un isomorfismo.*



**Demostración** Basta ver que cada curva cerrada  $\alpha : I \rightarrow X$  con extremos en  $x = (x_1, x_2)$  es de la forma  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ , donde cada  $\alpha_i$  es un camino cerrado con extremos en  $x_i$ . Basta ver que dos de tales curvas son homotópicas si y sólo si las coordenadas correspondientes son homotópicas. Para esto observamos que si  $H_i$  es una homotopía entre  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  entonces  $H = (H_1, H_2)$  es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ , y que toda homotopía tiene esta forma.  $\square$

**Proposición 15.11.** *Todo grupo topológico tiene grupo fundamental abeliano.*

**Demostración** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos con extremos en la identidad  $e$  del grupo topológico  $G$ , y sean  $a$  y  $b$  las clases respectivas. Sea  $\mu : G \times G \rightarrow G$  la multiplicación en  $G$ . Si identificamos  $\pi_1(G; (e, e))$  con  $\pi_1(G; e) \times \pi_1(G; e)$ , tenemos que  $\mu_*(a, b) = c$  donde  $c$  es la clase de la curva  $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$ . Como  $\mu_*(a, b)$  depende sólo de las clases  $a$  y  $b$ , y no de los representantes  $\alpha$  y  $\beta$ , podemos reemplazar  $\alpha$  por  $\alpha * c_e$  y  $\beta$  por  $c_e * \beta$ , donde  $c_e$  es el camino constante en  $e$ . Como

$$(\alpha * \beta)(t) = (\alpha * c_e)(t)(c_e * \beta)(t),$$

se sigue que  $\mu_*(a, b) = ab$ , por un cálculo sencillo que se deja al lector. Reemplazando ahora  $\alpha$  por  $c_e * \alpha$  y  $\beta$  por  $\beta * c_e$ , se tiene  $\mu_*(a, b) = ba$ . Se concluye que  $ab = ba$ .  $\square$

**Proposición 15.12.** *Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  funciones homotópicas. Sea  $H : X \times I \rightarrow Y$  una homotopía entre ellas. Sea  $\gamma(t) = H(x, t)$ . Entonces para todo  $a \in \pi_1(X; x)$  se tiene  $f_*(a) = cg_*(a)c^{-1}$ , donde  $c \in \pi_1(Y; f(x), g(x))$  es la clase de  $\gamma$ .*

**Demostración** Sea  $\alpha$  un representante de la clase  $a$ . Basta ver que existe una homotopía de extremos fijos entre  $f \circ \alpha$  y  $[\gamma * (g \circ \alpha)] * \gamma^{-1}$ . Una tal homotopía es

$$K(s, t) = \begin{cases} H(x, 4s) & \text{si } 0 \leq s \leq t/4 \\ H\left(\alpha\left[\frac{4s-t}{4-3t}\right], t\right) & \text{si } t/4 \leq s \leq 1-t/2 \\ H(x, 2(1-s)) & \text{si } 1-t/2 \leq s \leq 1 \end{cases} .$$

Dejamos al lector la tarea de comprobar que  $K$  esta bien definida y es continua, utilizando el Lema 5.21. Nótese que tenemos, por un lado, la identidad

$$K(s, 0) = H(\alpha[s], 0) = f \circ \alpha(s),$$

mientras que

$$K(s, 1) = \begin{cases} H(x, 4s) = \gamma(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ H\left(\alpha\left[\frac{4s-1}{4-3}\right], 1\right) = g \circ \alpha(4s-1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ H(x, 2(1-s)) = \gamma^{-1}(2s-2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} .$$

□

**Corolario 15.12.1.** *Si  $f$  es una equivalencia homotópica, entonces  $f_*$  es un isomorfismo.*

**Demostración** Sea  $g$  una función continua tal que  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son homotópicas a las identidades de los espacios correspondientes. La proposición implica que si  $f \circ g$  es homotópica a la identidad, entonces  $f_* \circ g_*$  es de la forma  $a \mapsto cac^{-1}$  para algún camino  $c$  no necesariamente cerrado. Se sigue que  $f_* \circ g_*$  es un isomorfismo, y por lo tanto  $f_*$  tiene inversa por la derecha y  $g_*$  tiene inversa por la izquierda. Como podemos intercambiar  $f$  y  $g$ , el resultado sigue. □

**Proposición 15.13.** *Sea  $X$  un espacio topológico arco-conexo. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, y si  $f(x) = f(x') = y$ , entonces los subgrupos  $f_*[\pi_1(X; x)]$  y  $f_*[\pi_1(X; x')]$  son conjugados.*

**Demostración** Si  $\lambda$  es un camino que une  $x$  con  $x'$ , se tiene un isomorfismo  $\phi : \pi_1(X; x') \rightarrow \pi_1(X; x)$  definido por  $[\mu] \mapsto [\lambda * \mu * \lambda^{-1}]$ , de donde se tienen las ecuaciones

$$f_*\left(\pi_1(X; x')\right) = \left\{ [f \circ \mu] \mid [\mu] \in \pi_1(X; x') \right\}$$

y

$$\begin{aligned} f_*\left(\pi_1(X; x)\right) &= \left\{ [f \circ \nu] \mid [\nu] \in \pi_1(X; x) \right\} = \\ &= \left\{ [f \circ (\lambda * \mu * \lambda^{\text{op}})] \mid [\mu] \in \pi_1(X; x') \right\}, \end{aligned}$$

las que implican

$$f_*\left(\pi_1(X; x)\right) = [f \circ \lambda]f_*\left(\pi_1(X; x')\right)[f \circ \lambda]^{-1}.$$

Como  $f \circ \lambda$  es un camino cerrado,  $[f \circ \lambda] \in \pi_1(Y; y)$  y el resultado sigue.  $\square$

Todo lo anterior sería vacío si todos los espacios topológicos tuviesen grupo fundamental trivial. Para probar que este no es el caso, calculemos el grupo fundamental del círculo. De hecho demostraremos el siguiente resultado:

**Proposición 15.14.** *La función número de vueltas  $\Phi : \pi_1(S^1; 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  es un isomorfismo.*

**Demostración** Como se observó al final del capítulo 13, existe una función levantamiento continua y epiyectiva

$$L : C_1(I, S^1) \rightarrow C_0(I, \mathbb{R}).$$

Además  $L(\alpha * \beta) = L(\alpha) * L'(\beta)$ , donde  $L'(\beta)$  es un levantamiento de  $\beta$  cuyo punto inicial es el punto final de  $L(\alpha)$ . Se concluye que

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha * \beta) &= L(\alpha * \beta)(1) - L(\alpha * \beta)(0) = L'(\beta)(1) - L(\alpha)(0) \\ &= L'(\beta)(1) - L'(\beta)(0) + L(\alpha)(1) - L(\alpha)(0) = \Phi(\beta) + \Phi(\alpha), \end{aligned}$$

donde en el último paso se utiliza el hecho de que el número de vueltas  $\Phi(\beta)$  puede calcularse utilizando cualquier levantamiento de  $\beta$ , ya que dos, cualesquiera, de tales levantamientos difieren por una función constante.

Falta probar la inyectividad, es decir, que si  $\alpha$  satisface  $\Phi(\alpha) = 0$ , entonces  $\alpha$  es homotópica al camino constante, pero esto sigue del hecho de que  $\Phi(\alpha) = 0$  implica  $L(\alpha)(1) = L(\alpha)(0)$ , por lo que  $L(\alpha)$  es un camino cerrado. Como  $\mathbb{R}$  es contractible, su grupo fundamental es trivial, por lo que todo camino cerrado es homotópico a un camino constante. Si  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  es tal homotopía, definimos una homotopía entre  $\alpha$  y una constante mediante  $K(s, t) = e^{2\pi H(s, t)i}$ . El resultado sigue.  $\square$

## Ejercicios

1. Sea  $G$  un grupo topológico y sean  $\gamma, \mu : [0, 1] \rightarrow G$  funciones continuas que satisfacen  $\gamma(0) = \gamma(1) = \mu(0) = \mu(1) = e$  (es decir,  $\gamma$  y  $\mu$  son

caminos cerrados en  $G$  con base en  $e$ ). Sea  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow G$  un camino homotópico a  $\gamma$  (con una homotopía de extremos fijos). Sea asimismo,  $\mu' : [0, 1] \rightarrow G$  un camino homotópico a  $\mu$ . Probar directamente que existe una homotopía entre  $t \mapsto \gamma(t)\mu(t)$  y  $t \mapsto \gamma'(t)\mu'(t)$ .

2. Calcular el grupo fundamental del toro  $S^1 \times S^1$ .
3. Sea  $[\alpha]$  un generador del grupo fundamental  $\pi_1(S^1; 1)$  del círculo unitario  $S^1$ . Probar que dos funciones continuas  $f, g : S^1 \rightarrow X$ , donde  $X$  es un espacio arco-conexo y  $f(1) = g(1)$ , son homotópicas si y sólo si  $f_*[\alpha]$  y  $g_*[\alpha]$  son conjugados en  $\pi_1(X; f(1))$ .
4. Probar que la función  $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  definida por  $f(z, u) = (u, z)$  no es homotópica a la identidad.
5. Probar que en el plano sin el origen, los dos arcos del círculo unitario que unen  $(-1, 0)$  con  $(1, 0)$  no son homotópicos (con una homotopía de extremos fijos).
6. Sea  $f$  un polinomio de grado  $n$  con coeficientes complejos. Probar que la función  $g_R : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $g_R(z) = \frac{f(Rz)}{|f(Rz)|}$  es homotópica a  $z \mapsto z^n$  para todo  $R$  suficientemente grande (Sugerencia: considere el límite uniforme). Si  $f(0) \neq 0$  probar que  $g_R$  es homotópica a una constante para  $R$  suficientemente pequeño. Deduzca el teorema fundamental del álgebra.
7. Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  definida por  $\alpha(t) = e^{8\pi t} - 5e^{4\pi t} + 1$ . Sea  $G = \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}; 1)$ . Encuentre  $|G/\langle[\alpha]\rangle|$ . Justifique.
8. Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Probar que todo camino que une  $(1, 0)$  con  $(-1, 0)$  es homotópico en  $X$  a  $f_n * g * h$  para un único  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $f_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$ ,  $g$  es el segmento que une  $(1, 0)$  con  $(0, 1)$  y  $h$  es el segmento que une  $(0, 1)$  con  $(-1, 0)$ .

9. Sea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2 \right\}.$$

Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  continua con  $f(1) = f(2)$ , y sean  $\alpha$  y  $\beta$  las curvas definidas por  $\alpha(t) = f(e^{2\pi it})$  y  $\beta(t) = f(2e^{2\pi it})$ . Probar que si

$\alpha * \beta$  es homotópico al camino constante, entonces  $\alpha$  es homotópico al camino constante (recuerde que las homotopías entre caminos deben ser de extremos fijos).

10. Sea  $\alpha$  un camino cerrado en  $X$  con base en  $x_0$  (es decir  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ ). Sea  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua tal que  $h(0) = 0$  y  $h(1) = 1$ . Probar que existe una homotopía  $H$  entre  $\alpha$  y  $\alpha \circ h$  tal que  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$  para todo  $t$ .
11. Sea  $G$  un grupo topológico. Sean  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$  y  $\beta : [0, 1] \rightarrow G$  dos caminos en  $G$  con base en la identidad  $e$ . Se define un tercer camino  $\gamma$  mediante  $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$ . Probar que la clase  $[\gamma]$  en  $\pi_1(G; e)$  es igual al producto  $[\alpha][\beta]$ .
12. Si  $X$  es un espacio simplemente conexo y si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  y  $\beta : [0, 1] \rightarrow X$  son dos caminos en  $X$  que satisfacen  $\alpha(0) = \beta(0) = x$  y  $\alpha(1) = \beta(1) = y$ , entonces existe una homotopía entre ambos que satisface  $H(0, t) = x$  y  $H(1, t) = y$  para todo  $t$ .
13. Sea  $X = [\mathbb{C} - \{0\}]$ . Sea  $f : X \rightarrow X$  definida por  $f(z) = z^n e^z$ . Si  $f_*\pi_1(X; 1) \rightarrow \pi_1(X; f(1))$  es la función inducida por  $f$ . Identificando cada grupo fundamental con  $\mathbb{Z}$  se puede escribir  $f_*(n) = mn$  para algún entero  $m$ . Calcule  $m$  y Justifique su afirmación.
14. Probar que el complemento de todo conjunto finito en  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 2$  es simplemente conexo (Sugerencia: Pruebe primero que toda curva es homotópica a una poligonal).

## Chapter 16

# Triangulaciones y homotopías explícitas

Hasta aquí hemos probado los resultados esenciales de la teoría del grupo fundamental recurriendo sólo ocasionalmente al uso de homotopías explícitas, aunque su uso ha sido inevitable en algunos casos, como al demostrar la Proposición 15.12. El propósito del capítulo en curso es mostrar como uno puede construir explícitamente, y con pocos o ningún cálculo, las homotopías que demuestran las distintas identidades básicas de la teoría. Un resultado técnico que será muy útil en lo que sigue es el Lema 5.21 que recordamos aquí para conveniencia del lector:

**[Lema 5.21]** Sea  $X$  un espacio topológico y supongamos que  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$  donde cada  $X_i$  es un subconjunto cerrado. Sea  $f_i : X_i \rightarrow Y$  una función continua para cada  $i = 1, \dots, n$ , que satisfacen  $f_i(x) = f_j(x)$  para cada  $x \in X_i \cap X_j$ . Entonces la función  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f(x) = f_i(x)$  para  $x \in X_i$  es continua en  $X$ .

Estaremos particularmente interesados en el caso en el cual  $X$  es un polígono subdividido en polígonos más pequeños. Un primer ejemplo de esto apareció en el capítulo 10 cuando se definió la yuxtaposición pegando funciones definidas en intervalos más pequeños.

Del mismo modo, si quiere demostrarse que la relación de homotopía entre caminos es transitiva procedemos como sigue: Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos homotópicos en un espacio  $X$  y sea  $\gamma$  un camino homotópico a  $\beta$ . Tomemos

una homotopía  $H$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir una función continua

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(0, s) = \alpha(s), \quad H(1, s) = \beta(s).$$

Tomemos una homotopía  $K$  entre  $\beta$  y  $\gamma$ , que es una función continua

$$K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad K(0, s) = \beta(s), \quad K(1, s) = \gamma(s).$$

Se define una homotopía  $L$  entre  $\alpha$  y  $\gamma$ , mediante

$$L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ K(2t - 1, s) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Es inmediato que cada una de las definiciones dadas es continua en el rectángulo en el que están definidas y en el segmento borde se tiene

$$L(1/2, s) = K(0, s) = \beta(s) = H(1, s),$$

por lo que el argumento concluye aplicando el Lema 5.21. Un argumento similar que se deja al lector permite probar que si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos caminos, respectivamente homotópicos a otros dos caminos  $\alpha'$  y  $\beta'$ , entonces  $\alpha * \beta$  es homotópico a  $\alpha' * \beta'$ . Para construir homotopías más complicadas como la homotopía “natural” entre  $(\alpha * \beta) * \gamma$  y  $\alpha * (\beta * \gamma)$ , la que se necesita para dar una demostración directa de la asociatividad de la yuxtaposición a nivel de clases de homotopía, necesitamos una herramienta adicional que nos permita trabajar con polígonos más complejos. Esta es el concepto de triangulación, el cual nos será útil más adelante en el estudio de la teoría de la homología.

**definición 16.1.** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  elementos de  $\mathbb{R}^m$ , no necesariamente distintos. El símplice  $T_{(x_i)}$  se define como

$$T_{(x_i)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \text{ and } \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Nótese que la identidad  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$  es equivalente a  $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , por lo que podemos re-escribir

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{n+1}).$$

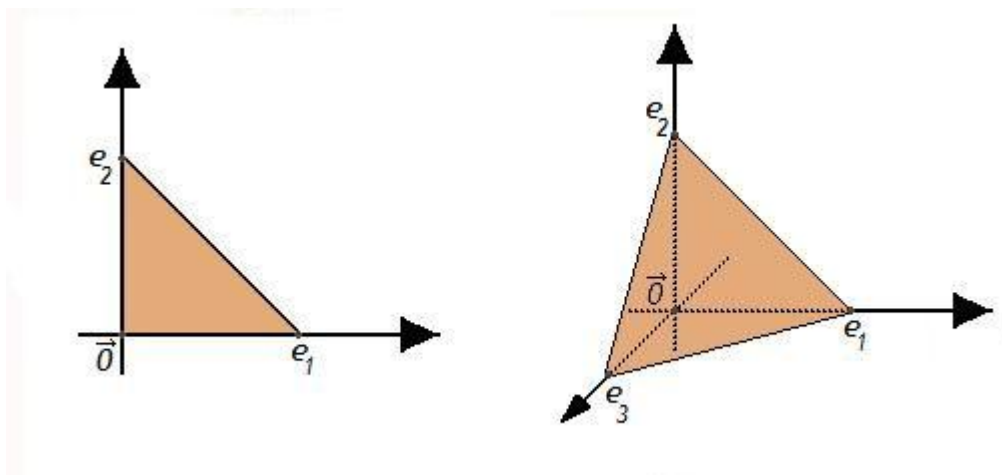


Figure 16.1: El 2-símplice estándar (izquierda) y el 2-símplice unitario (derecha).

El símplice  $T_{(x_i)_i}$  se dice no-singular, o regular, si los vértices  $x_1, \dots, x_{n+1}$  no están contenidos en ningún subespacio afín (es decir, ninguna clase lateral de un subespacio) de dimensión menor a  $n$ , o equivalentemente si los vectores  $(x_1 - x_{n+1}), \dots, (x_n - x_{n+1})$  son linealmente independientes. Se sigue que las coordenadas  $\alpha_i$  de un punto  $p$  del símplice  $T_{(x_i)_i}$  (usualmente denominadas sus coordenadas baricéntricas) están totalmente determinadas por el punto  $p$ , en tanto  $T_{(x_i)_i}$  sea no-singular. Esto es inmediato si se asume que  $T_{(x_i)_i}$  es el llamado símplice unitario, cuyos vértices son los elementos de la base canónica  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De hecho, todo símplice es la imagen del símplice unitario por una función lineal, la cual es biyectiva en tanto el símplice imagen sea no singular. Esto es, probablemente, más natural si utilizamos, en lugar del símplice unitario, el símplice estándar, aquel cuyos vértices son los elementos  $e_1, \dots, e_n$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y el origen  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ .

Notemos que la función  $s : T_u \rightarrow T$  que envía a un punto cualquiera del símplice unitario  $T_u$  en el punto con las mismas coordenadas baricéntricas del símplice  $T$  es continua, y es por lo tanto un homeomorfismo si  $T$  es no-singular, dado que los espacios involucrados son compactos. Esto implica que existe un homeomorfismo canónico entre dos  $n$ -símplices no singulares



cualesquiera, en tanto la imagen de cada vértice esté fija de antemano. Este homeomorfismo se dice simplicial en todo lo que sigue.

Tomemos ahora dos símlices no-singulares  $T$  y  $S$  contenidos en  $\mathbb{R}^m$ . Asumamos que, salvo una permutación de sus vértices, se tiene

$$T = T_{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)},$$

mientras que

$$S = T_{(x_1, \dots, x_k, x'_{k+1}, \dots, x'_r)},$$

de tal modo que la intersección es  $T \cap S = T_{(x_1, \dots, x_k)}$ . En este caso diremos que los dos símlices se intersectan en una cara. Más generalmente, un símlice no-singular se dice una cara de otro, si los vértices del primero son un subconjunto de los vértices del segundo. Nótese que las coordenadas baricéntricas de cualquier punto de  $T \cap S$  con respecto a la cara  $T \cap S$  coinciden con sus coordenadas baricéntricas con respecto a  $T$  o  $S$ . Sólo los coeficientes correspondientes a los vértices  $x_1, \dots, x_k$  pueden ser no nulos. Esto prueba que si tenemos dos símlices  $U$  y  $V$  contenidos en  $\mathbb{R}^t$ , y si, salvo una permutación de sus vértices, se tiene

$$U = T_{(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)}, \quad V = T_{(y_1, \dots, y_k, y'_{k+1}, \dots, y'_r)},$$

entonces los homeomorfismos simpliciales que llevan cada  $x_i$  en el correspondiente  $y_i$  y cada  $x'_j$  en el correspondiente  $y'_j$  coinciden en la intersección, por lo que pueden pegarse para obtener una función bien definida de  $T \cup S$  en  $U \cup V$ , por medio del Lema 5.21.

**ejemplo 16.2.** Sean  $T_{x,y,z}$  y  $T_{x,y,w}$  dos símlices no degenerados con un lado común. Sean asimismo  $T_{a,b,c}$  y  $T_{a,b,d}$  otros dos símlices no degenerados con el lado correspondiente en común. Sean  $f : T_{x,y,z} \rightarrow T_{a,b,c}$ , y  $g : T_{x,y,w} \rightarrow T_{a,b,d}$  los homeomorfismos simpliciales respectivos. Entonces  $f$  y  $g$  coinciden en el segmento que une  $x$  con  $y$ . Basta ver que un punto en el segmento que une  $x$  con  $y$  se escribe, en términos de sus coordenadas baricéntricas en la forma  $\alpha x + \beta y$ , lo que no depende del tercer punto del triángulo (o 2-símlice), el que puede ser  $z$  o  $w$  indistintamente. En este caso, la función, entre el polígono de la izquierda y el de la derecha en Fig. 16.2, obtenida pegando las funciones simpliciales respectivas recibe también el nombre de función simplicial. Ahora generalizaremos este concepto.

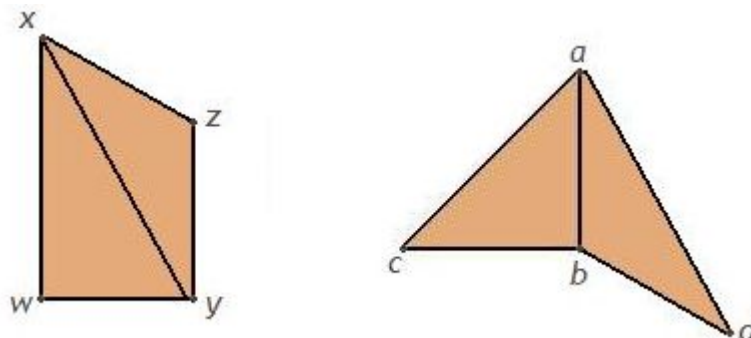


Figure 16.2: Dos complejos isomorfos.

**definición 16.3.** Un complejo simplicial finito  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^m$  es una colección finita de símplices no-singulares, tales que:

- la intersección de dos símplices cualesquiera de  $\Sigma$  en la colección es una cara de cada símplice y
- toda cara de un símplice de  $\Sigma$  es un símplice de  $\Sigma$ .

La unión de todos los símplices de un complejo es un espacio topológico llamado su polihedro o espacio subyacente. Si  $\Sigma'$  es un segundo complejo simplicial, una correspondencia (función)  $f$  del conjunto de vértices (o 0-símplices) de  $\Sigma$  en los vértices de  $\Sigma'$  se dice una correspondencia simplicial si se satisface la siguiente condición de compatibilidad (CP):

**CP:** Para cada símplice  $T_{(x_1, \dots, x_n)}$  de  $\Sigma$ , las imágenes  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  son los vértices de algún símplice de  $\Sigma'$ .

En tal caso, la correspondencia entre vértices se extiende de manera única a una función continua  $\tilde{f}$  entre los polihedros respectivos que es simplicial en cada símplice. Esta recibe el nombre de función simplicial. Cuando la función  $f$  (y por lo tanto también  $\tilde{f}$ ) es la inclusión, diremos que  $\Sigma$  es un subcomplejo de  $\Sigma'$ . Nótese que, si bien una función simplicial es simplemente una función continua, es común escribir  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  en vez de  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ , dado que la afirmación de que una función dada es o no simplicial depende del complejo y no sólo del polihedro.

En general, es más cómodo definir funciones continuas entre polihedros explicitando correspondencias entre los vértices, en lugar de dar una fórmula para la función en cada símplice. Es necesario, por cierto, chequear en cada caso que se cumple la condición de compatibilidad CP. Nótese, sin embargo, que la condición de que “ $f(x_1), \dots, f(x_n)$  son los vértices de algún símplice” como aparece más arriba, no implica que este símplice tenga la misma dimensión que el símplice original, ya que algunas de las imágenes en la lista  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  pueden repetirse. En tal caso diremos que el símplice colapsa. Cuando la correspondencia  $f$  es biyectiva, y su inversa satisface también la condición de compatibilidad, entonces la función continua  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo entre los poliedros respectivos. En este caso diremos que  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo simplicial. En capítulos posteriores, a menudo omitiremos la tilde y no distinguiremos en la notación  $f$  de  $\tilde{f}$  salvo si la condición de compatibilidad no es evidente.

**ejemplo 16.4.** Existe un único homeomorfismo  $f$  entre los cuadrados  $C_1$  y  $C_2$  de la Figura 16.3 que es simplicial con respecto al complejo dado y lleva al vértice  $x_i$  en  $y_i$  para  $i = 1, \dots, 7$ .

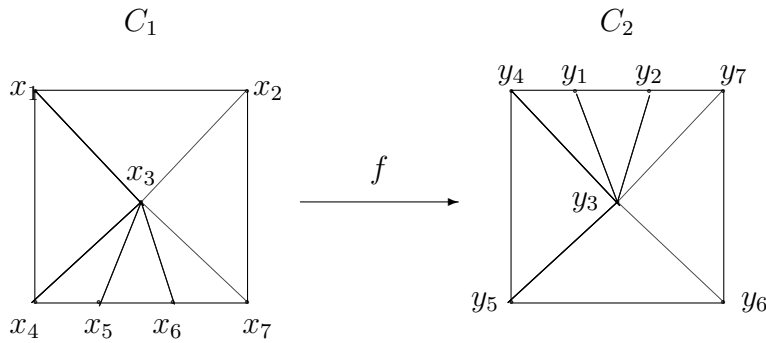


Figure 16.3: Dos triangulaciones distintas pero isomorfas del cuadrado.

**ejemplo 16.5.** La función simplicial  $\tilde{g}$  que va del cuadrado  $C_1$  en el cuadrado  $C'_2$  de la Figura 16.4 que lleva al vértice  $x_i$  en  $y_i$  para  $i = 1, \dots, 6$ , y que satisface  $\tilde{g}(x_7) = g(x_7) = y_6$  colapsa el símplice  $T_{x_3, x_6, x_7}$ . Por definición, una función simplicial que colapsa un símplice no es inyectiva, ni siquiera a nivel de vértices.

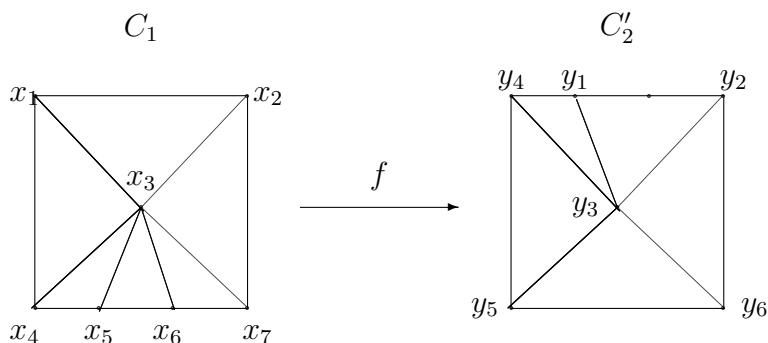


Figure 16.4: Una función simplicial que colapsa un símlice.

**ejemplo 16.6.** La funci3n simplicial  $\tilde{h}$  que va del complejo  $K$  en el cuadrado  $C'_2$  de la Figura 16.5 que lleva al vértice  $x_i$  en  $y_i$ , para  $i = 1, \dots, 7$ , proviene de una correspondencia biyectiva entre los vértices, sin embargo define una funci3n simplicial que no es epiyectiva. De hecho, ningún punto interior al símlice  $T_{y_1, y_2, y_3}$ , ni ningún punto no terminal de la arista  $T_{y_1, y_2}$ , está contenido en la imagen.

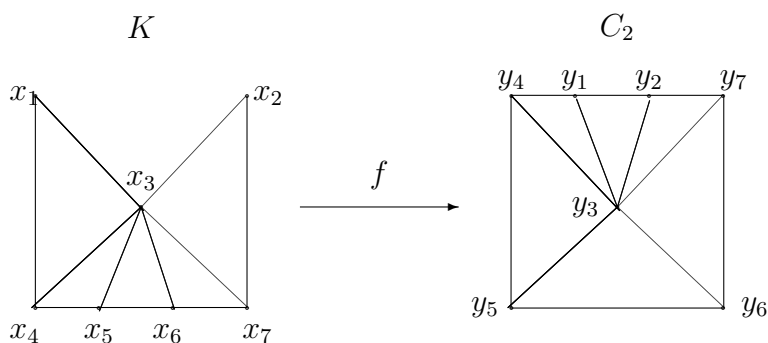


Figure 16.5: Una biyecci3n entre los vértices que induce una funci3n simplicial no epiyectiva..

**ejemplo 16.7.** Para ilustrar el uso de complejos simpliciales para definir

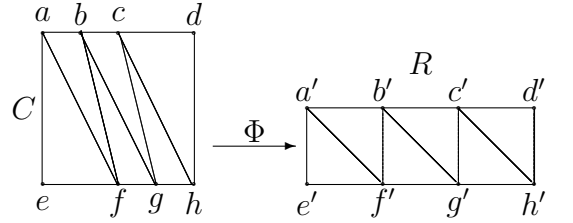


Figure 16.6: Un isomorfismo de complejos utilizado para probar la asociatividad del grupo fundamental.

homotopías explícitas, construiremos una homotopía entre las curvas  $(\alpha * \beta) * \gamma$  y  $\alpha * (\beta * \gamma)$ , lo que da una demostración alternativa de la asociatividad de la yuxtaposición a nivel de clases de homotopía. Con este fin, construimos un homeomorfismo simplicial entre el cuadrado  $C = [0, 1]^2$  y el rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 3]$ . Recordemos que la curva  $(\alpha * \beta) * \gamma$  recorre la curva  $\alpha$  en el primer cuarto del intervalo, la curva  $\beta$  en el segundo cuarto del intervalo, y la curva  $\gamma$  en la segunda mitad del intervalo. Por otro lado la curva  $\alpha * (\beta * \gamma)$  recorre la curva  $\alpha$  en el intervalo  $[0, 1/2]$  y las curvas  $\beta$  y  $\gamma$  en cada mitad del intervalo  $[1/2, 1]$ . Para transformar la homotopía requerida en una más simple de definir, consideremos el homeomorfismo simplicial  $\Phi : C \rightarrow R$  definido enviando el vértice  $a$  en  $a'$ ,  $b$  en  $b'$  y así sucesivamente, como muestra la Figura 16.6. Ahora podemos definir la homotopía en  $R$  mediante

$$K(t, s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ \beta(s - 1) & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ \gamma(s - 2) & \text{si } 2 \leq s \leq 3 \end{cases} ,$$

y finalmente en  $C$  mediante  $H = K \circ \Phi$ .

**ejemplo 16.8.** Utilizaremos este método para dar una nueva demostración del hecho de la Proposición 15.12, la que dice que si  $f, g : X \rightarrow Y$  son funciones homotópicas entonces definen la misma función, salvo conjugación, a nivel de grupo fundamental. Más generalmente, trabajaremos con el conjunto,  $\pi_1(X; x, y)$  para dos puntos  $x, y \in X$ . Considere

1. Una homotopía  $H$  entre  $f$  y  $g$ ,
2. el camino  $\gamma$  que une  $f(x)$  con  $g(x)$  en  $Y$ , y se define por  $\gamma(s) = H(s, x)$ ,

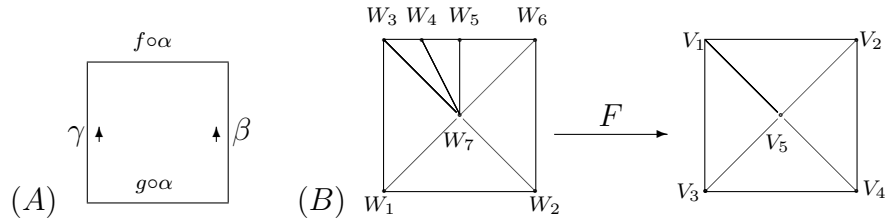


Figure 16.7: La homotopía de extremos variables en el ejemplo 16.8(A) y la función simplicial que la convierte en una homotopía de extremos fijos (B).

3. el camino  $\beta$  que une  $f(y)$  con  $g(y)$  en  $Y$ , y se define por  $\beta(s) = H(s, y)$ .

Entonces, para todo camino  $\alpha$  que une  $x$  con  $y$  queremos probar que  $g \circ \alpha$  es homotópico a  $[\gamma * (f \circ \alpha)] * \beta^{\text{op}}$ , donde  $\beta^{\text{op}}$  es el camino inverso de  $\beta$ . Para esto observamos que  $L(s, t) = H(\alpha(s), t)$  define una homotopía entre  $f \circ \alpha$  y  $g \circ \alpha$  que no es de extremos fijos, pero que satisface  $L(0, t) = \gamma(t)$ , y  $L(1, t) = \beta(t)$ . En el diagrama de la Figura 16.7(A),  $L$  toma los valores que se indican en cada lado. Consideremos ahora la función simplicial  $F$  de la Figura 16.7(B), definida mediante la correspondencia

$$\begin{aligned} W_1, W_3 &\mapsto V_3, & W_2, W_6 &\mapsto V_4, & W_4 &\mapsto V_1, \\ W_5 &\mapsto V_2, & W_7 &\mapsto V_5. \end{aligned}$$

Entonces se define la homotopía requerida mediante  $H = L \circ F$ . Nótese que en este caso algunos símlices colapsan, por ejemplo el símlice  $T_{(W_1, W_3, W_7)}$ . Nótese que la homotopía explícita utilizada en el capítulo anterior para probar este resultado fué realmente calculada por este método.

**ejemplo 16.9.** Nuestro ejemplo final consiste en dar una demostración, utilizando triangulaciones, del Ejemplo 14.8. Para ello tomamos las triangulaciones de la figura 16.8, y consideramos la función simplicial definida por la correspondencia

$$C \mapsto C, \quad A, E \mapsto E, \quad B, F \mapsto F, \quad D \mapsto D.$$

Los detalles se dejan al lector.

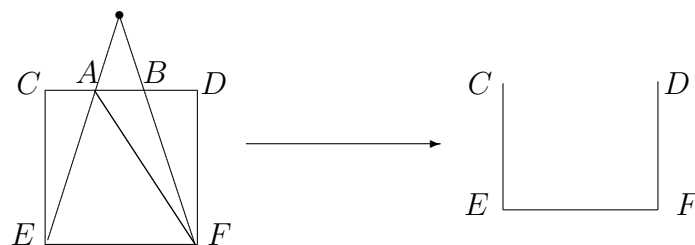


Figure 16.8: La demostración del Ejemplo 14.8 usando triangulaciones.

### Ejercicios

1. Encuentre un complejo simplicial cuyo polihedro sea homeomorfo a la superficie de la esfera. Repita lo mismo para el toro.
2. Demostrar en detalle que la función simplicial del ejemplo 16.9 coincide con la proyección descrita en el Ejemplo 14.8.
3. Dar una demostración, mediante triangulaciones, del Lema 14.9.
4. Dar una demostración, mediante triangulaciones, del Lema 14.18.
5. Muestre que el poliedro de cualquier complejo simplicial finito es homeomorfo al poliedro de un subcomplejo de algún símplice unitario.

# Chapter 17

## El teorema de Van Kampen.

Antes de entregar métodos para calcular el grupo fundamental de un espacio topológico dado  $X$ , es necesario ponerse de acuerdo en el significado de la palabra *calcular*. Para ello recordemos que un grupo puede describirse en términos de generadores y relaciones.

Un conjunto de generadores de un grupo  $G$  es simplemente un conjunto  $S$  que no está contenido en ningún subgrupo propio de  $G$ . Otra manera de decir esto es la siguiente: Un subconjunto  $S$  de  $G$  es un conjunto de generadores de  $G$  si cada elemento  $g$  de  $G$  puede escribirse como una palabra

$$g = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} s_3^{\epsilon_3} \cdots s_n^{\epsilon_n},$$

para ciertos elementos  $s_i \in S$  y ciertos exponentes  $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ .

El grupo más sencillo generado por un conjunto  $S$  dado es el grupo libre en  $S$ , denotado  $F(S)$ . Idealmente, sus elementos serían todas las palabras (formales) en los elementos de  $S$ . Como  $F(S)$  debe tener estructura de grupo, es necesario identificar aquellas palabras que necesariamente deben coincidir en cualquier grupo, por ejemplo  $ss^{-1}$  y la palabra vacía  $e$  que corresponde a la identidad. Para ello, se define una operación de reducción. Una reducción consiste en eliminar de una palabra cualquier aparición consecutiva de un generador y su inverso, en cualquier orden. En decir reemplazamos cualquiera de las palabras  $\alpha ss^{-1}\beta$  o  $\alpha s^{-1}s\beta$ , donde  $s$  es un generador, por  $\alpha\beta$ . En este caso decimos que  $\alpha\beta$  se obtiene, de cualquiera de las dos palabras anteriores, tras una reducción. Una palabra se dice reducida si no puede obtenerse ninguna palabra nueva de ella tras una reducción, o equivalentemente, que en ella no aparezca ningún par de la forma  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$  como arriba. Nótese que aplicar una reducción a una palabra la acorta, por lo que no es posible



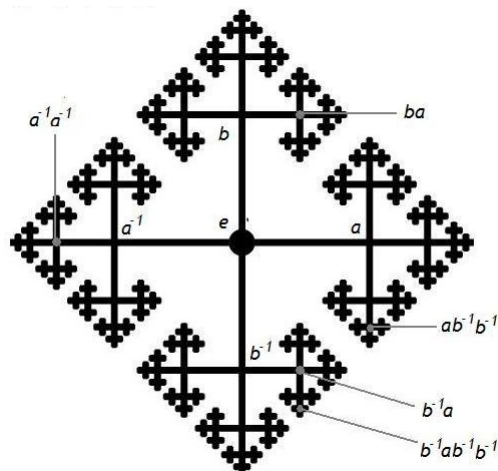


Figure 17.1: La antena de Televisión universal y las palabras asociadas a algunos de sus vértices.

aplicar a una palabra una sucesión infinita de reducciones. El proceso de aplicar reducciones sucesivas a una palabra debe producir, tarde o temprano, una palabra reducida. Es posible probar que para toda palabra  $\alpha$  existe una única palabra reducida  $\text{red}(\alpha)$  que puede obtenerse mediante reducciones sucesivas y que el orden en el cual se realicen las reducciones es irrelevante. Una manera de hacer esto es observar el gráfico de la Figura 17.1, a veces llamado la antena de televisión universal, en el cual cada vértice corresponde a una palabra reducida. En la figura, hemos asumido que  $S = \{a, b\}$ , pero la generalización a conjuntos de mayor tamaño no presenta dificultades. Una palabra no reducida es, simplemente, una caminata con retrocesos en este grafo. Su reducción, es la palabra asociada al vértice final de esa caminata.

El grupo libre  $F(S)$  se define como el conjunto de todas las palabras reducidas en los elementos de  $S$ . la operación de grupo se define entonces como  $\alpha * \beta = \text{red}(\alpha\beta)$  donde  $\alpha\beta$  denota simplemente la concatenación de las palabras  $\alpha$  y  $\beta$ . Dejamos al lector la tarea de comprobar que, con esta operación, el conjunto  $F(S)$  es un grupo cuya identidad es la palabra vacía  $e$  y que el inverso de toda palabra  $s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$  es  $s_n^{-\epsilon_n} \cdots s_1^{-\epsilon_1}$ .

Cada función  $\phi : S \rightarrow G$ , donde  $G$  es un grupo, puede extenderse de manera única a un homomorfismo  $\bar{\phi} : F(S) \rightarrow G$ , simplemente llevando cada

palabra en los elementos de  $S$  a la palabra correspondiente en sus imágenes en  $G$ . Si identificamos  $S$  con su imagen en  $G$ , una relación  $k$  entre los elementos de  $S$  en  $G$  es una palabra  $k \in F(S)$  cuya imagen en  $G$  se anula, es decir  $\bar{\phi}(k) = e_G$ . El grupo  $G$  se dice definido por el conjunto  $Y$  de generadores y el conjunto  $K$  de relaciones si

$$G \cong \frac{F(Y)}{\langle K \rangle_N},$$

donde  $\langle K \rangle_N$  denota el subgrupo normal generado por  $K$ , es decir el subgrupo generado por  $K$  y todos sus conjugados. En este caso escribiremos

$$G = \langle Y | K \rangle.$$

En este lenguaje, el propósito de el presente capítulo es demostrar el siguiente resultado:

**Proposición 17.1.** [*Teorema de Van Kampen*]. *Sea  $X = X_1 \cup X_2$  un espacio topológico, con  $X_1$  y  $X_2$  abiertos y su intersección  $X_1 \cap X_2$  arco-conexa. Sean  $f : X_1 \hookrightarrow X$  y  $g : X_2 \hookrightarrow X$  las inclusiones respectivas. Sea  $x \in X_1 \cap X_2$ . Supongamos que  $\pi_1(X_1; x) = \langle Y_1 | K_1 \rangle$  y  $\pi_1(X_2; x) = \langle Y_2 | K_2 \rangle$  en el sentido descrito más arriba. Sea  $K_3$  el conjunto de relaciones*

$$K_3 = \{f_*(a)g_*(a)^{-1} | a \in \pi_1(X_1 \cap X_2; x)\}$$

donde cada imagen  $f_*(a)$  es escrita en términos de los generadores  $Y_1$  y cada imagen  $g_*(a)$  es escrita en términos de los generadores  $Y_2$ , entonces

$$\pi_1(X; x) = \langle Y_1 \cup Y_2 | K_1 \cup K_2 \cup K_3 \rangle.$$

**Lema 17.2.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto y  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un cubrimiento abierto de  $X$  (ver Capítulo 5), entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que todo subconjunto de  $X$  de diámetro menor a  $\epsilon$  está contenido en uno de los conjuntos del cubrimiento.*

**Demostración** Como cada  $U_i$  es abierto, su complemento  $U_i^c$  es cerrado. Se sigue que la distancia  $d(x, U_i^c)$  se anula sólo si  $x$  pertenece al conjunto  $U_i^c$ . Para fijar ideas, diremos que  $d(x, U_i^c) = \infty$  si  $U_i^c = \emptyset$ . Como los abiertos  $U_i$  recubren  $X$ , la función

$$f(x) = \max_{i \in I} d(x, U_i^c)$$

es estrictamente positiva para cada elemento  $x$  de  $X$ . Como la imagen continua de un compacto es un compacto y un compacto en  $\mathbb{R}$  es cerrado, la imagen de  $X$  bajo  $f$  debe contener a su ínfimo  $\delta$ . Afirmamos que todo  $\epsilon < \delta$  cumple lo pedido. De hecho si  $E$  es un subconjunto de  $X$  de diámetro inferior a  $\epsilon$ , entonces para cada  $x \in E$  fijo se tiene  $f(x) \geq \delta$  por lo que  $d(x, U_i^c) \geq \delta$  para algún  $i$ . Se sigue que para todo  $y \in E$  se tiene

$$d(y, U_i^c) \geq d(x, U_i^c) - d(y, x) \geq \delta - \epsilon > 0.$$

Se sigue que  $y \in U_i$ , y como  $y$  era arbitrario, se tiene la contención  $E \subseteq U_i$ , como se pedía.  $\square$

La demostración del Teorema de Van Kampen se divide en tres partes. Primero probaremos que las imágenes de los elementos de los grupos  $\pi_1(X_1; x)$  y  $\pi_1(X_2; x)$  efectivamente generan  $\pi_1(X; x)$ . Luego veremos que las relaciones de cada uno de los conjuntos  $K_i$  se cumplen efectivamente en  $\pi_1(X; x)$ . Finalmente probaremos que toda relación que se cumple en  $\pi_1(X; x)$  es una consecuencia de las relaciones en el conjunto  $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ .

**Demostración de Van Kampen (Parte I).** Para probar que las imágenes de los elementos de  $\pi_1(X_1; x)$  y  $\pi_1(X_2; x)$  efectivamente generan  $\pi_1(X; x)$ , es suficiente probar que toda curva cerrada  $\beta$  en  $X$  es homotópica a una yuxtaposición del tipo  $\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n$  donde cada  $\alpha_i$  es una curva cerrada contenida en uno de los conjuntos  $X_1$  o  $X_2$ .

Sea  $\epsilon > 0$  tal que todo conjunto  $E$  de diámetro inferior a  $\epsilon$  satisfaga  $E \subseteq \beta^{-1}(X_1)$  o  $E \subseteq \beta^{-1}(X_2)$ . Tomemos a continuación una partición  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[0, 1]$  de modo que cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  tenga diámetro inferior a  $\epsilon$ . Se concluye que cada imagen  $\beta([x_{i-1}, x_i])$  está contenida en uno de los conjuntos  $X_1$  o  $X_2$ . Reparametrizando, podemos suponer que  $\beta = \delta_1 * \delta_2 * \cdots * \delta_n$  donde cada  $\delta_i$  está contenido en uno de los conjuntos  $X_1$  o  $X_2$ . Los  $\delta_i$  no son necesariamente caminos cerrados, pero si para cada uno de los puntos  $\beta(x_i)$  escojemos un camino  $\gamma_i$  que une  $x$  con  $\beta(x_i)$  con  $\gamma_0 = \gamma_n = c_x$  el camino constante, se tiene

$$\beta \sim (\gamma_0 * \delta_1 * \gamma_1^{\text{op}}) * \cdots * (\gamma_{n-1} * \delta_n * \gamma_n^{\text{op}}).$$

Supondremos que se tienen las siguientes precauciones al escoger los caminos  $\gamma_i$ :

- si  $\beta(x_i)$  está en  $X_1$ , asumimos que  $\gamma_i$  es un camino en  $X_1$ ,

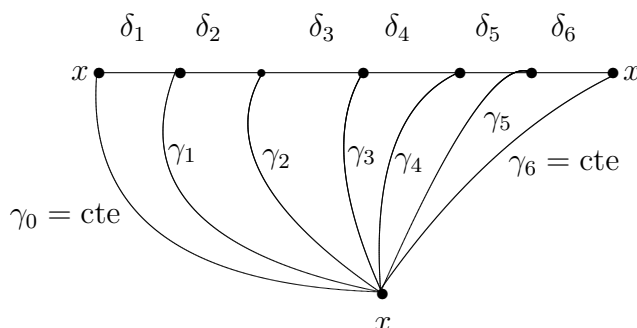


Figure 17.2: Escribiendo un camino cerrado como una yuxtaposición de caminos que respeta el cubrimiento.

- si  $\beta(x_i)$  está en  $X_2$ , asumimos que  $\gamma_i$  es un camino en  $X_2$  y, en particular,
- si  $\beta(x_i)$  está en  $X_1 \cap X_2$ , asumimos que  $\gamma_i$  es un camino en  $X_1 \cap X_2$ .

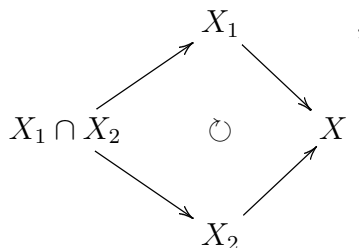
Nótese que aquí se usa la hipótesis de que es posible ya que  $X_1 \cap X_2$  es arco-conexo. se tiene que cada uno de los caminos  $(\gamma_{n-1} * \delta_n * \gamma_n^{\text{op}})$  es un camino cerrado que une  $x$  con  $x$ . Esto concluye la primera parte de la demostración.

**Demostración de Van Kampen (Parte II).** Para ver que las relaciones en  $K_1$  se cumplen en  $\pi_1(X; x)$ , es suficiente considerar la composición

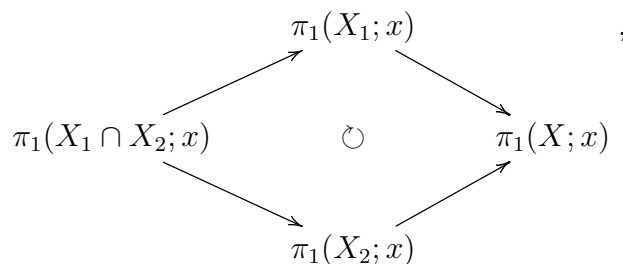
$$F(Y_1) \rightarrow \pi_1(X_1; x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X; x)$$

y observar que cualquier palabra que se anule en  $\pi_1(X_1; x)$  debe anularse en  $\pi_1(X; x)$  pues un homomorfismo lleva la identidad en la identidad. El mismo razonamiento prueba que las relaciones en  $K_2$  se cumplen en  $\pi_1(X; x)$ . Para

$K_3$  consideramos el diagrama conmutativo de inclusiones



lo que a nivel de grupos fundamentales nos da el diagrama conmutativo de grupos

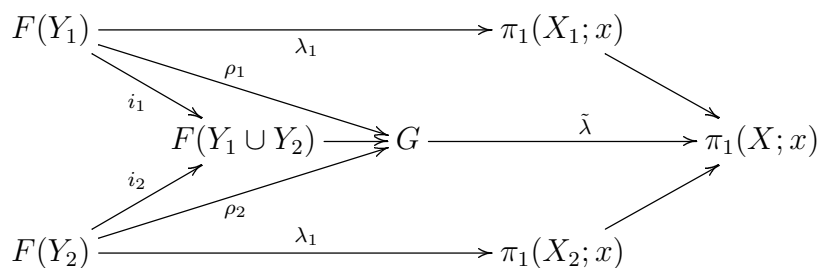


de donde se concluye lo pedido.

**Demostración de Van Kampen (Parte III).** Para la última parte de la demostración, asumiremos que  $G$  es un grupo generado por  $Y_1 \cup Y_2$  que no satisface otras relaciones que aquellas que son consecuencia de las relaciones en  $K_1$ ,  $K_2$ , y  $K_3$ . En símbolos:

$$G = \langle Y_1 \cup Y_2 | K_1 \cup K_2 \cup K_3 \rangle.$$

Consideraremos el siguiente diagrama conmutativo:



Nuestro objetivo es probar que  $\tilde{\lambda}$  es inyectiva, es decir, que si  $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$  es una palabra en los elementos de  $Y_1 \cup Y_2$  que se anula en  $\pi_1(X; x)$ , esta palabra se anula también como un elemento de  $G$ .

$\alpha_1$		$\alpha_2$		$\alpha_3$	
$R_{25}$	$R_{26}$	$R_{27}$	$R_{28}$	$R_{29}$	$R_{30}$
$R_{19}$	$R_{20}$	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$	$R_{24}$
$R_{13}$	$R_{14}$	$R_{15}$	$R_{16}$	$R_{17}$	$R_{18}$
$R_7$	$R_8$	$R_9$	$R_{10}$	$R_{11}$	$R_{12}$
$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$

Figure 17.3: Una partición del cuadrado  $[0, 1]^2$ .

Escojamos, para cada  $i = 1, \dots, n$  un representante  $\alpha_i$  en la clase  $a_i^{\epsilon_i}$ , el que supondremos completamente contenido en  $X_1$ , si  $a_i$  pertenece a  $Y_1$ , o en  $X_2, Y_2$ . La hipótesis de que  $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} = e$  en  $\pi_1(X, x)$ , implica que existe una homotopía  $H$  de extremos fijos entre  $\alpha_1 * \cdots * \alpha_n$  y el camino constante  $c_x$ . Como es usual, interpretamos esta yuxtaposición como una partición del intervalo  $[0, 1]$  en intervalos  $I_i$  que parametrizan las curvas  $\alpha_i$ . Por el Lema 17.2, existe una partición de  $[0, 1]^2$  en rectángulos  $R_i$  lo bastante fina para que cada imagen  $H(R_i)$  esté contenida en  $X_1$  o  $X_2$ . Refinando la partición si es necesario, podemos suponer que cada punto divisorio entre los intervalos  $I_i$ , en el borde superior del cuadrado  $[0, 1]^2$ , es un vértice en algún rectángulo de la partición (ver Fig. 17.3). El cuadrado  $[0, 1]^2$  así dividido tiene una estructura natural de CW-complejo, con los rectángulos  $R_i$  como 2-celdas, que utilizaremos en todo lo que sigue.

Para cada rectángulo  $R_i$ , definimos una curva  $h_i = k_i * m_i * n_i$  en  $[0, 1]^2$  que llamaremos su borde superior, particionada como muestra la figura. Nótese que  $h_{i-1} = k_i * r_i * n_i$ . Cuando el rectángulo  $R_i$  está en el borde izquierdo, la subdivisión es un poco diferente, como muestra la figura de la derecha (ver Fig. 17.4).

Para cada vértice  $v$  de algún rectángulo  $R_i$  de la partición, se escoge una curva  $\gamma_v$ , de  $x$  a  $H(v)$ , como se explicó en la primera parte de la demostración, es decir, asumiendo que la curva está totalmente contenida en  $X_i$  si  $H(v) \in X_i$ . Suponemos además que  $\gamma_v$  es el camino constante si  $H(v) = x$ , lo que ocurre en los vértices del cuadrado mayor.

A continuación, se realiza una construcción análoga para cada arista de la

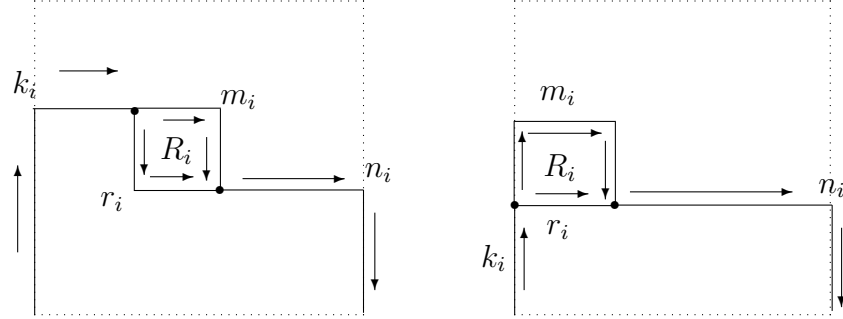


Figure 17.4: Curvas por encima, y por debajo, de un cuadrado dado.

partición. Nótese que al dar a la partición la estructura de un CW-complejo, el 1-esqueleto consiste de aristas de los rectángulos, las que unen vértices adyacentes del mismo. Estas aristas pueden interpretarse como caminos. Por ejemplo, la arista que une los vértices  $v$  y  $w$ , se identifica con un camino  $\delta$  que satisface  $\delta(0) = v$  y  $\delta(1) = w$ . Si la imagen  $H \circ \delta(I)$  está contenida en  $X_1$ , escogemos una palabra  $u_1 = u_1(\delta)$  en  $F(Y_1)$ , que cumpla  $\lambda_1(u_1) = [\gamma_v * (H \circ \delta) * \gamma_w^{\text{op}}]$ . Si  $H \circ \delta$  está contenida en  $X_2$ , se define  $u_2 = u_2(\delta)$  en  $F(Y_2)$  análogamente. Nótese que, para cada arista  $\delta$ , al menos una de las palabras  $u_1$  o  $u_2$  está definida.

Sea  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una curva que se obtiene yuxtaponiendo lados de ciertos rectángulos de la partición (como las curvas  $h_i$  más arriba). Más específicamente asumimos que  $h = \delta_1 * \dots * \delta_m$ , donde cada  $\delta_i$  es una arista. Diremos que  $h$  es *demostrablemente trivial*, si

$$\rho_{j(1)}(u_{j(1)}(\delta_1)) \rho_{j(2)}(u_{j(2)}(\delta_2)) \cdots \rho_{j(m)}(u_{j(m)}(\delta_m)) = e_G, \quad (17.1)$$

donde cada  $j(i) \in \{1, 2\}$  se escoge de forma que  $u_{j(i)}$  esté definida. Nótese que  $\rho_1(u_1(\delta)) = \rho_2(u_2(\delta))$  cuando ambos están definidos, por lo que la elección no es relevante.

Probaremos por inducción que cada una de las curvas  $h_i$  definidas más arriba son demostrablemente triviales.

Para  $i = 0$ , la curva  $H \circ h_0$  es la imagen del borde inferior de la homotopía, en particular si escribimos  $H \circ h_0 = \delta_1 * \dots * \delta_T$ , cada  $\delta_i$  es un camino constante

por lo que la yuxtaposición  $\gamma_{v_{i-1}} * (H \circ \delta_i) * \gamma_{v_i}^{\text{op}}$  es una curva cerrada en  $X_1 \cap X_2$ , obtenemos  $\left(u_{j(1)}(\delta_1)\right) = g_{i-1}g_i^{-1}$ , donde  $g_i = [\gamma_{v_i}]$ . Además,  $g_0 = g_T = e$ , pues asumimos que los caminos asociados a los vértices del cuadrado mayor son constantes, por lo que, en este caso la ecuación (17.1) se convierte en

$$g_1^{-1}(g_1g_2^{-1})(g_2g_3^{-1}) \cdots (g_{T-2}g_{T-1}^{-1})g_{T-1} = e_G,$$

lo que es inmediato.

Supongamos ahora que el resultado ya se ha probado para  $H \circ h_{i-1}$  y queremos probarlo para  $H \circ h_i$ . Obsérvese que, para  $H \circ h_{i-1}$ , la expresión (17.1) tiene la forma  $b_i c_i d_i = e_G$ , donde:

1.  $b_i$  es el producto de los factores que corresponden a la curva  $k_i$  en la Figura 17.4.
2.  $c_i$  es el producto de los factores que corresponden a la curva  $r_i$  en la figura.
3.  $d_i$  es el producto de los factores que corresponden a la curva  $n_i$ .

Sea  $e_i$  el producto de los factores que corresponden a la curva  $m_i$ . Basta ver que  $e_i = c_i$ . Nótese que esta es una identidad en el grupo  $G$ , por lo que debemos demostrar esto utilizando sólo las relaciones en  $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ . Equivalentemente, la identidad debe probarse usando sólo cálculos hechos en cada grupo  $\pi_1(X_i, x)$ , y el hecho de que podemos identificar un elemento en un grupo con el elemento correspondiente en el otro, si corresponde a una curva en  $X_1 \cap X_2$ . Esto último fue ya considerado al observar que la expresión (17.1) no depende de la elección de  $j$ .

En resumen, debemos mostrar que  $e_i = c_i$  utilizando una homotopía que tome valores en un solo conjunto,  $X_1$  o  $X_2$ . Para esto tenemos  $H|_{R_i}$ , la restricción de la homotopía  $H$  al rectángulo  $R_i$  de la figura 17.4. Sea  $u$  el vértice inicial de  $r_i$  (o  $m_i$ ), y sea  $s$  su vértice final. Como, en general, las imágenes  $H(u)$  y  $H(s)$  no coinciden con el punto base  $x$ , es necesario utilizar una construcción algo diferente. Sea  $Z_i$  el espacio topológico que se obtiene al pegar un segmento a  $R_i$  en cada uno de los puntos  $u$  y  $s$ . Si el rectángulo  $R_i$  no está en el borde izquierdo, tenemos una función definida en  $Z_i$  como se muestra a la izquierda de la Figura 17.5. Si el rectángulo  $R_i$  está en el borde izquierdo, la función está definida como se encuentra a la derecha de la misma figura, Ahora puede definirse una homotopía componiendo con la



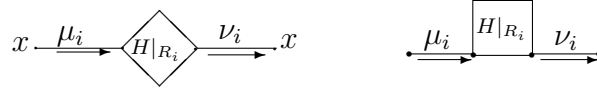


Figure 17.5: El espacio  $Z_i$  utilizado para probar la identidad  $e_i = c_i$ .

función simplicial  $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow Z_i$  de acuerdo a lo mostrado en la Figura 17.6, con las mismas convenciones de la figura anterior. En cada caso esto nos da una homotopía entre  $\gamma_u * (H \circ r_i) * \gamma_s^{op}$  y  $\gamma_u * (H \circ m_i) * \gamma_s^{op}$  totalmente contenida en  $X_1$  o  $X_2$ . Esto concluye la inducción.

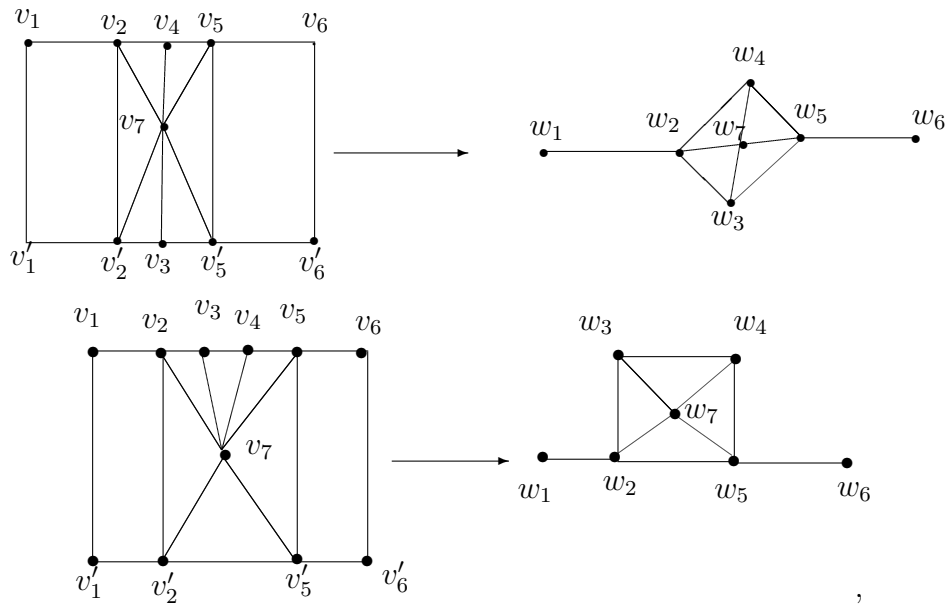


Figure 17.6: Función simplicial utilizada para definir una homotopía.

Lo anterior nos permite concluir que el camino  $h_T$ , el cual pasa por arriba del último cuadrado  $R_T$  es demostrablemente trivial, es decir, si  $h_T = \delta_1 * \dots * \delta_m$  es la descomposición de esta curva en aristas de la partición, el producto correspondiente en la ecuación (17.1) es trivial en  $G$ . Podemos asumir, por el mismo argumento usado para  $h_0$ , que las aristas  $\delta_i$  que aparecen en esta descomposición son sólo las del borde superior. Un subproducto de (17.1)

corresponde a cada curva  $\alpha_i$ , es decir  $\alpha_i = \delta_{t_{i+1}} * \cdots * \delta_{t_{i+1}}$ , con

$$\tilde{\lambda}(a_i^{\epsilon_i}) = \tilde{\lambda}\left(\rho_{j(t_{i+1})}\left(u_{j(t_{i+1})}(\delta_{t_{i+1}})\right) \cdots \rho_{j(t_{i+1})}\left(u_{j(t_{i+1})}(\delta_{t_{i+1}})\right)\right).$$

Observemos ahora que  $j$  puede asumirse constante en la expresión de arriba, y que cada factor de la derecha corresponde a una curva de la forma  $\hat{\delta}_i = \gamma_v * \delta_i * \gamma_w^{\text{op}}$ , por lo que una homotopía entre  $\delta_{t_{i+1}} * \cdots * \delta_{t_{i+1}}$  y  $\hat{\delta}_{t_{i+1}} * \cdots * \hat{\delta}_{t_{i+1}}$  requiere sólo retraer algunos factores de la forma  $\gamma_v^{\text{op}} * \gamma_v$ , por lo que la identidad  $a_i^{\epsilon_i} = u_j(\delta_{t_{i+1}}) \cdots u_j(\delta_{t_{i+1}})$  es cierta en  $\pi_1(X_j, x)$ , y por lo tanto también se tiene  $\rho_j(a_i^{\epsilon_i}) = \rho_j\left(u_j(\delta_{t_{i+1}}) \cdots u_j(\delta_{t_{i+1}})\right)$  en  $G$ . Podemos reemplazar el lado derecho de la última ecuación, para cada  $i = 1, \dots, n$ , en (17.1), para probar que  $\rho_j(1)(a_1^{\epsilon_1}) \cdots \rho_j(n)(a_n^{\epsilon_n}) = e_G$  como se pedía.  $\square$

Nótese que si  $f_*(a) = g_*(a)$  en  $G$  para cada generador  $a$  de  $\pi_x(X_1 \cap X_2)$ , esto se cumple para cada elemento de  $\pi_x(X_1 \cap X_2)$ . Por esta razón es suficiente incluir en  $K_3$  una relación por cada generador.

**ejemplo 17.3.** Considérese el conjunto  $X$  definido como un espacio de identificación del coproducto de dos círculos obtenido al identificar un punto de cada círculo, o equivalentemente, la unión de dos círculos en  $\mathbb{R}^2$  con un punto en común, como se muestra en la parte superior de la figura 17.7. El espacio así definido puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos  $X_1$  y  $X_2$ , cada uno de los cuales es un círculo con un pequeño arco pegado en el punto  $p$ . La intersección  $X_1 \cap X_2$  es el espacio que se forma al pegar dos arcos por un punto interior.

Nótese que cada arco es contractible, de hecho la función que lleva cada arco al punto  $p$  es homotópica a la identidad del arco mediante una homotopía que mantiene fijo  $p$ , es decir  $\{p\}$  es un retracto de deformación fuerte de  $X_1 \cap X_2$ . Se sigue que la intersección  $X_1 \cap X_2$  es contractible, mientras que cada uno de los espacios,  $X_1$  y  $X_2$ , es homotópicamente equivalente a un círculo. Se sigue que los grupos fundamentales de  $X_1$  y  $X_2$  están dados por

$$\pi_1(X_1, x) = \langle x | \emptyset \rangle, \quad \pi_1(X_2, x) = \langle y | \emptyset \rangle.$$

Como  $X_1 \cap X_2$  es contractible, su grupo fundamental está generado por el conjunto vacío. Se sigue que  $K_3$  puede tomarse vacío por la observación precedente. Concluimos que

$$\pi_1(X, x) = \langle x, y | \emptyset \rangle$$

es un grupo libre en dos generadores.

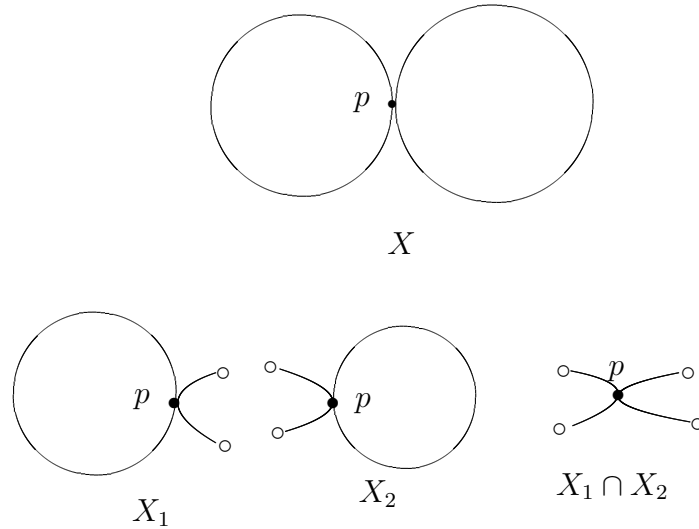


Figure 17.7: El espacio del ejemplo 17.3.

**ejemplo 17.4.** Sea  $X$  el espacio topológico que se obtiene al identificar puntos opuestos del círculo borde del disco de radio 1 como muestra la parte superior de la Figura 17.8. Para calcular el grupo fundamental de  $X$  consideramos la descomposición  $X = X_1 \cup X_2$  donde  $X_1$  es la imagen de un anillo abierto que contiene el círculo borde y  $X_2$  es un disco interior al círculo como muestra la parte inferior de la figura.

En este caso el espacio  $X_2$  es contractible, por lo que su grupo fundamental es trivial. El espacio  $X_1$  es homotópicamente equivalente a la imagen del círculo borde pues la función que proyecta el anillo en su círculo borde es homotópica a la identidad mediante la homotopía

$$H(t, z) = \frac{z}{t|z| + (1 - t)}.$$

Se sigue que el grupo fundamental de  $X_1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  con generador  $u = [a]$ . De hecho  $\pi_1(X_1, x) = \langle u | \emptyset \rangle$ . El grupo fundamental de  $X_1 \cap X_2$  es también isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , con un generador  $v$  que es la clase de una curva que da una vuelta alrededor del anillo. Este generador es trivial en  $\pi_1(X_2, x)$  y coincide con  $u^2$  en  $\pi_1(X_1, x)$ . Se sigue que  $K_3$  puede tomarse como sigue:

$$K_3 = \{(u^2)(e)^{-1}\}.$$

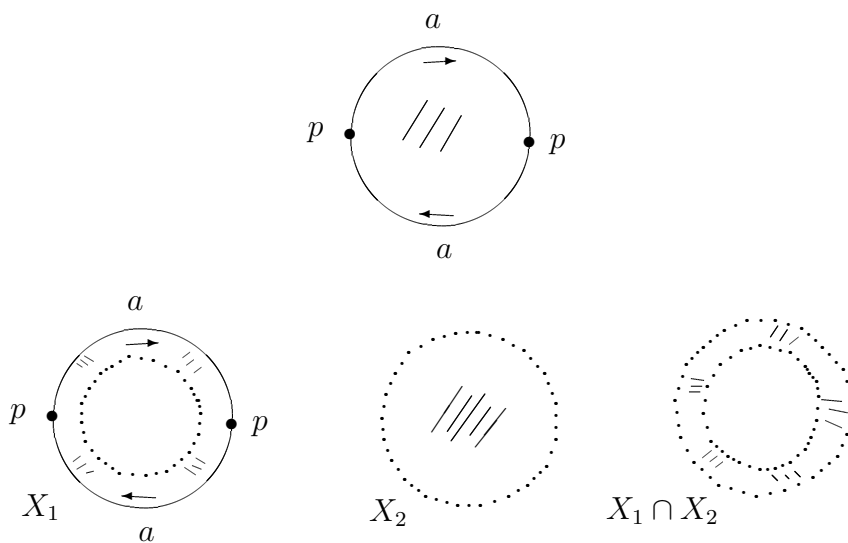


Figure 17.8: El espacio del ejemplo 17.4.

Se concluye que  $\pi_1(X, x) \cong \langle u|u^2 = e \rangle \cong C_2$ .

**ejemplo 17.5.** El mismo argumento aplicado al espacio de identificación de la Figura 17.9(A) prueba que su grupo fundamental es

$$\pi_1(X, x) \cong \langle u|u^3 = e \rangle \cong C_3.$$

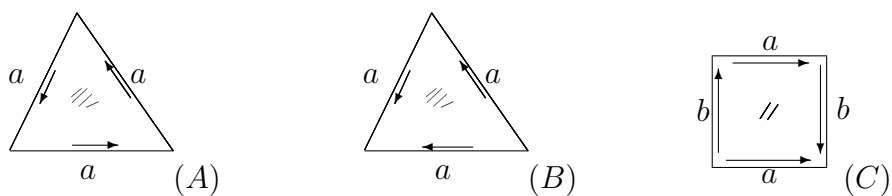


Figure 17.9: Tres espacios de identificación para los ejemplos 17.5-7.

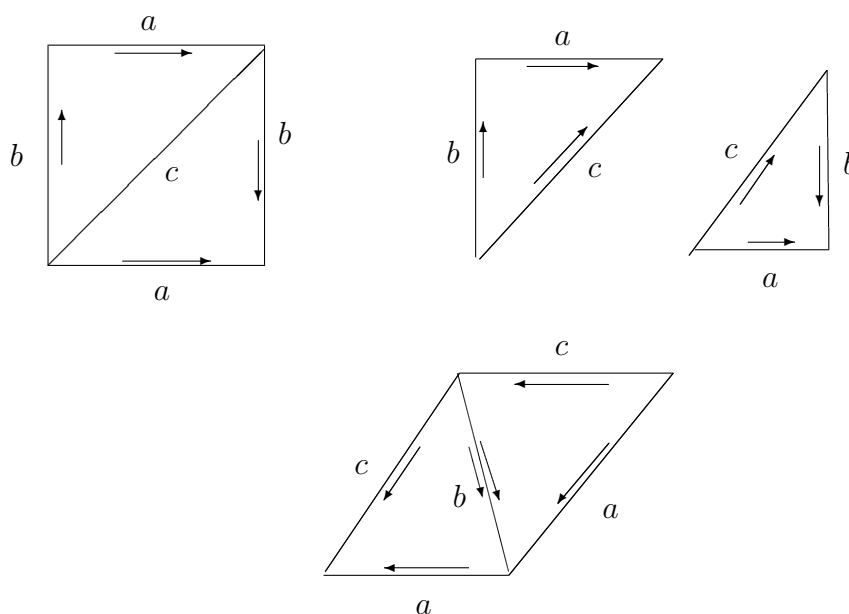


Figure 17.10: Otra interpretación de la botella de Klein como espacio de identificación.

**ejemplo 17.6.** El mismo argumento aplicado al espacio de identificación de la Figura 17.9(B) prueba que su grupo fundamental es

$$\pi_1(X, x) \cong \langle u | u^2 u^{-1} = e \rangle = \{e\}.$$

Se sigue que el espacio de identificación de este ejemplo, el *gorrito de burro*, es simplemente conexo.

**ejemplo 17.7.** El espacio de identificación  $B$  de la Figura 17.9(C), conocido como *Botella de Klein*, tiene como grupo fundamental a

$$\pi_1(B, x) \cong \langle a, b | aba^{-1}b = e \rangle.$$

Por otro lado, dividiendo el cuadrado por la diagonal y pegando el lado  $b$  obtenemos un espacio de identificación que es homeomorfo al original (ver Fig. 17.10). Esta última construcción nos da la siguiente presentación del

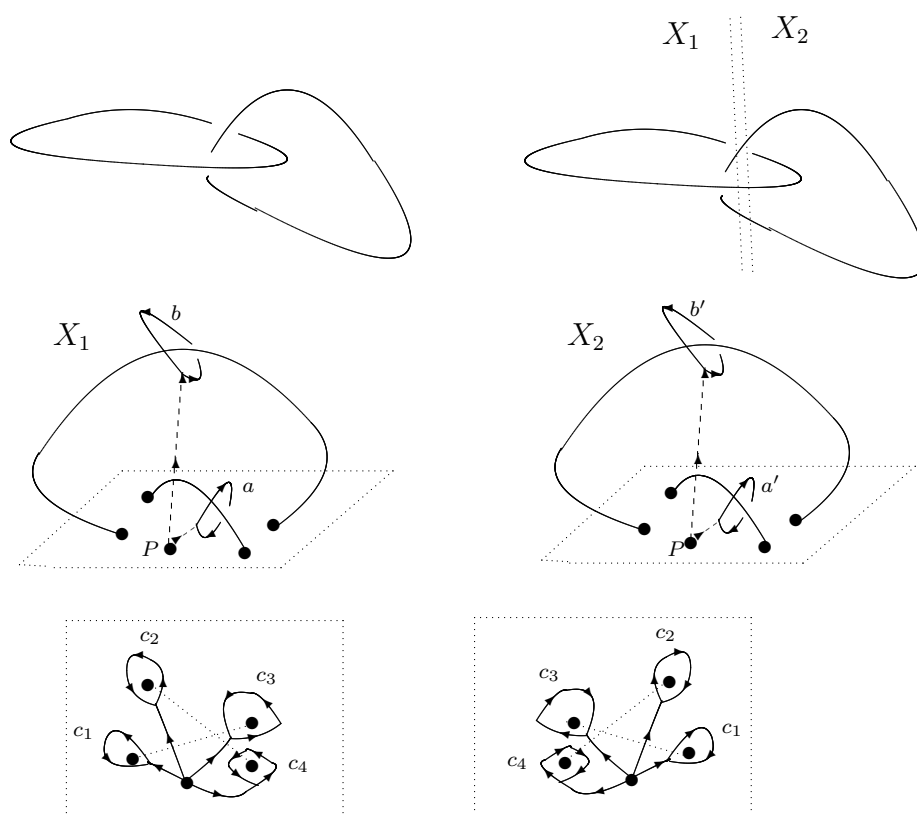


Figure 17.11: Calculando el grupo fundamental del espacio obtenido al retirar dos círculos entrelazados de  $\mathbb{R}^3$ .

grupo fundamental:

$$\pi_1(B, x) \cong \langle a, c \mid c^2 = a^2 \rangle.$$

Dejamos al lector la tarea de comprobar directamente que ambos grupos son isomorfos.

**ejemplo 17.8.** En el siguiente ejemplo calcularemos el grupo fundamental del espacio que se obtiene al extraer, de  $\mathbb{R}^3$ , dos círculos entrelazados como los que se muestran en la figura 17.11. Para ello, comenzaremos dividiendo el espacio en dos semiespacios como muestra la figura superior derecha. Cada subespacio,  $X_1$  o  $X_2$ , consiste en un semiespacio del cual se han extraído dos arcos. No es difícil comprobar que un semiespacio sin un arco tiene un grupo fundamental isomorfo a  $\mathbb{Z}$  (por ejemplo, si el arco es un semicírculo, dicho

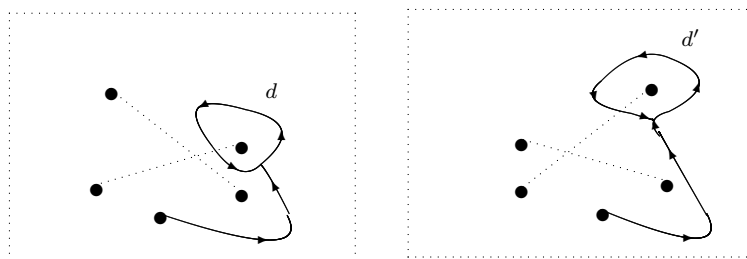


Figure 17.12: Una curva que si puede deslizarse para su identificación.

espacio puede escribirse como el producto del semiplano sin un punto por un espacio contractible). Se sigue, por una aplicación sencilla del teorema de Van Kampen, que cada uno de los espacios  $X_1$  y  $X_2$  tiene un grupo fundamental isomorfo al grupo libre  $F_2$ . Por ejemplo, los generadores del grupo  $\pi_1(X_1, P)$  son las curvas  $a$  y  $b$  de la figura, las que avanzan por la línea punteada, dan la vuelta indicada, y luego regresan a  $P$  recorriendo la línea punteada en sentido inverso. Esta convención vale para todos las curvas de este ejemplo.

Para calcular el grupo fundamental del espacio completo  $X = X_1 \cup X_2$  es necesario identificar las imágenes, en cada copia de  $F_2$ , de cada uno de los generadores del espacio  $X_1 \cap X_2$ . Nótese que este último espacio se retrae fácilmente a un plano del cual se han sustraído cuatro puntos. El grupo fundamental de dicho plano perforado tiene 4 generadores, los que se ilustran en las dos figuras inferiores. Nótese que el dibujo de cada lado está realizado desde la perspectiva de un observador en el subespacio en cuestión. Es relativamente sencillo ahora identificar la imagen de cada generador en el subespacio correspondiente, con una salvedad. La imagen en  $X_1$  del generador  $c_3$  parece coincidir con  $b^{-1}$ , pero al tratar de deslizar dicha curva para hacerla coincidir con la curva opuesta al generador  $b$ , nos encontramos con que la curva se enreda en la manilla interior. Debemos, por lo tanto reemplazarla con una curva que pase por fuera de dicha manilla, como la curva  $d$  que se ilustra en la Figura 17.12. No es difícil ver que  $d$  es homotópica a  $c_4 * c_3 * c_4^{-1}$  y que se identifica con  $b^{-1}$  en  $X_1$ . Dado que  $c_4$  se identifica con  $a$ ,  $c_3$  debe identificarse con  $a^{-1} * b^{-1} * a$ . Lo mismo ocurre con el generador correspondiente a  $c_2$  en  $X_2$ .  $c_1^{-1} * c_2 * c_1$  es homotópica a  $(d')^{-1}$ , la que se identifica con  $b'$ , por lo que  $c_2$  se identifica a  $(a')^{-1} * b' * a'$ . Las ecuaciones correspondientes a los cuatro generadores nos quedan como sigue:

1. Ecuación correspondiente a  $c_1$ :  $b = (a')^{-1}$ .
2. Ecuación correspondiente a  $c_2$ :  $a^{-1} = (a')^{-1}b'a'$ .
3. Ecuación correspondiente a  $c_3$ :  $a^{-1}b^{-1}a = a'$ .
4. Ecuación correspondiente a  $c_4$ :  $a = (b')^{-1}$ .

Concluimos que el grupo fundamental de  $X$  es isomorfo al grupo abeliano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

### Ejercicios

1. Calcule el grupo fundamental del espacio que se obtiene al retirar  $n$  puntos de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Calcule el grupo fundamental del espacio que se obtiene al pegar  $n$  círculos por un punto.
3. Probar que la esfera  $S^n$  es simplemente conexa, para  $n \geq 2$ .
4. Cuantos tipos de homotopía de espacios diferentes pueden obtenerse pegando un disco al plano proyectivo?
5. Calcule el grupo fundamental del espacio que se obtiene al retirar de  $\mathbb{R}^3$  dos círculos no entrelazados.
6. Utilice el resultado anterior para probar que no existe un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  en sí mismo que lleve dos círculos entrelazados en dos círculos no entrelazados.



Figure 17.13: La curva anudada del ejercicio 7.

7. Calcule el grupo fundamental del complemento en  $\mathbb{R}^3$  de una curva que se extiende infinitamente en ambas direcciones y está anudada como muestra la Figura 17.13.



8. Calcule el grupo fundamental del complemento de una esfera (bidimensional) en  $\mathbb{R}^4$ .
9. Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios obtenidos pegando un disco, por el borde, a un toro. Demuestre que  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes si y sólo si sus grupos fundamentales son isomorfos.

# Chapter 18

## Recubrimientos

Sea  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  una función continua epiyectiva. Diremos que  $\phi$  es un recubrimiento (o una función recubridora) si para cada punto  $x$  en  $X$  existe una vecindad abierta  $V$  de  $x$  cuya preimagen  $\phi^{-1}(V)$  es una unión disjunta de abiertos  $\bigcup_{i \in I} V_i$ , de modo que la restricción de  $\phi$  a cada  $V_i$  es un homeomorfismo entre  $V_i$  y  $V$  (ver Fig. 18.1). En particular, toda función recubridora es abierta.

En general, a una vecindad  $V$  de  $x$  con esta propiedad, es decir tal que su pre-imagen tiene la forma  $\phi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} V_i$ , donde cada restricción  $\phi|_{V_i}$  es un homeomorfismo, le llamaremos una vecindad trivialmente recubierta. Así, en un recubrimiento, todo punto tiene, al menos, una vecindad trivialmente recubierta.

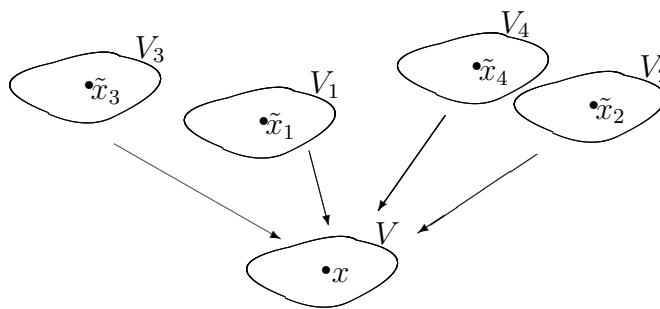


Figure 18.1: Una vecindad trivialmente recubierta.

Un recubrimiento  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  se dice conexo si  $\tilde{X}$  es conexo. Esto implica

que también  $X$  es conexo.

**Proposición 18.1.** *Sea  $X$  un espacio localmente conexo y sea  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento. Para cada componente arco-conexa  $C \subseteq \tilde{X}$ , la imagen  $\phi(C)$  es a la vez abierta y cerrada.*

**Demostración** Sea  $x \in X$ , y sea  $V$  una vecindad trivialmente recubierta de  $x$ . Tomando una sub-vecindad de ser necesario, podemos suponer que  $V$  es conexa, dado que  $X$  es localmente conexo, por lo que cada conjunto  $V_i$ , es una componente conexa de  $\phi^{-1}(V)$ . Si  $x \in \phi(C)$ , algún  $V_i$  debe intersectar a  $C$ , y por lo tanto debe estar contenido en  $C$  por ser  $V_i$  conexo y  $C$  una componente. Se sigue que  $V \subseteq \phi(C)$ , por lo que  $x$  es un punto interior de  $\phi(C)$ . Como  $x \in \phi(C)$  es arbitrario, esto prueba que  $\phi(C)$  es abierto. Por otro lado, si  $x \notin \phi(C)$ , ninguno de los conjuntos  $V_i$  puede intersectar a  $\phi(C)$  por el argumento precedente, luego la vecindad  $V$  está en el complemento de  $\phi(C)$ , por lo que  $x$  no puede ser un punto límite de  $\phi(C)$ . Se concluye que  $\phi(C)$  es cerrado.  $\square$

Obsérvese que cada pre-imagen  $V_i$  de  $V$  es un abierto, y por lo tanto una vecindad de alguna pre-imagen  $\tilde{x}_i$  de  $x$ . Como todo elemento de  $\tilde{X}$  es una pre-imagen de algún elemento de  $X$ , concluimos que, si  $X$  es localmente conexo, también  $\tilde{X}$  lo es.

**Corolario 18.1.1.** *Si  $X$  es un espacio conexo y localmente conexo, para todo recubrimiento  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ , el espacio  $\tilde{X}$  es un coproducto de espacios conexos, cada uno de los cuales recubre a  $X$ .*

Por esta razón, la teoría de recubrimientos se reduce a menudo al caso conexo.

**definición 18.2.** Sea  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento, y sea  $f : Y \rightarrow X$  una función continua. Un levantamiento de  $f$  a  $\tilde{X}$  es una función continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $f = \phi \circ \tilde{f}$ . Observemos también que si  $f$  tiene un levantamiento a  $\tilde{X}$ , también lo tiene cualquier restricción de  $f$ .

Un problema importante que nos ocupará en este capítulo será determinar cuando existe un levantamiento, de una función dada, a un espacio arbitrario que recubre su recorrido.

**ejemplo 18.3.** Si  $Y$  es un espacio discreto, entonces la primera proyección  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  es un recubrimiento para todo espacio topológico  $X$  (ver Fig.

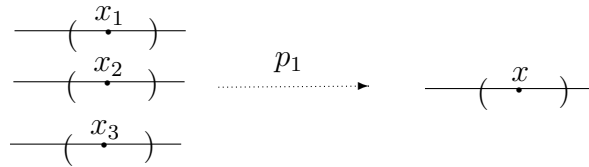


Figure 18.2: En un producto con un factor discreto, todo el espacio es trivialmente recubierto.

18.2). Más aún, en este caso, el espacio completo  $X$  es una vecindad trivialmente recubierta. Este recubrimiento no es conexo si  $Y$  contiene más de un punto. Si  $X$  es conexo, las componentes conexas de  $X \times Y$  son conjuntos de la forma  $X \times \{y\}$  con  $y \in Y$ . Este ejemplo se interpreta como un recubrimiento trivial. Cada función continua  $f : Z \rightarrow X$  se levanta a  $X \times Y$ . De hecho existe un levantamiento  $f_y(z) = (f(z), y)$  para cada elemento  $y \in Y$ , y todo levantamiento tiene esa forma.

**ejemplo 18.4.** Para todo número natural  $n$ , la función  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f_n(z) = z^n$  es un recubrimiento conexo. Por ejemplo, para  $n = 4$ , un punto arbitrario del círculo, distinto de  $(1, 0)$  tiene una pre-imágen en cada cuadrante (ver Fig. 18.3.A).

**ejemplo 18.5.** La función  $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida por  $E(r) = e^{2\pi ir}$  es un recubrimiento conexo (ver Fig. 18.3.B). De hecho, en un capítulo anterior ya definimos la noción de levantamiento en este caso particular. La nueva definición es consistente con la antigua. Veremos más adelante que algunas propiedades de los levantamientos del círculo a  $\mathbb{R}$ , correctamente interpretados, se extienden al caso general.

No es difícil ver que existen funciones de ciertos espacios topológicos a  $S^1$  que no pueden ser levantadas a los recubrimientos descritos en los dos ejemplos anteriores. De hecho, la función identidad de  $S^1$  en sí mismo tiene esta propiedad. No existe una función  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  que levante la identidad, dado que el logaritmo no es una función bien definida en el plano complejo. Lo mismo ocurre con las raíces, por lo que la identidad no se levanta en el cubrimiento  $f_n(z) = z^n$  si  $n > 1$ .

En los resultados que siguen supondremos siempre que  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento y que  $\tilde{X}$  y  $X$  son espacios de Hausdorff.

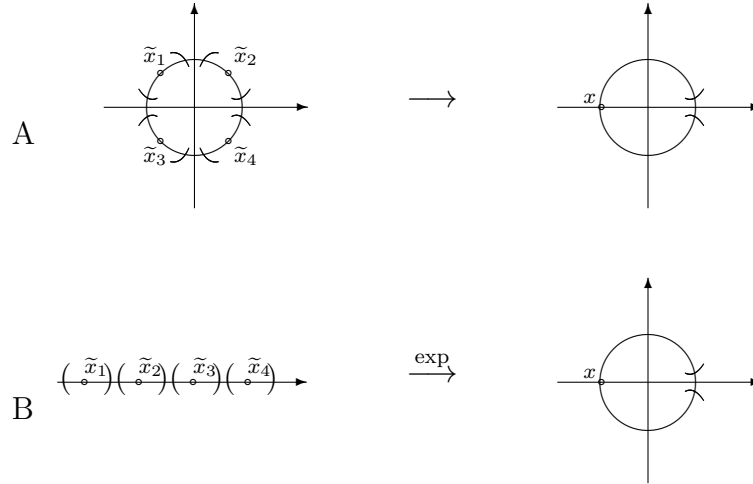


Figure 18.3: Dos recubrimiento conexos del círculo.

**Lema 18.6.** *Sea  $Y$  un espacio conexo y sea  $f : Y \rightarrow X$  una función continua. Sean  $g$  y  $h$  levantamientos de  $f$  a  $\tilde{X}$ . Si  $g(y_0) = h(y_0)$  para algún  $y_0 \in Y$ , entonces  $g(y) = h(y)$  para todo  $y \in Y$ .*

**Demostración** Sea  $A = \{y \in Y | g(y) = h(y)\}$ . Basta ver que  $A$  es abierto y cerrado. Es cerrado por ser la preimagen de la diagonal bajo la función continua  $y \mapsto (g(y), h(y))$ . Para ver que es abierto observamos que si  $\tilde{x}_0 = g(y_0) = h(y_0)$  y si  $x_0$  es su imagen en  $X$ , entonces existe una vecindad  $V$  de  $x_0$  cuya preimagen en  $\tilde{X}$  es una unión disjunta de abiertos  $\bigcup_{i \in I} V_i$ , tal que la restricción de  $\phi$  a cada  $V_i$  es un homeomorfismo entre  $V_i$  y  $V$ . En particular, si  $\tilde{x}_0 \in V_i$  entonces existe una vecindad  $U$  de  $y_0$  tal que  $g(U) \subseteq V_i$  y  $h(U) \subseteq V_i$ . Como cada punto de  $V$  tiene exactamente una pre-imagen en  $V_i$ , se tiene que  $g(y) = h(y)$  para todo  $y \in U$  y el resultado sigue.  $\square$

**Lema 18.7.** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$  una función continua. Sea  $c$  un punto del intervalo  $]a, b[$ . Entonces existe un intervalo cerrado  $J$  que contiene a  $c$  en su interior, tal que para todo  $d \in J$  y todo  $\tilde{x} \in \phi^{-1}(\alpha(d))$ , existe un levantamiento  $\tilde{\alpha}$  de la restricción de  $\alpha$  a  $J$  que satisface  $\tilde{\alpha}(d) = \tilde{x}$ .*

**Demostración** Sea  $V$  una vecindad de  $\alpha(c)$  cuya preimagen en  $\tilde{X}$  es una unión disjunta de abiertos  $\bigcup_{i \in I} V_i$ , tal que la restricción de  $\phi$  a cada  $V_i$  es un homeomorfismo entre  $V_i$  y  $V$ . Supongamos que  $\tilde{x} \in V_i$  y sea  $\psi$  la restricción de  $\phi$  a  $V_i$ . Sea  $J$  un intervalo con  $c$  en su interior tal que  $\alpha(J) \subseteq V$ . Entonces podemos definir  $\tilde{\alpha}(t) = \psi^{-1}(\alpha(t))$  para todo  $t \in J$ .  $\square$

**Lema 18.8.** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$  una función continua. Sea  $c$  un punto de  $]a, b[$ . Sea  $\alpha_1$  la restricción de  $\alpha$  a  $[a, c]$  y sea  $\alpha_2$  la restricción de  $\alpha$  a  $[c, b]$ . Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tienen levantamientos  $\tilde{\alpha}_1$  y  $\tilde{\alpha}_2$  a  $\tilde{X}$  que satisfacen  $\tilde{\alpha}_1(c) = \tilde{\alpha}_2(c)$  entonces también  $\alpha$  tiene un levantamiento a  $\tilde{X}$ .*

**Demostración** Basta ver que  $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \tilde{X}$  definida mediante

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_1(t) & \text{si } a \leq t \leq c \\ \tilde{\alpha}_2(t) & \text{si } c \leq t \leq b \end{cases}$$

es continua, lo que sigue del lema 10.6.  $\square$

**Proposición 18.9.** *Sea  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento, y sea  $\alpha : I \rightarrow X$  una curva tal que  $\alpha(0) = x$ . Para cada preimagen  $\tilde{x}$  de  $x$  existe un único levantamiento  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ .*

**Demostración** Sea  $A$  el conjunto de los elementos  $s \in [0, 1]$  tales que la restricción de  $\alpha$  a  $[0, s]$  tiene un levantamiento a  $\tilde{X}$ . Claramente  $0 \in A$  y  $A$  es un intervalo ya que si la restricción de  $\alpha$  a  $[0, t]$  tiene un levantamiento, con mayor razón la restricción de  $\alpha$  a  $[0, s]$  tiene un levantamiento para  $s < t$ . El Lema 18.7 muestra que  $0$  es un punto interior de  $A$ , por lo que el supremo  $a$  de  $A$  es mayor a  $0$ . Supongamos  $a < 1$ . Existe un intervalo  $[b, c]$  con  $b < a < c$  para el cual la restricción de  $\alpha$  a  $[b, c]$  tiene un levantamiento con cualquier extremo inicial en  $\phi^{-1}(\alpha(b))$ . Entonces  $b \in A$  luego la restricción de  $\alpha$  a  $[0, b]$  tiene un levantamiento. Se sigue que la restricción de  $\alpha$  a  $[0, c]$  tiene un levantamiento, lo que contradice la elección de  $a$ . Se sigue que  $a = 1$ , de donde la restricción de  $\alpha$  a  $[0, u]$  tiene un levantamiento para todo  $u < 1$ . Existe un intervalo  $[b, 1]$  tal que la restricción de  $\alpha$  a  $[b, 1]$  tiene un levantamiento con cualquier extremo inicial en  $\phi^{-1}(\alpha(b))$ . Como la restricción de  $\alpha$  a  $[0, b]$  tiene un levantamiento, el resultado sigue como antes. La unicidad sigue del Lema 18.6.  $\square$

En particular, si se introduce la notación

$$C_{x,?}(I, X) = \{\alpha \in C(I, X) \mid \alpha(0) = x\},$$

entonces existe para cada pre-imagen  $\tilde{x}$  de  $x$ , una función levantamiento bien definida

$$L : C_{x,?}(I, X) \rightarrow C_{\tilde{x},?}(I, \tilde{X}).$$

**Proposición 18.10.** *La función levantamiento es continua con respecto a la topología compacto-abierta.*

**Demostración** Sea  $\alpha$  un camino en  $C_{x,?}(I, X)$ , y sea  $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red de caminos en  $C_{x,?}(I, X)$  que convergen a  $\alpha$  en la topología compacto-abierta. Sea  $C$  un subconjunto compacto de  $I$  y sea  $U$  un abierto de  $\tilde{X}$  tal que  $\tilde{\alpha}(C) \subseteq U$ . Basta probar que los levantamientos  $\tilde{\alpha}_\lambda$  de cada  $\alpha_\lambda$  satisfacen  $\tilde{\alpha}_\lambda \in \mathcal{O}_{C,U}$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Para cada punto  $x$  en  $X$  existe una vecindad abierta  $V_x$  de  $x$  cuya preimagen  $\phi^{-1}(V_x)$  es una unión disjunta de abiertos  $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} V_{x,i}$ , tal que la restricción de  $\phi$  a cada  $V_{x,i}$  es un homeomorfismo entre  $V_{x,i}$  y  $V_x$ . Para cada  $t \in I$  existe, por el Lema 18.7, una vecindad compacta y conexa  $J_t \subseteq I$  de  $t$  tal que  $\alpha(J_t) \subseteq V_{\alpha(t)}$ . Reemplazando  $J_t$  por un intervalo menor si es necesario puede suponerse que  $J_t$  no intersecta a  $C$  si  $t \notin C$  y que  $\tilde{\alpha}(J_t) \subseteq U$  si  $t \in C$ . Como los interiores de los intervalos  $J_t$  recubren  $I$  existe una subcolección finita  $\{J_{t_1}, \dots, J_{t_r}\}$  que también lo hace. Reordenando, podemos suponer que  $0 \in J_{t_1}$ . Si 1 no pertenece al interior de  $J_{t_1}$ , debe haber algún intervalo cuyo interior corte a  $J_{t_1}$  pero no esté contenido en  $J_{t_1}$ , pues  $I$  es conexo. Reordenando nuevamente, podemos llamar  $J_{t_2}$  a este nuevo intervalo. Iterando, podemos suponer que cada  $J_{t_i}$  intersecta no trivialmente a  $J_{t_{i+1}}$  y que  $1 \in J_{t_r}$ .

Para  $\lambda$  suficientemente grande, se tiene  $\alpha_\lambda(J_{t_j}) \subseteq V_{\alpha(t_j)}$  para todo  $j = 1, \dots, r$ . Como cada  $J_t$  es un intervalo, es conexo, por lo que cada conjunto conexo  $\tilde{\alpha}(J_{t_j})$  está contenido en un único entorno  $V_{\alpha(t_j), i(j)}$ . Este podría en principio ser o no el mismo que el conjunto  $V_{\alpha(t_j), i(j, \lambda)}$  que contiene a  $\tilde{\alpha}_\lambda(J_{t_j})$ . Para cada  $\lambda$  sea  $M_\lambda$  el conjunto de aquellos elementos  $j \in \{1, \dots, r\}$  tales que  $i(j) = i(j, \lambda)$ . Nótese que como  $J_{t_j} \cap J_{t_{j+1}}$  es no vacía, la condición anterior para  $\lambda$  implica que si  $i(j) = i(j, \lambda)$ , entonces  $i(j+1) = i(j+1, \lambda)$  pues el subconjunto  $\alpha_\lambda(J_{t_j} \cap J_{t_{j+1}})$  debe estar contenido en  $V_{\alpha(t_j)} \cap V_{\alpha(t_{j+1})}$  y por lo tanto si los levantamientos de  $\alpha$  y  $\alpha_\lambda$  están en la misma preimagen en  $J_{t_j}$ , lo mismo debe suceder en  $J_{t_{j+1}}$ . Se sigue que  $i(j) = i(j, \lambda)$  para todo  $j$ .

Obsérvese que los intervalos de la forma  $J_{t_i}$  con  $t_i \in C$  recubren  $C$  (pues los restantes no intersectan  $C$ ), de modo que todo  $t \in C$  está en alguno de estos intervalos, digamos  $J_{t_i}$ , y se tiene por hipótesis  $\tilde{\alpha}(J_i) \subseteq U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)}$ . En consecuencia,  $\alpha(J_i) \subseteq \phi(U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)})$ , donde el último conjunto es abierto por ser  $\phi$  abierta. Se concluye que para  $\lambda$  suficientemente grande  $\alpha_\lambda(J_i) \subseteq \phi(U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)})$  y por lo tanto  $\tilde{\alpha}_\lambda(J_i) \subseteq U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)} \subseteq U$ .  $\square$

**Corolario 18.10.1** (Lema del levantamiento de homotopías). *Levantamientos de caminos homotópicos con el mismo punto inicial son homotópicos. En particular, tienen el mismo punto final.*

**Demostración** Una homotopía de extremos fijos entre dos curvas  $\beta$  y  $\gamma$  es una función continua  $H : I^2 \rightarrow X$  con  $H(0, t) = x$  y  $H(1, t)$  constante, tal que  $H(s, 0) = \beta(s)$  y  $H(s, 1) = \gamma(s)$ . La función  $\alpha : I \rightarrow C_{x, ?}(I, X)$  definida por  $\alpha(t)(s) = H(s, t)$  es una curva tal que  $\alpha(0) = \beta$  y  $\alpha(1) = \gamma$ . sea  $\tilde{\alpha} = L \circ \alpha$ . Entonces  $\tilde{H}(s, t) = \tilde{\alpha}(t)(s)$  define una homotopía entre los levantamientos de  $\beta$  y  $\gamma$ . Basta ver que es una homotopía de extremos fijos. Obsérvese que la imagen en  $X$  de  $\tilde{H}(1, t)$  es  $H(1, t)$ , que es constante. En otras palabras  $\tilde{H}(1, t)$  es un levantamiento de una curva constante. Se sigue que  $\tilde{H}(1, t)$  es constante por la unicidad del levantamiento.  $\square$

**Corolario 18.10.2.** *Sea  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento, y sea  $x_0 = \phi(\tilde{x}_0)$ . Entonces existe una acción de  $\pi_1(X; x_0)$  en  $\phi^{-1}(x_0)$  tal que para cada punto  $\hat{x}_0 \in \phi^{-1}(x_0)$  y cada clase  $a = [\alpha] \in \pi_1(X; x_0)$  se tiene  $a \cdot \hat{x}_0 = \tilde{\alpha}(1)$  donde  $\tilde{\alpha}$  es el levantamiento de  $\alpha$  que satisface  $\tilde{\alpha}(0) = \hat{x}_0$ . El estabilizador de  $\tilde{x}_0$  bajo esta acción es el grupo  $\phi_*[\pi_1(\tilde{X}; \tilde{x}_0)]$ .*  $\square$

**Lema 18.11.** *Si  $\mathfrak{B}$  es una base de vecindades de  $y$  en  $Y$ , y si para cada  $B \in \mathfrak{B}$  tenemos un camino  $\gamma_B : I \rightarrow B$ , entonces la red  $\{\gamma_B\}_{B \in \mathfrak{B}}$  converge a  $c_y$ , la función constante dada por  $c_y(t) = y$  para todo  $t \in I$ , en la topología compacto-abierta de  $C(I, Y)$ .*

**Demostración** Sea  $C$  un subconjunto compacto de  $I$ , y sea  $U$  un abierto en  $Y$ , tales que  $c_y \in \mathcal{O}_{C, U}$ . Si  $C$  es no vacío, esto significa  $y \in U$ . Luego existe  $B_0 \in \mathfrak{B}$  tal que  $B_0 \subseteq U$ , por lo que para  $B \subseteq B_0$  se tiene  $\gamma_B(C) \subseteq B \subseteq B_0 \subseteq U$ .  $\square$

**Proposición 18.12.** *Sea  $Y$  un espacio simplemente conexo y localmente arco-conexo. Sea  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento. Si  $f : Y \rightarrow X$  es continua,*



entonces existe un levantamiento  $\tilde{f}$  de  $f$  a  $\tilde{X}$ . Mas aún, si se escogen puntos  $x \in X$ ,  $y \in Y$  y  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , tales que  $\phi(\tilde{x}) = f(y) = x$ , entonces puede suponerse que  $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$ .

**Demostración** Sea  $y_0$  un punto arbitrario fijo de  $Y$  y sea  $x_0 = f(y_0) \in X$ . Escogemos  $\tilde{x}_0 \in \phi^{-1}(x_0)$ . Sea  $y \in Y$  un punto arbitrario. Sea  $\alpha$  un camino que une  $y_0$  con  $y$ , y sea  $\beta$  el único levantamiento de  $f \circ \alpha$  que satisface  $\beta(0) = \tilde{x}_0$ . Entonces definimos  $\tilde{f}(y) = \beta(1)$ . Esta definición no depende de la elección de  $\alpha$  ya que si  $\alpha'$  es otro camino que une  $y_0$  con  $y$ , entonces existe una homotopía de extremos fijos entre  $\alpha$  y  $\alpha'$ , por lo que existe una homotopía de extremos fijos entre  $\beta$  y el levantamiento  $\beta'$  de  $f \circ \alpha'$ . Basta probar que  $\tilde{f}$  así definida es continua. Para ello, sea  $\mathfrak{B}$  una base de vecindades arco-conexas de  $y$  en  $Y$ . Basta probar que si  $\{y_B\}_{B \in \mathfrak{B}}$  una red que satisface  $y_B \in B$  para cada  $B \in \mathfrak{B}$ , entonces  $\tilde{f}(y_B) \rightarrow \tilde{f}(y)$ . Por la hipótesis en  $\mathfrak{B}$ , para cada  $B \in \mathfrak{B}$ , existe un camino  $\gamma_B : [0, 1] \rightarrow B$  que une  $y$  con  $y_B$ . Entonces  $\alpha * \gamma_B$  es un camino que une  $y_0$  con  $y_B$ , el cual podemos usar para calcular  $\tilde{f}(y_B)$ . Por el Lema 18.11, el camino  $\alpha * \gamma_B$  converge, en la topología compacto-abierta, a  $\alpha * c_y$ , donde  $c_y$  es el camino constante en  $y$ . Recordese que la función  $\alpha \mapsto f \circ \alpha$  (por la Proposición 13.13), la función levantamiento, y la función  $\beta \mapsto \beta(1)$  (por la Proposición 13.9) son continuas. Se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha * \gamma_B \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} \alpha * c_y &\Rightarrow f \circ (\alpha * \gamma_B) \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} f \circ (\alpha * c_y) \Rightarrow \\ f \circ \widetilde{(\alpha * \gamma_B)} \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} f \circ \widetilde{(\alpha * c_y)} &\Rightarrow f \circ \widetilde{(\alpha * \gamma_B)}(1) \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} f \circ \widetilde{(\alpha * c_y)}(1), \end{aligned}$$

y la última convergencia es por definición  $\tilde{f}(y_B) \rightarrow \tilde{f}(y)$ .  $\square$

En particular, se sigue que si un espacio localmente arco-conexo  $X$  tiene un recubrimiento  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  con  $\tilde{X}$  simplemente conexo, entonces para cualquier otro recubrimiento  $\psi : Y \rightarrow X$  existe una función continua  $\lambda : \tilde{X} \rightarrow Y$  tal que  $\phi = \psi \circ \lambda$ . Mas aún, si se escogen puntos  $x \in X$ ,  $y \in Y$  y  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , tales que  $\phi(\tilde{x}) = \psi(y) = x$ , puede suponerse que  $\lambda(\tilde{x}) = y$ . De hecho puede decirse aún más:

**Proposición 18.13.** *Si un espacio localmente arco-conexo  $X$  tiene un recubrimiento  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  con  $\tilde{X}$  simplemente conexo (y por lo tanto conexo), entonces para cualquier otro recubrimiento  $\psi : Y \rightarrow X$  existe un único levantamiento  $\lambda : \tilde{X} \rightarrow Y$  tal que  $\phi = \psi \circ \lambda$ . Mas aún, si se escogen puntos  $x \in X$ ,  $y \in Y$  y  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , tales que  $\phi(\tilde{x}) = \psi(y) = x$ , puede suponerse que  $\lambda(\tilde{x}) = y$ . Bajo estas condiciones, el levantamiento  $\lambda$  es único.*

**Demostración** Por definición de recubrimiento, para cada punto  $x$  de  $X$  existe una vecindad  $V$  que cumple las siguientes condiciones:

1.  $V$  es arco-conexa.
2. La pre-imagen de  $V$  en  $\tilde{X}$  es una unión disjunta de abiertos  $V_i$  tal que la restricción de  $\phi$  a cada  $V_i$  es un homeomorfismo.
3. La pre-imagen de  $V$  en  $Y$  es una unión disjunta de abiertos  $W_j$  tal que la restricción de  $\psi$  a cada  $W_j$  es un homeomorfismo.

Si  $\lambda$  es epimorfismo, la condición de conexidad implica que la imagen bajo  $\lambda$  de cada  $V_i$  es un único  $W_j$ , y  $\lambda$  es un homeomorfismo en  $V_i$  ya que  $\phi$  y  $\psi$  lo son. Basta por lo tanto probar la epiyectividad de  $\lambda$ . Sea  $z \in Y$  un punto arbitrario. Basta probar que  $z$  está en la imagen de  $\lambda$ . Para ello tomamos una curva  $\alpha$  que une  $y$  con  $z$  y sea  $\beta = \psi \circ \alpha$ . Sea  $\tilde{\beta}$  un levantamiento de  $\beta$ . Entonces  $\alpha$  y  $\lambda \circ \tilde{\beta}$  son levantamientos de  $\beta$  a  $Y$  con punto inicial  $y$ . Se sigue que  $\alpha = \lambda \circ \tilde{\beta}$  por la unicidad del levantamiento. En particular  $z = \lambda[\tilde{\beta}(1)]$ .  $\square$

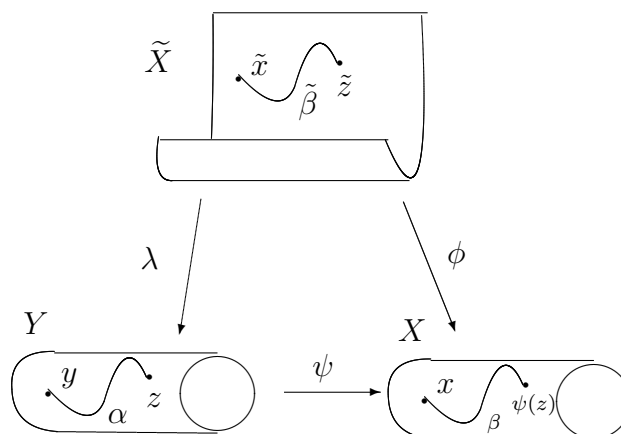


Figure 18.4: Ilustración de la demostración de la Proposición 18.13.

**Corolario 18.13.1.** Si un espacio localmente arco-conexo  $X$  tiene dos recubrimientos  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  y  $\psi : \hat{X} \rightarrow X$ , con  $\tilde{X}$  y  $\hat{X}$  simplemente conexos, entonces existe un homeomorfismo  $\lambda : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  tal que  $\phi = \psi \circ \lambda$ .  $\square$

Por la razón anterior, si  $X$  es localmente arco-conexo, un recubrimiento  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  con  $\tilde{X}$  simplemente conexo se denomina un recubrimiento universal de  $X$ . Estudiaremos ahora las condiciones bajo las cuales un tal recubrimiento universal existe.

**Corolario 18.13.2.** *Sea  $X$  un espacio con recubrimiento universal y si  $\psi : Y \rightarrow X$  es un recubrimiento, entonces  $Y$  tiene un recubrimiento universal y es homeomorfo al recubrimiento universal de  $X$ .*  $\square$

**definición 18.14.** Un espacio  $X$  se dice semilocalmente simplemente conexo si cada punto  $x$  de  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  tales que todo camino cerrado contenido en una vecindad  $B \in \mathfrak{B}$  es homotópico a un camino constante en  $X$  (pero no necesariamente en  $B$ ). Nótese que es suficiente que cada punto tenga una vecindad de este tipo.

**Proposición 18.15.** *Si un espacio localmente arco-conexo  $X$  tiene un recubrimiento universal, entonces  $X$  es un espacio semilocalmente simplemente conexo  $X$ .*

**Demostración** Sea  $x \in X$  un punto arbitrario. Por definición de recubrimiento, existe una vecindad  $V$  de  $x$  en  $X$  que es la imagen homeomorfa de un subconjunto  $U$  del recubrimiento universal  $\tilde{X}$ . Toda curva cerrada  $\alpha$  en  $V$  es la imagen de una curva cerrada  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{X}$  y es por lo tanto homotópica a una curva constante.  $\square$

**Proposición 18.16.** *En un espacio localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo  $X$ , las componentes conexas de  $C_{x,y}(I, X)$  son abiertas.*

**Demostración** Sea  $\alpha$  una curva que une  $x$  con  $y$ . Afirmamos que existe una partición  $0 = t_0, t_1, \dots, t_r = 1$  del intervalo  $I$  tal que para cada sub-intervalo  $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ , su imagen  $\alpha(I_i)$  está contenida en un abierto arco-conexo  $V_i$  tal que todo camino cerrado contenido en  $V_i$  es homotópico a un camino constante en  $X$ . Nótese que para cada  $i$  existe una vecindad arco-conexa  $W_i$  de  $\alpha(t_i)$  contenida en  $V_i \cap V_{i+1}$ . Afirmamos también que si  $\beta$  satisface:

1.  $\beta(I_i) \subseteq V_i$  para  $i = 1, \dots, r$ ,
2.  $\beta(t_i) \in W_i$  para  $i = 1, \dots, r$ ,

entonces  $\beta$  es homotópico a  $\alpha$ . Esto termina la prueba pues las condiciones impuestas a  $\beta$  determinan una vecindad abierta de  $\alpha$  en la topología compacto-abierta.

Para probar la última afirmación observamos que  $\alpha$  es homotópico a  $\alpha_1 * \dots * \alpha_r$  donde  $\alpha_i$  es una reparametrización de la restricción de  $\alpha$  al intervalo  $I_i$ . Del mismo modo  $\beta$  es homotópico a  $\beta_1 * \dots * \beta_r$  donde  $\beta_i$  es una reparametrización de la restricción de  $\beta$  al intervalo  $I_i$ . Sea  $\gamma_i$  un camino en  $W_i$  que une  $\beta(t_i)$  con  $\alpha(t_i)$ . Basta probar por inducción que  $\alpha_1 * \dots * \alpha_i$  es homotópico a  $\beta_1 * \dots * \beta_i * \gamma_i$ , utilizando el hecho de que  $\gamma_{i-1}^{\text{op}} * \beta_i * \gamma_i * \alpha_i^{\text{op}}$  es un camino cerrado en  $V_i$  y es por lo tanto homotópicamente trivial. Para

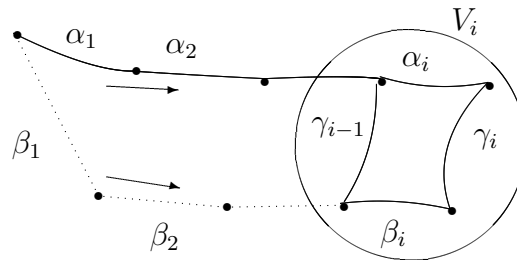


Figure 18.5: Ilustración de la demostración de la Proposición 18.16.

probar la existencia de la partición, observamos que para cada  $x \in X$  existe una vecindad arco-conexa  $V_x$  tal que todo camino cerrado contenido en  $B$  es homotópico a un camino constante en  $X$ . Para cada  $t \in I$ , sea  $J_t$  una vecindad compacta y conexa (es decir un intervalo cerrado) de  $t$  en  $I$  tal que  $\alpha(J_t)$  está contenido en el interior de  $V_{\alpha(t)}$ . Como los intervalos abiertos  $\text{int}(J_t)$  recubren  $I$ , existe un sub-recubrimiento finito  $\{\text{int}(J_{t_1}), \text{int}(J_{t_2}), \dots, \text{int}(J_{t_r})\}$  que recubre  $I$ . Los extremos de estos intervalos forman una partición con las propiedades requeridas.  $\square$

**Proposición 18.17.** *Un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo  $X$  tiene un recubrimiento universal.*

**Demostración** Definimos el espacio  $\tilde{X}$  como el espacio de identificación  $C_{x_0,?}(I, X) / \sim$ , donde  $\alpha \sim \beta$  quiere decir que existe una homotopía de extremos fijos entre  $\alpha$  y  $\beta$ . La función  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  está definida por  $\phi[\alpha] = \alpha(1)$ .

Esta función es epiyectiva ya que  $X$  es arco-conexo, y es continua por la Proposición 13.9. Sea  $x \in X$ , y sea  $V$  una vecindad arco-conexa de  $x$  en  $X$  tal que todo camino cerrado contenido en  $V$  es homotópico a un camino constante en  $X$ . Sea  $\alpha$  un camino de  $x_0$  a  $x$ , y sea  $W_\alpha$  la imagen en  $\tilde{X}$  del conjunto de caminos de la forma  $\alpha * \beta$  donde  $\beta$  es un camino contenido en  $V$ . Si  $\gamma$  es un camino que une  $x_0$  con algún punto  $z \in V$ , entonces existe un camino  $\delta$  en  $V$  que une  $x$  con  $z$ . Se sigue que  $[\gamma] = [(\gamma * \delta^{\text{op}}) * \delta]$ , por lo que la pre-imagen en  $\tilde{X}$  de  $V$  es la unión de los conjuntos  $W_\alpha$  donde  $[\alpha]$  recorre el conjunto de clases de homotopía de caminos de  $x_0$  a  $x$ . Afirmamos que cada conjunto  $W_\alpha$  es abierto y que la restricción de  $\phi$  a  $W_\alpha$  es un homeomorfismo. Esto prueba que  $\phi$  es una función recubridora.

Para ver que  $W_\alpha$  es abierto, basta ver que su pre-imagen en  $C_{x_0,?}(I, X)$  lo es. Sea  $\{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red que converge a un elemento  $\beta$  de  $W_\alpha$ . Si  $\gamma_\lambda$  es un camino que une  $\beta_\lambda(1)$  con  $\beta(1) = z$  y está contenido en  $V$ , entonces  $\beta_\lambda * \gamma_\lambda$  converge a  $\beta * c_z$ , donde  $c_z$  es el camino constante en  $z$ . Se sigue de la proposición precedente que para  $\lambda$  suficientemente grande los caminos  $\beta_\lambda * \gamma_\lambda$  y  $\beta * c_z$  son homotópicos, por lo que  $\beta_\lambda$  es homotópico a  $\beta * \gamma_\lambda^{\text{op}}$ . Por definición  $[\beta] \in W_\alpha$  significa que  $\beta$  es homotópico a un camino de la forma  $\alpha * \delta$  con  $\delta : I \rightarrow V$ . Se sigue que  $\beta_\lambda$  es homotópico a  $(\alpha * \delta) * \gamma_\lambda^{\text{op}}$  de donde se obtiene  $[\beta_\lambda] \in W_\alpha$ .

La restricción de  $\phi$  a  $W_\alpha$  es uno a uno, ya que los elementos de  $W_\alpha$  son de la forma  $[\alpha * \gamma]$  con  $\gamma : I \rightarrow V$ , y para cada par de curvas en  $V$  con los mismos extremos existe una homotopía de extremos fijos entre ellas. Se sigue que para demostrar que la restricción de  $\phi$  a  $W_\alpha$  es un homeomorfismo, basta ver que es bicontinua. Sea  $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una red que converge a  $y$  en  $V$ . Basta ver que podemos escoger caminos de la forma  $\alpha * \gamma_\lambda$  con  $\gamma_\lambda : I \rightarrow V$  uniendo  $x$  con  $y_\lambda$  y  $\alpha * \gamma$  con  $\gamma : I \rightarrow V$  uniendo  $x$  con  $y$ , tales que  $\alpha * \gamma_\lambda \rightarrow \alpha * \gamma$ , puesto que esto implica  $[\alpha * \gamma_\lambda] \rightarrow [\alpha * \gamma]$ . Para ver que tales caminos existen, observamos que si  $\delta$  es cualquier camino en  $V$  que une  $x$  con  $y$  y si cada  $\mu_\lambda$  es un camino en  $V$  que une  $y$  con  $y_\lambda$ , entonces  $\alpha * (\delta * \mu_\lambda)$  converge a  $\alpha * (\delta * c_y)$ . Se sigue que podemos tomar  $\gamma = \delta * c_y$  y  $\gamma_\lambda = \delta * \mu_\lambda$ .

Finalmente, probaremos que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo. Para ello, sea  $\tilde{\alpha}$  una curva cerrada con extremos en  $[c_{x_0}]$  y sea  $\alpha$  su imagen en  $X$ . Entonces  $\alpha$  es una curva cerrada con extremos en  $x_0$ . Afirmamos que  $[\alpha] = [c_{x_0}]$  como elementos de  $\tilde{X}$ , es decir que  $\alpha$  es homotópicamente trivial. Esto implica que su levantamiento  $\tilde{\alpha}$  también lo es, de donde sigue el resultado. Para ello basta ver que si  $\alpha_s$  denota el camino  $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ , entonces  $\tilde{\alpha}(s) = [\alpha_s]$ .

Esta última afirmación es trivial si  $s = 0$  y la imagen de ambos lados es  $\alpha(s) = \alpha_s(1)$ , por lo que la afirmación sigue de la unicidad del levantamiento. Concluimos que  $[c_{x_0}] = \tilde{\alpha}(1) = [\alpha]$  como se afirmaba.  $\square$

En lo sucesivo, diremos un espacio con recubrimiento universal para referirnos a espacios que cumplan las hipótesis de la proposición precedente.

### Ejercicios

1. Sea  $X$  un espacio con recubrimiento universal y sea  $\psi : Y \rightarrow X$  un recubrimiento. Sea  $x \in X$  y sea  $V$  una vecindad abierta arco-conexa de  $x$  tal que cada curva cerrada en  $V$  es homotópicamente trivial en  $X$ . Probar que  $V$  es trivialmente recubierta.
2. Si el espacio  $X$  tiene un recubrimiento universal, y si  $\psi : Y \rightarrow X$  y  $\rho : Z \rightarrow Y$  son recubrimientos, probar que  $\psi \circ \rho : Z \rightarrow X$  es un recubrimiento. Indicación, usar el ejercicio anterior.
3. Sea  $X$  un espacio conexo y sea  $\phi : Y \rightarrow X$  un recubrimiento. Probar que si existe un elemento  $x \in X$  que tiene una cantidad finita  $n$  de pre-imágenes, entonces cada elemento de  $X$  tiene  $n$  pre-imágenes. Tal recubrimiento se denomina un recubrimiento  $n$  a 1 o de  $n$  hojas.
4. El pendiente Hawaiano se define como la unión de una familia infinita  $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots\}$  de círculos tangentes en un punto, con  $\Gamma_n$  de radio  $\frac{1}{n}$ . La Figura 18.6 describe un recubrimiento  $\phi : X \rightarrow Y$  del pendiente Hawaiano que se obtiene desdoblado el círculo  $\Gamma_1$ . Nótese que en este

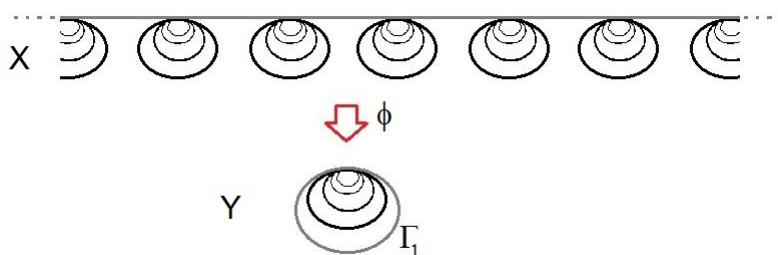


Figure 18.6: El pendiente Hawaiano y un recubrimiento.

cubrimiento cada punto de  $Y$  tiene infinitas pre-ímagenes en  $X$ . Demuestre que existe un recubrimiento  $\psi : Z \rightarrow X$  tal que la composición  $\psi \circ \phi$  no es un recubrimiento. **Sugerencia:** Construir un recubrimiento dos a uno que desdobra una familia de círculos cuyas imágenes en  $Y$  corresponden a los círculos  $\Gamma_n$  con  $n$  tendiendo a infinito. .

5. Sea  $X$  un espacio topológico. Sea  $Y$  un espacio de identificación de  $X$  y sea  $p : X \rightarrow Y$  la proyección canónica.
  - (a) Probar que para todo espacio topológico  $Z$  podemos identificar  $C(Y, Z)$  con un subconjunto de  $C(X, Z)$  identificando a cada función continua  $f : Y \rightarrow Z$  con la función  $\tilde{f} : X \rightarrow Z$  que induce.
  - (b) Si  $C(X, Z)$  tiene la topología compacto-abierta, pruebe que la topología compacto-abierta de  $C(Y, Z)$  es mas fina que la topología de subespacio.
  - (c) probar que las topologías coinciden si  $p$  es un recubrimiento.
6. Sea  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$  el recubrimiento dado por  $f_n(z) = z^n$ . Probar que para una curva cerrada  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$  existe una curva cerrada  $\beta : [0, 1] \rightarrow S^1$  tal que  $f_n \circ \beta = \alpha$  si y sólo si  $\alpha$  es una potencia  $n$ -ésima en el grupo fundamental.
7. Un grafo se define como el espacio topológico que se obtiene al identificar algunos puntos extremos (vértices) en un coproducto de intervalos. Probar que todo espacio que recubre un grafo es un grafo.
8. Probar que si  $X$  es un espacio conexo y  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento, probar que todo par de puntos en  $X$  tiene el mismo número de pre-ímagenes en  $\tilde{X}$  (si este número es  $n$  se dice que el recubrimiento es de  $n$  hojas).
9. Sea  $C$  el cilindro  $C = [0, 1] \times [-1, 1] / \equiv$  con la identificación  $(0, t) \equiv (1, t)$  y sea  $M$  la banda de Moebius definida por  $M = [0, 1] \times [-1, 1] / \equiv'$  con la identificación  $(0, t) \equiv' (1, -t)$ . Probar que la función  $f : C \rightarrow M$  definida por

$$f[s, t] = \left\{ \begin{array}{ll} [2s, t] & \text{si } s \leq 1/2 \\ [2s - 1, -t] & \text{si } s \geq 1/2 \end{array} \right\}$$

es un recubrimiento.

10. Probar que existe un recubrimiento del toro en la botella de Klein.
11. Sea  $P : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento. Probar que  $P$  induce un homomorfismo inyectivo
- $$P_* : \pi_1(\tilde{X}; y) \rightarrow \pi_1(X, x)$$
- para cada  $y \in P^{-1}(x)$ .
12. Probar que toda función continua  $f : S^n \rightarrow S^1$  con  $n > 1$  es homotópica a una función constante.
13. Probar que no existen recubrimientos del toro en la esfera.
14. Sea  $f : Y \rightarrow X$  una función continua que induce el homomorfismo trivial  $f_* : \pi_1(Y; y) \rightarrow \pi_1(X; f(y))$  y sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento. Probar que existe un levantamiento  $\tilde{f}$  de  $f$  a  $\tilde{X}$ .
15. Sea  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$  el recubrimiento definido por  $f_n(z) = z^n$ . Sea  $Y$  un espacio topológico que tiene un recubrimiento universal. Probar que dada una función continua  $g : Y \rightarrow S^1$ , existe una función  $h : Y \rightarrow S^1$  tal que  $g = f_n \circ h$  si y sólo si

$$g_*\left(\pi_1(Y; y)\right) \subseteq n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} = \pi_1\left(S^1; f(y)\right).$$

16. Existen funciones continuas de  $S^1$  al plano proyectivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  que no se levanten a la esfera?
17. Describa el recubrimiento universal del toro.
18. Probar que no hay recubrimientos de la esfera en el toro.
19. Probar que si  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento con  $\tilde{X}$  compacto, entonces cada punto de  $X$  tiene un número finito de pre-imágenes en  $\tilde{X}$ .
20. Probar que un espacio compacto con grupo fundamental infinito no puede tener un recubrimiento universal compacto.
21. Describa el recubrimiento universal del espacio que se obtiene al pegar dos círculos por un punto.



22. Describa el recubrimiento universal del espacio  $X = X_1 \cup X_2$  donde  $X_1$  es la esfera unitaria y  $X_2$  el segmento que une el polo norte con el polo sur.
23. Sea  $p : Y \rightarrow X$  un recubrimiento. Probar que  $X$  tiene un recubrimiento universal si y sólo si  $Y$  tiene un recubrimiento universal.
24. Sea  $X$  un espacio cuyo recubrimiento universal es contractible y sea  $Y$  un espacio simplemente conexo. Probar que toda función continua  $f : Y \rightarrow X$  es homotópica a una constante.

# Chapter 19

## Acciones y recubrimientos regulares

Sea  $G$  un grupo que actúa continuamente en un espacio topológico  $X$ . En otras palabras, asumimos que, para cada  $g \in G$ , la función  $x \mapsto g \cdot x$  es continua. No asumimos aquí que  $G$  tiene una topología, o, si la tiene, no asumimos que la función  $f(g, x) = g \cdot x$  sea continua como función de  $g$ . La existencia de una acción como la descrita arriba nos permite definir el espacio cociente  $G \backslash X$ . Este es un espacio topológico con la topología de identificación.

Diremos que la acción es propiamente discontinua si para todo  $x \in X$  existe una vecindad  $U$  tal que para todo  $g \in G$  se tiene  $U \cap g \cdot U = \emptyset$ . En particular, una acción propiamente discontinua carece de puntos fijos. Nótese que la condición implica  $g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$  para cada par de elementos distintos  $g_1$  y  $g_2$  de  $G$ .

**ejemplo 19.1.** El espacio proyectivo  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  se define como el cociente de la esfera  $S^2$  por la acción del grupo cíclico  $C_2 = \langle \sigma \rangle$  definida por  $\sigma(x) = -x$ .

**ejemplo 19.2.** Sea  $G$  un grupo topológico y sea  $H$  un subgrupo discreto, es decir un subgrupo que es discreto con la topología inducida. El subgrupo  $H$  actúa en  $G$  via multiplicación por la izquierda (o la derecha). Como  $H$  es discreto, debe existir una vecindad  $V$  de la identidad  $e$  de  $G$  que no contiene elementos de  $H$  distintos de  $e$ . Por la continuidad de las operaciones de grupo existe una vecindad  $U$  de  $e$  tal que  $UU^{-1}$  está contenido en  $V$  y por lo tanto  $U \cap hU = \emptyset$  para todo  $h \in H$  distinto de  $e$ .

El siguiente resultado es inmediato de las definiciones:

**Proposición 19.3.** *Si la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua, y si  $H$  es un subgrupo de  $G$  entonces la acción de  $H$  en  $X$  es propiamente discontinua.*  $\square$

**Proposición 19.4.** *Si la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua, y si  $N$  es un subgrupo normal de  $G$  entonces la acción de  $G/N$  en  $N \backslash X$  es propiamente discontinua. En particular el cociente  $(G/N) \backslash (N \backslash X)$  es homeomorfo a  $G \backslash X$ .*

**Demostración** Sea  $x$  un punto en  $X$  y sea  $\bar{x}$  su imagen en el espacio cociente  $G \backslash X$ . Sea  $U$  una vecindad abierta de  $x$  tal que para todo  $g \in G$  se tiene  $U \cap g \cdot U = \emptyset$ . Entonces si  $\tilde{U}$  es la imagen de  $U$  en  $G \backslash X$ , su preimagen en  $X$  es  $\bigcup_{g \in G} g \cdot U$ , una unión disjunta de abiertos. En el cociente  $N \backslash X$  se identifican las vecindades  $gU$  y  $ngU = gn'U$ , con  $n, n' \in N$ , es decir se identifican las vecindades que corresponden a elementos en una misma clase lateral. Como las clases laterales en  $G/N$  no se intersectan, tampoco lo hacen las imágenes en  $N \backslash X$  de los conjuntos de la forma  $\bigcup_{n \in N} ng \cdot U$ , y la unión de estos conjuntos es la pre-imagen de  $U$ . La última afirmación sigue del corolario 5.16.1  $\square$

**Proposición 19.5.** *Si la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua, entonces la proyección canónica de  $X$  en el espacio cociente  $G \backslash X$  es un recubrimiento.*

**Demostración** Sea  $x$  un punto en  $X$  y sea  $\bar{x}$  su imagen en el espacio cociente  $G \backslash X$ . Sea  $U$  una vecindad abierta de  $x$  tal que para todo  $g \in G$  se tiene  $U \cap g \cdot U = \emptyset$ . Entonces si  $\tilde{U}$  es la imagen de  $U$  en  $G \backslash X$ , su preimagen en  $X$  es  $\bigcup_{g \in G} g \cdot U$ , que es abierto, y por lo tanto  $\tilde{U}$  es una vecindad abierta de  $\bar{x}$ . Por otro lado, como  $\bigcup_{g \in G} g \cdot U$  es una unión disjunta de vecindades abiertas, cada una homeomorfa a  $U$ , entonces existe un homeomorfismo

$$\phi : \bigcup_{g \in G} g \cdot U \rightarrow G \times U$$

definido por  $\phi(gu) = (g, u)$ . Bajo esta identificación se tiene  $h \cdot (g, u) = (hg, u)$ , de donde el espacio cociente  $\tilde{U}$  es homeomorfo a cada  $g \cdot U$  mediante  $gu \mapsto \bar{u}$ . El resultado sigue.  $\square$

**Lema 19.6.** *Si la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua, y si una curva cerrada  $\alpha$  en  $G \backslash X$  tiene un levantamiento a una curva cerrada en  $X$ , entonces cada levantamiento de  $\alpha$  a  $X$  es una curva cerrada.*

**Demostración** Sea  $\tilde{\alpha}$  un levantamiento de  $\alpha$ . Si  $\tilde{\alpha}$  es una curva cerrada, entonces cualquier otro levantamiento de  $\alpha$  debe partir de un punto de la forma  $g \cdot x_0$ , luego debe tener la forma  $t \mapsto g \cdot \tilde{\alpha}(t)$ , luego es una curva cerrada.  $\square$

Un recubrimiento que satisface esta propiedad, es decir que si un levantamiento es cerrado entonces todos lo son, recibe el nombre de recubrimiento regular. Uno de los objetivos de este capítulo es caracterizar los recubrimientos regulares.

**Proposición 19.7.** *Si la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua, y si  $p : X \rightarrow G \backslash X$  es la proyección canónica entonces la imagen  $p_*[\pi_1(X; x_0)]$  del grupo fundamental de  $X$  es normal en  $\pi_1(G \backslash X; p(x_0))$ .*

**Demostración** Sea  $\alpha$  una curva cerrada en  $X$  con extremos en  $x_0$ , y sea  $\beta$  una curva cerrada en  $G \backslash X$  con extremos en  $p(x_0)$ . Entonces, si  $\tilde{\beta}$  es el levantamiento de  $\beta$  con punto inicial  $x_0$  y  $\alpha'$  es un levantamiento de  $p \circ \alpha$  con extremos en  $\tilde{\beta}(1)$ , el cual existe por el lema precedente), entonces  $\tilde{\beta} * \alpha' * \tilde{\beta}^{\text{op}}$  es un camino cerrado con extremos en  $x_0$  y su imagen en  $G \backslash X$  corresponde al elemento  $[\beta]p_*[\alpha][\beta]^{-1}$ .  $\square$

El siguiente ejemplo es fundamental en lo que sigue:

**ejemplo 19.8.** Si  $X$  es un espacio con recubrimiento universal, es decir un espacio conexo, localmente conexo y semi-localmente simplemente conexo, el grupo fundamental  $G = \pi_1(X; x)$  actúa en el recubrimiento universal  $\tilde{X}$  mediante  $[\alpha][\gamma] = [\alpha * \gamma]$ . Se sigue del hecho de que  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento, que todo punto  $y \in X$  tiene una vecindad  $V$  trivialmente recubierta, la que puede suponerse arco-conexa y que satisface

$$i_*\left(\pi_1(V; y)\right) = \text{id} \in \pi_1(V; y). \quad (19.1)$$

Dada la construcción explícita de  $\tilde{X}$ , es fácil ver que la pre-imagen de  $V$  en  $\tilde{X}$  es una unión de copias de  $V$  que están en correspondencia con las distintas clases de homotopía de curvas que unen el punto base  $x$  con  $y$ . Asimismo, dados dos puntos distintos  $y, y' \in V$ , existe una correspondencia natural entre clases de homotopía de curvas de  $x$  a  $y$  con las clases de homotopía de curvas de  $x$  a  $y'$  dada por  $[\alpha] \mapsto [\alpha * \epsilon]$  donde  $\epsilon$  es un camino contenido en  $V$ . La condición (19.1) muestra que esta correspondencia es independiente de la elección de  $\epsilon$ .

Todo lo anterior nos dice que la acción de  $G$  en  $\tilde{X}$  es propiamente discontinua. Recuérdesse que el recubrimiento  $p$  se define por la fórmula  $p[\beta] = \beta(1)$ . Nótese que si  $\gamma$  es un camino cerrado en  $X$  con extremos en  $x$ , se tiene

$$p[\beta] = \beta(1) = (\gamma * \beta)(1) = p([\gamma] \cdot [\beta]),$$

para todo camino  $\beta$  con  $x$  como extremo inicial, por lo que la función recubridora  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  induce una función continua epiyectiva bien definida  $q : G \backslash \tilde{X} \rightarrow X$ , la que es abierta, ya que  $p$  lo es por ser una aplicación recubridora, e inyectiva, pues  $p[\beta_1] = p[\beta_2]$  si y sólo si  $\beta_1(1) = \beta_2(1)$  por lo que  $\gamma = \beta_1 * \beta_2^{\text{op}}$  es un camino cerrado para el cual  $\gamma * \beta_2$  es homotópico a  $\beta_1$ . Se sigue que  $q$  es un homeomorfismo, de modo que puede identificarse  $X$  con  $G \backslash \tilde{X}$ .

Sea  $\phi = \phi_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$  el recubrimiento universal de un espacio  $Y$  que satisface las hipótesis del teorema de existencia. Usaremos esta notación a menudo en lo que sigue. Por la Proposición 18.13, para todo recubrimiento  $q : X \rightarrow Y$ , existe un único levantamiento  $\psi : \tilde{Y} \rightarrow X$  tal que  $\phi = q \circ \psi$  y  $\psi[c_y] = x$ , donde  $c_y$  es el camino constante igual a  $y$ . Consideramos la acción definida en el ejemplo 19.8. Recordemos que si  $\alpha$  es un camino en  $Y$  con extremo inicial en  $y$ , su único levantamiento en  $\tilde{Y}$  con extremo inicial en  $[c_y]$  viene dado por  $\tilde{\alpha}(t) = [\alpha_t]$ , donde  $\alpha_t$  es el camino definido por  $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$ . Se sigue que para todo camino  $\alpha$  en  $Y$  con extremo inicial en  $y$  se tiene  $\psi[\alpha] = \hat{\alpha}(1)$  donde  $\hat{\alpha}$  es el levantamiento de  $\alpha$  a  $X$  con extremo inicial en  $x$ .

**Proposición 19.9.** *Sea  $Y$  un espacio con recubrimiento universal. Sea  $q : X \rightarrow Y$  un recubrimiento, con  $X$  conexo. Sea  $y = q(x)$  y sea  $H = q_*[\pi_1(X; x)]$ , como subgrupo de  $G = \pi_1(Y; y)$ . Entonces existe un homeomorfismo  $\psi' : H \backslash \tilde{Y} \rightarrow X$  inducido por la función  $\psi : \tilde{Y} \rightarrow X$ .*

**Demostración** Dos elementos  $[\beta_1]$  y  $[\beta_2]$  en  $\tilde{Y}$  están en la misma  $H$ -órbita si y sólo si  $\beta_1$  es homotópico a  $(q \circ \gamma) * \beta_2$  para algún camino cerrado  $\gamma$  en  $X$  con extremos en  $x$ . Se sigue que si  $\hat{\beta}_i$  es un levantamiento de  $\beta_i$  a  $X$  con extremo inicial en  $x$ , se tiene

$$\psi[\beta_1] = \hat{\beta}_1(1) = \gamma * \hat{\beta}_2(1) = \hat{\beta}_2(1) = \psi[\beta_2],$$

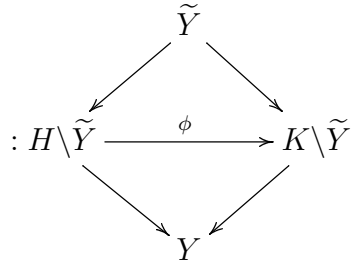
ya que  $\gamma$  es un camino cerrado. Se concluye que  $\psi' : H \backslash \tilde{Y} \rightarrow X$  está bien definida. Esta función es epiyectiva por ser  $X$  conexo, y por lo tanto arcoconexo, dado que  $Y$  tiene recubrimiento universal. Además es abierta, dado

que  $\psi$  lo es por ser una aplicación recubridora. Falta sólo ver que es inyectiva, lo que seguirá si probamos que  $\psi[\beta_1] = \psi[\beta_2]$  implica que el levantamiento  $\hat{\beta}_1$  a  $X$  es homotópico a un camino de la forma  $\gamma * \hat{\beta}_2$  con  $\gamma$  cerrado en  $X$ , pero esto es inmediato ya que  $\psi[\beta_1] = \psi[\beta_2]$  implica  $\hat{\beta}_1(1) = \hat{\beta}_2(1)$ , y por lo tanto  $\hat{\beta}_1 * \hat{\beta}_2^{\text{op}}$  es un camino cerrado.  $\square$

El resultado precedente puede re-interpretarse como sigue:

Cada recubrimiento de  $Y$  es isomorfo a un recubrimiento de la forma  $H \backslash \tilde{Y} \rightarrow Y$ , donde  $H$  es un subgrupo del grupo fundamental de  $Y$ .

Nótese que existe una función continua  $\phi : H \backslash \tilde{Y} \rightarrow K \backslash \tilde{Y}$  que hace que el diagrama



conmute si y sólo si el subgrupo  $H$  está contenido en el subgrupo  $K$ , de modo que existe una correspondencia entre recubrimientos de  $Y$  y subgrupos de su grupo fundamental análoga a la correspondencia entre subgrupos y subcuerpos que estudia la Teoría de Galois. Estamos ahora en condiciones de probar el inverso de la Proposición 19.7:

**Proposición 19.10.** *Supongamos que  $Y$  es conexo, localmente arco-conexo, y semi-localmente simplemente conexo. Sea  $q : X \rightarrow Y$  un recubrimiento con  $X$  conexo. Si la imagen  $q_*[\pi_1(X; x)]$  del grupo fundamental de  $X$  es normal en  $\pi_1(Y; q(x))$ , entonces existe un grupo  $G$  actuando en  $X$  tal que la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua y un homeomorfismo  $\phi : Y \rightarrow G \backslash X$  tal que la proyección canónica  $p : X \rightarrow G \backslash X$  satisface  $p = \phi \circ q$ .*

**Demostración** Sea  $\tilde{G} = \pi_1(Y; q(x))$  y sea  $N = q_*[\pi_1(X; x)]$ , el que es por hipótesis un subgrupo normal de  $\tilde{G}$ . Como  $\psi' : N \backslash \tilde{Y} \rightarrow X$  es un homeomorfismo, podemos usarlo para trasladar la acción de  $\tilde{G}/N$  en  $N \backslash \tilde{Y}$  a  $X$  para obtener lo pedido.  $\square$

El siguiente es uno de los resultados principales de este capítulo:

**Proposición 19.11.** *Sea  $Y$  un espacio con recubrimiento universal y sea  $q : X \rightarrow Y$  un recubrimiento con  $X$  conexo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $q$  es un recubrimiento regular.
2. Existe un grupo  $G$  y una acción propiamente discontinua de  $G$  en  $X$ , para la que existe un homeomorfismo  $h : G \backslash X \rightarrow Y$ , que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 p \swarrow & & \searrow q \\
 : G \backslash X & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

conmute si  $p$  es la proyección canónica.

3.  $q_*[\pi_1(X; x)]$  es normal en  $\pi_1(Y; q(x))$  para algún punto  $x \in X$ .
4.  $q_*[\pi_1(X; x)]$  es normal en  $\pi_1(Y; q(x))$  para todo punto  $x \in X$ .

**Demostración** El hecho de que la Afirmación 3 implica la Afirmación 2 es la Proposición 19.9. Si  $q$  satisface la Afirmación 2, entonces proviene de una acción propiamente discontinua y el Lema 19.6 implica la Afirmación 1. Como es obvio que la Afirmación 4 implica la Afirmación 3, sólo falta probar que la Afirmación 1 implica la Afirmación 4. Supongamos ahora que cada curva cerrada  $\alpha$  en  $Y$  que tiene un levantamiento cerrado a  $X$  tiene todos sus levantamientos a  $X$  cerrados. Sea  $x \in X$  y sea  $a \in q_*[\pi_1(X; x)]$ . En particular  $a = [q \circ \hat{\alpha}]$  para alguna curva cerrada  $\hat{\alpha}$  en  $X$ . Esto es otra manera de decir que  $\hat{\alpha}$  es un levantamiento del camino  $\alpha = q \circ \hat{\alpha}$ , ya que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \hat{\alpha} \nearrow & & \downarrow q \\
 [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & Y
 \end{array}$$

Basta probar que para todo elemento  $b \in \pi_1(Y; q(x))$ , se tiene  $bab^{-1} \in q_*[\pi_1(X; x)]$ . Sea  $\gamma$  un representante de  $b$  y sea  $\hat{\gamma}$  un levantamiento de  $\gamma$  a  $X$  con extremo inicial en  $x$ . Sea  $\tilde{\alpha}$  el levantamiento de  $\alpha$  con extremo inicial en  $\hat{\gamma}(1)$ . Este es también su extremo final por hipótesis, dado que, al ser la

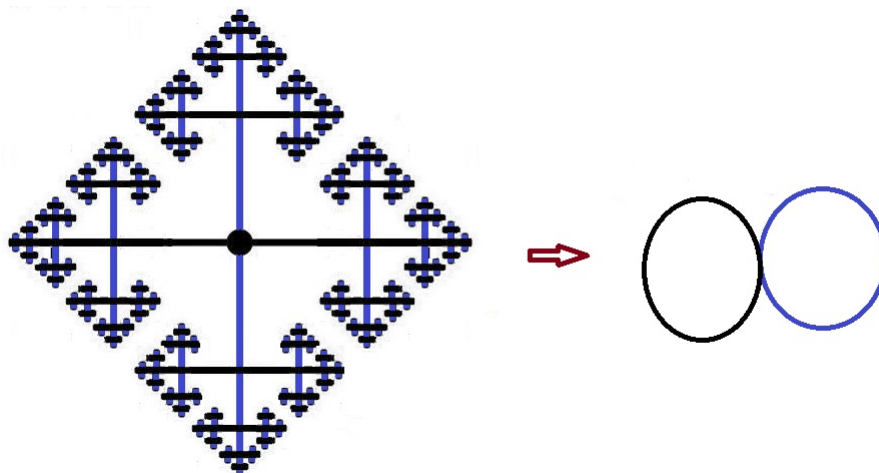


Figure 19.1: La Antena de Televisión universal como recubrimiento de la *figura-8*.

curva cerrada  $\hat{\alpha}$  un levantamiento de  $\alpha$ , todos los levantamientos de  $\alpha$  son curvas cerradas. Se sigue que  $\hat{\gamma} * \tilde{\alpha} * \hat{\gamma}^{\text{op}}$  es un camino cerrado y su imagen en  $Y$  es un representante de la clase  $bab^{-1} \in \pi_1(Y; q(x))$ .  $\square$

No es difícil mostrar que el recubrimiento universal de la *figura-8*, es decir de la unión de dos círculos con un punto en común es la Antena de Televisión Universal, es decir el árbol infinito donde cada vértice tiene valencia 4, cómo se describió en el Capítulo 7. En la Figura 19.1 se ilustra esta función. Las aristas de la antena se han coloreado azul o negro según el círculo de la *figura-8* que tienen como imagen. Dado que el grupo fundamental de la *figura-8* es el grupo libre  $F_2$ , este grupo actúa en la antena. Esta observación permite el estudio del grupo libre via la teoría de recubrimientos. De hecho, es posible interpretar cualquier grupo libre  $F(S)$ , con un conjunto  $S$  de generadores, como el grupo fundamental de el espacio  $X_S$  que se obtiene al pegar una familia de círculos  $\{\Gamma_s | s \in S\}$  por un único punto. No se requiere que el conjunto de generadores  $S$  sea finito o siquiera numerable, pues es claro que  $X_S$  es el cociente de un árbol apropiado por la acción de  $F(S)$ , y un árbol es simplemente conexo. Concluimos que el grupo fundamental de  $X_S$  es el grupo libre  $F(S)$ . Cómo todo grafo puede probarse homotópicamente equivalente a un espacio de este tipo contrayendo un árbol maximal, concluimos que el



grupo fundamental de todo grafo es un grupo libre. Nótese que para probar la existencia de un árbol maximal en el caso infinito se requiere el uso del Lema de Zorn. Dado que todo recubrimiento de un grafo es un grafo, la siguiente proposición es inmediata de los resultados de este capítulo:

**Proposición 19.12.** *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*  $\square$

**Proposición 19.13.** *Sea  $G$  un grupo que tiene una acción propiamente discontinua en un espacio con recubrimiento universal  $Y$ . Sea  $X = G \backslash Y$ . Sea  $\tilde{G} = \pi_1(X; x)$  para algún punto  $x \in X$ , de modo que  $X = \tilde{G} \backslash \tilde{X}$ , donde  $\tilde{X}$  es el recubrimiento universal de  $X$ . Sea  $y \in Y$  con  $x = p(y)$ , donde  $p : Y \rightarrow X$  es el recubrimiento asociado a la acción. Sea  $H = p_*[\pi_1(Y; y)]$ , de modo que  $Y$  es canónicamente homeomorfo  $H \backslash \tilde{X}$ . Entonces existe un isomorfismo  $\phi : \tilde{G}/H \xrightarrow{\cong} G$  que respeta la acción en  $Y$ .*

**Demostración** Sabemos que  $H$  es normal en  $\tilde{G}$ , y que  $\tilde{G}/H$  actúa en  $Y$  con el cociente correcto. De hecho, para toda clase  $[\alpha] \in \tilde{G}$ , esta acción se calcula escribiendo cada elemento  $y' \in Y$  como el extremo final  $\gamma(1)$  de un camino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  que satisface  $\gamma(0) = y$ , y definiendo

$$[\alpha] \cdot y' = \left( \alpha * \widetilde{(p \circ \gamma)} \right)(1),$$

Donde  $\alpha * \widetilde{(p \circ \gamma)}$  es un levantamiento del camino  $\alpha * (p \circ \gamma)$ , de  $X$  a  $Y$ .

Sea  $\tilde{\alpha}$  el levantamiento de  $\alpha$  que inicia en  $y$ . Nótese que  $\tilde{\alpha}(1)$  pertenece a la preimagen de  $x$  en  $Y$ , la que coincide con la órbita de  $y$ . Sea  $g \in G$  el único elemento que satisface  $\tilde{\alpha}(1) = g \cdot y'$ . No es difícil ver que

$$\alpha * \widetilde{(p \circ \gamma)} = \tilde{\alpha} * (g \cdot \gamma),$$

donde  $g \cdot \gamma$  se define mediante  $(g \cdot \gamma)(t) = g \cdot \gamma(t)$ . Esto demuestra que  $g \cdot y' = [\alpha] \cdot y'$  para todo  $y' \in Y$  con tal de que se tenga  $g \cdot y = [\alpha] \cdot y$ . Además  $[\alpha] \cdot y$  depende sólo de la clase  $[\alpha]$ , por lo que lo mismo sucede con  $g$ . Podemos, por lo tanto, escribir  $g = \phi([\alpha])$ . Sólo queda probar que  $\phi$ , así definido, es un isomorfismo de grupos.

La función  $\phi$  es epiyectiva, dado que para cada elemento  $g \in G$ , se tiene que el punto  $g \cdot y \in p^{-1}(x)$  es el extremo final de una curva que parte en  $y$ , por lo que puede escribirse en la forma  $g \cdot y = [\alpha] \cdot y$  para alguna curva

cerrada  $\alpha$  que parte de  $x$ . Para ver que es un homomorfismo, escogemos caminos  $\alpha$  y  $\beta$  que unen  $y$  con  $g \cdot y$  y  $h \cdot y$ , respectivamente. Observamos que  $(gh) \cdot y = g \cdot (h \cdot y)$  es el extremo final del camino  $\tilde{\alpha} * (g \cdot \tilde{\beta})$ , donde  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  son levantamientos de  $\alpha$  y  $\beta$  que partende  $y$ . El camino  $\tilde{\alpha} * (g \cdot \tilde{\beta})$  es un levantamiento de  $\alpha * \beta$ , de donde se sigue lo pedido. Finalmente, para la inyectividad, escogemos un camino  $\alpha$  tal que  $\phi(\overline{[\alpha]})$  es la identidad. En otras palabras, si  $\tilde{\alpha}$  es el levantamiento de  $\alpha$  a  $Y$  que parte de  $y$ , entonces el extremo final  $\tilde{\alpha}(1)$  coincide con  $y$ . Esto significa que  $\tilde{\alpha}$  es un camino cerrado en  $y$ , por lo que la clase  $\overline{[\alpha]}$  es trivial.  $\square$

**Corolario 19.13.1.** *Si se tiene una acción propiamente discontinua de un grupo  $G$  en un espacio simplemente conexo  $X$ , entonces el grupo fundamental de  $G \backslash X$  es isomorfo a  $G$ .*  $\square$

**ejemplo 19.14.** El grupo  $\{\pm 1\} \cong C_2$  actúa de manera propiamente discontinua en la esfera y el cociente es el plano proyectivo. Se concluye que el grupo fundamental del cociente es isomorfo a  $C_2$ .

**ejemplo 19.15.** El grupo  $\mathbb{Z}^2$  actúa de manera propiamente discontinua en el plano y el cociente es el toro. Se concluye que el grupo fundamental del cociente es isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$ .

**ejemplo 19.16.** Es fácil ver que las transformaciones  $f(x, y) = (x + 1, -y)$  y  $g(x, y) = (x, y + 1)$  generan un grupo que actúa en el plano de manera propiamente discontinua y que el cociente es homeomorfo a la botella de Klein. Se concluye que el grupo generado por  $f$  y  $g$  es isomorfo al grupo fundamental de la botella de Klein. Es decir al grupo

$$G \cong \langle x, y | xyx = y \rangle.$$

**ejemplo 19.17.** Ilustraremos la acción del grupo fundamental en el recubrimiento en el caso de la antena de televisión universal. Para ello, consideremos el camino  $\alpha$  en la *figura-8*, tal como se ilustra en la Figura 19.2. A la izquierda de la figura hemos dibujado un levantamiento  $\tilde{\alpha}$  de dicha curva al recubrimiento universal. Observense los caminos verde y rojo que parten del punto central, así como sus copias que se inician en el extremo final de  $\alpha$ . Apreciase la interpretación *a posteriori* de esta acción como un desplazamiento.

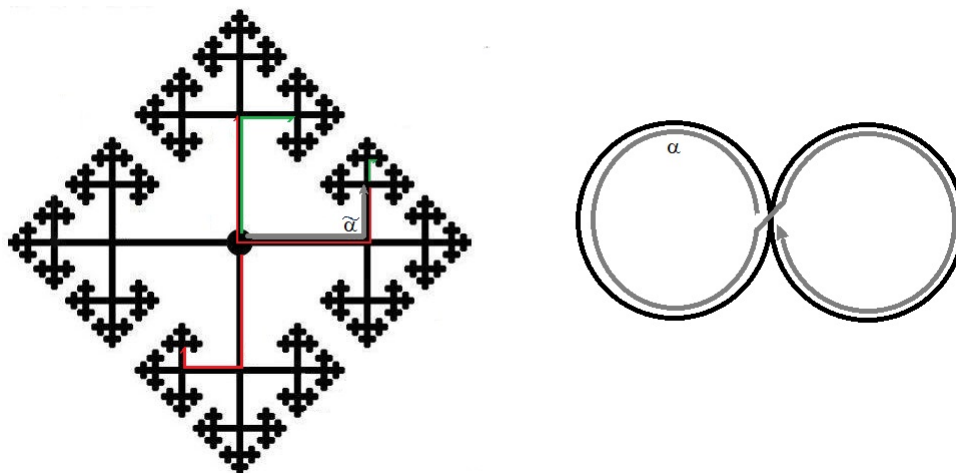


Figure 19.2: La acción de la clase de un camino  $[\alpha]$  en caminos y puntos.

**ejemplo 19.18.** A continuación describiremos todos los recubrimientos dos a uno de la *figura-8*. Nótese que cualquier recubrimiento de este tipo tiene la forma  $H \backslash \tilde{X}$ , donde  $\tilde{X}$  es la antena de televisión universal y  $H$  es un subgrupo de índice 2 en  $F_2 = \langle a, b | \emptyset \rangle$ . Tal subgrupo  $H$  es necesariamente normal y el cociente  $F_2/H \cong C_2 = \{0, 1\}$  es el único grupo con dos elementos salvo isomorfismos. El subgrupo  $H$ , por lo tanto, puede ser descrito como el núcleo de un homomorfismo epiyectivo  $\psi : F_2 \rightarrow C_2$ . Para determinar el número de tales subgrupos, debemos entender cuando un segundo homomorfismo  $\psi' : F_2 \rightarrow C_2$  tiene el mismo núcleo. Esto significa que los isomorfismos inducidos  $\tilde{\psi} : F_2/H \rightarrow C_2$  y  $\tilde{\psi}' : F_2/H \rightarrow C_2$  pueden colocarse en un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & F_2/H & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 C_2 & & C_2 \\
 \xrightarrow{\alpha} & & \xrightarrow{\alpha}
 \end{array}$$

cuya flecha horizontal  $\alpha = \tilde{\psi} \circ (\tilde{\psi}')^{-1}$  es un isomorfismo. Esto nos permite

escribir el diagrama conmutativo

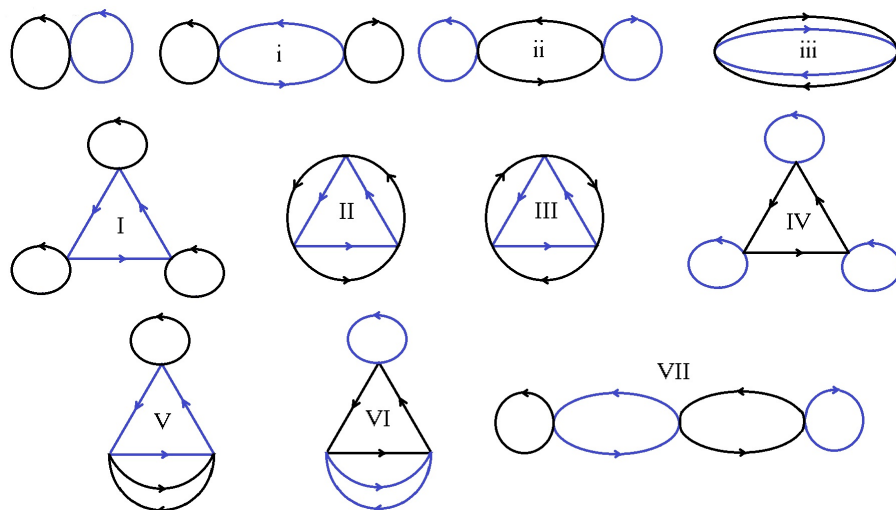
$$\begin{array}{ccc}
 & F_2 & \\
 \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\
 C_2 & \xrightarrow{\alpha} & C_2
 \end{array}$$

Conversamente, cada diagrama de este tipo cuya flecha horizontal denota un isomorfismo nos entrega dos homomorfismos diagonales con el mismo núcleo. Debemos, por lo tanto, describir los homomorfismos  $\psi : F_2 \rightarrow C_2$  salvo automorfismos de  $C_2$ . Esto último es sencillo, ya que  $C_2$  carece de automorfismos no triviales. Además todo homomorfismo de  $C_2$  es epiyectivo, salvo si la imagen de cada generador es trivial. Todos los homomorfismos están, por lo tanto, cubiertos por la siguiente lista:

- $\psi(a) = 1$  y  $\psi(b) = 0$ .
- $\psi(a) = 0$  y  $\psi(b) = 1$ .
- $\psi(a) = 1$  y  $\psi(b) = 1$ .

El primero corresponde a un subgrupo  $H$  que contiene a  $b$ , pero no a  $a$ . En particular, en el correspondiente espacio recubridor las preimágenes del ciclo que corresponde a  $b$  son curvas cerradas, mientras que las preimágenes del ciclo que corresponde a  $a$  no lo son. Un análisis similar se tiene en el segundo caso. En el tercer caso, el subgrupo  $H$  no contiene a  $a$  ni a  $b$ , pero si contiene al producto  $ab$ , por lo que la yuxtaposición de las curvas correspondiente debe ser una curva cerrada en el espacio recubridor. Obtenemos así los diagramas i, ii y iii de la Figura 19.3.

**ejemplo 19.19.** Seguimos con los recubrimientos tres a uno de la *figura-8*. En este caso el subgrupo  $H$  no es necesariamente normal y conviene considerar ambos casos, correspondientes a recubrimientos regulares y no regulares, por separado. En el caso regular, el cociente  $F_2/H \cong C_3 = \{0, 1, 2\}$  es el único grupo con tres elementos salvo isomorfismos. Debemos, por lo tanto, describir los homomorfismos  $\psi : F_2 \rightarrow C_3$  salvo automorfismos de  $C_3$ . Este último grupo tiene un único automorfismo no trivial, el que intercambia 1 y 2. Si  $\psi(a) = 2$ , siempre podemos aplicar un automorfismo y asumir  $\psi(a) = 1$ . Sin embargo, en este caso no podemos aplicarlo por segunda vez para fijar  $\psi(b)$ . Sin embargo, cuando  $\psi(a) = 0$  si podemos fijar  $\psi(b)$ . Esto nos permite reducirnos a los siguientes homomorfismos:

Figure 19.3: Los recubrimientos 2 a 1 y 3 a 1 de la *figura-8*.

- $\psi(a) = 1$  y  $\psi(b) = 0$ .
- $\psi(a) = 1$  y  $\psi(b) = 1$ .
- $\psi(a) = 1$  y  $\psi(b) = 2$ .
- $\psi(a) = 0$  y  $\psi(b) = 1$ .

Las mismas consideraciones sobre los caminos cerrados en este caso nos permite obtener los diagramas I, II, III y IV de la Figura 19.3.

Para obtener los recubrimientos no regulares necesitamos determinar los subgrupos no normales de índice 3 en  $F_2$ . Nótese que cada subgrupo de este tipo debe contener un subgrupo normal  $N$  de  $F_2$ , llamado su corazón, que es definido como el núcleo de la acción de  $F_2$  en  $F_2/H$  por multiplicación por la izquierda. Como  $F_2/H$  tiene tres elementos, el orden de  $F_2/N$  debe dividir a  $3! = 6$ . Concluimos, dado que  $H$  no es normal, que  $F_2/N$  debe ser isomorfo al grupo simétrico  $S_3$ . Dado que este grupo no es cíclico, no puede ser generado por un único elemento, por lo que el homomorfismo  $\psi$  correspondiente al subgrupo normal  $N$  no puede enviar a ninguno de los dos generadores a la identidad. Tampoco puede enviar ambos generadores a

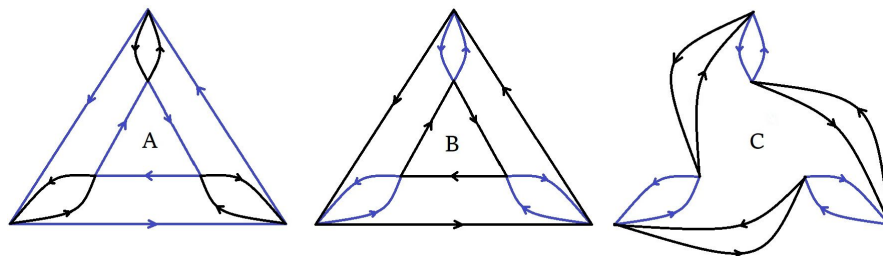


Figure 19.4: Los recubrimientos de la *figura-8* con una acción propiamente discontinua del grupo  $S_3$ .

elementos de orden 3, ya que estos están contenidos en el subgrupo  $A_3$ . Nos reducimos así a tres casos:

- $\psi(a)$  tiene orden 3 y  $\psi(b)$  tiene orden 2.
- $\psi(a)$  tiene orden 2 y  $\psi(b)$  tiene orden 3.
- Ambos,  $\psi(a)$  y  $\psi(b)$ , tienen orden 2, y son diferentes entre si.

En  $S_3$ , las permutaciones de orden 3 permutan cíclicamente, via conjugación, los elementos de orden 2, mientras que cada permutación de orden 2 permuta, cíclicamente, tanto los elementos de orden 3 entre si, como los restantes elementos de orden 2 entre si. En el primer caso podemos conjugar por un elemento de orden 2 para fijar  $\psi(a)$  arbitrariamente, y luego conjugar por un elemento de orden 3 para cambiar  $\psi(b)$  sin mover  $\psi(a)$ . Lo mismo puede hacerse en el segundo caso. En el último caso podemos conjugar por un elemento de orden 3 para llevar  $\psi(a)$  a cualquier transposición pre-elegida, y luego conjugar por  $\psi(a)$  para mover  $\psi(b)$ . Así, en cada caso tenemos un único recubrimiento. Estos se ilustran en la Figura 19.4. Para obtener el recubrimiento no regular, debe cocientarse por una transposición. Esto nos deja 3 elecciones en cada caso, lo que da 9 grupos  $H$ . Sin embargo, remplazar un grupo  $H$  por un conjugado es equivalente a cambiar la pre-imagen  $y$  del punto base  $x$  que se usa para definir el recubrimiento, por lo que los recubrimientos obtenidos son isomorfos. Esto nos entrega los diagramas V, VI y VII de la Figura 19.3.

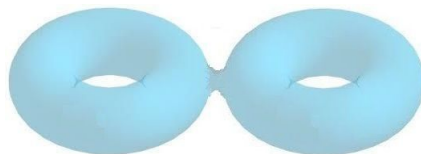


Figure 19.5: El bitoro.

Definiremos el bitoro como el espacio que se obtiene al recotar un disco de cada uno de dos toros y pegar los espacios restantes por el círculo borde de cada uno. Esta construcción se ilustra en la Figura 19.5. Finalizaremos este capítulo con el siguiente resultado:

**Proposición 19.20.** *El recubrimiento universal del bitoro es homeomorfo al plano.*

**Demostración** Basta encontrar alguna acción propiamente discontinua, en un espacio homeomorfo al plano, cuyo cociente sea homeomorfo al bitoro. Para ello, utilizaremos algunas propiedades de las transformaciones de Moebius y de la métrica hiperbólica que no demostraremos aquí. Sea  $D$  el interior del círculo unitario  $\mathbb{U}$ . Las propiedades que necesitaremos son las siguientes:

- Una transformación de Moebius lleva círculos y/o rectas en círculos y/o rectas.
- Una transformación de Moebius es conforme, es decir, preserva ángulos entre curvas.
- Una transformación de Moebius preserva la orientación, es decir, al verla como una función diferenciable de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo, su derivada tiene determinante positivo.
- Una transformación de Moebius está totalmente determinada por las imágenes de tres puntos.
- Los círculos y rectas perpendiculares a  $\mathbb{U}$  son las geodésicas de la métrica hiperbólica en  $D$ .
- La métrica hiperbólica en  $D$  es invariante por transformaciones de Moebius que fijan  $D$ .

Sea  $z$  un punto en el primer cuadrante del círculo unitario. Sea  $\mu$  la transformación de Moebius que lleva a los puntos  $z$ ,  $\bar{z}$  y  $1$  en  $-\bar{z}$ ,  $-z$  y  $1$ , respectivamente. Esta transformación necesariamente preserva el círculo unitario que es el único círculo que pasa por cada uno de estos tríos de puntos. Por otro lado, como  $\mu$  preserva la orientación, y como cada trío de puntos,  $(z, \bar{z}, 1)$  y  $(-\bar{z}, -z, 1)$ , está ordenado en el mismo sentido respecto de  $\mathbb{U}$ , debemos concluir que  $\mu$  preserva  $D$ . Además  $\mu$  lleva el círculo que es perpendicular a  $\mathbb{U}$  en  $z$  y  $\bar{z}$  al círculo que es perpendicular a  $\mathbb{U}$  en  $-z$  y  $-\bar{z}$ , como muestra la Figura 19.6.A. En particular,  $\mu$  lleva la región verde a algún subconjunto de la región amarilla, mientras que la inversa  $\mu^{-1}$  lleva la región verde a algún subconjunto de la región naranja. Por esta razón, nos referiremos a esta transformación como un desplazamiento.

Sea  $\rho$  la transformación de Moebius definida por  $\rho(z) = e^{\pi i/4}$ . A continuación consideramos las 8 rotaciones  $\mu_i = \rho^i \circ \mu \circ \rho^{-i}$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ , del desplazamiento ya definido. Nótese que se tiene la relación  $\mu_{i+4} = \mu_i^{-1}$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Cada una de estas lleva la región en verde en la Figura 19.6.B al interior de un círculo diferente. Nos referiremos a la región verde como el octágono fundamental, y a sus imágenes bajo el grupo  $\Omega$  de transformaciones de Moebius que fija  $D$  como octágonos. Nótese que todo octágono está determinado por uno de sus lados, ya que los elementos de  $\Omega$  preservan los ángulos interiores (orientados) y los largos hiperbólicos de los lados. Aquí se usa el hecho de que por un punto de una superficie con una métrica Riemanianna pasa una única geodésica en cada dirección.

Cada una de las traslaciones  $\mu_i$  identifica dos lados opuestos del octágono fundamental. Para comprobar esto observamos que todos los lados tienen el mismo largo, ya que son imágenes, unos de otros, bajo rotaciones en  $\Omega$ . Además  $\omega$  lleva el punto medio del arco que va de  $z$  a  $\bar{z}$  al punto medio del arco que va de  $-\bar{z}$  a  $-z$ , pues preserva la recta real. Esto último puede comprobarse mediante un cálculo explícito, pero no es necesario, ya que la transformación  $\lambda$  definida por  $\lambda(z) = \overline{\mu(\bar{z})}$ , la que es de Moebius, satisface la propiedad que define a  $\mu$ .

A continuación estudiamos las imágenes del octágono fundamental bajo productos de traslaciones  $\mu_i$ . Si  $\alpha$  es una transformación que lleva el octágono  $O$ , en verde en la Figura 19.6.C, en el rectángulo adyacente  $\alpha(O)$  en amarillo, y si  $\beta(O)$  contiene la zona celeste, entonces  $\alpha \circ \beta(O)$  contiene a la zona café. Iterando este procedimiento se obtiene una sucesión de octágonos que se enrolla alrededor de un vértice común, como a la derecha de la figura. Si se asume que los ángulos interiores miden exactamente  $\pi/4$ , se obtienen



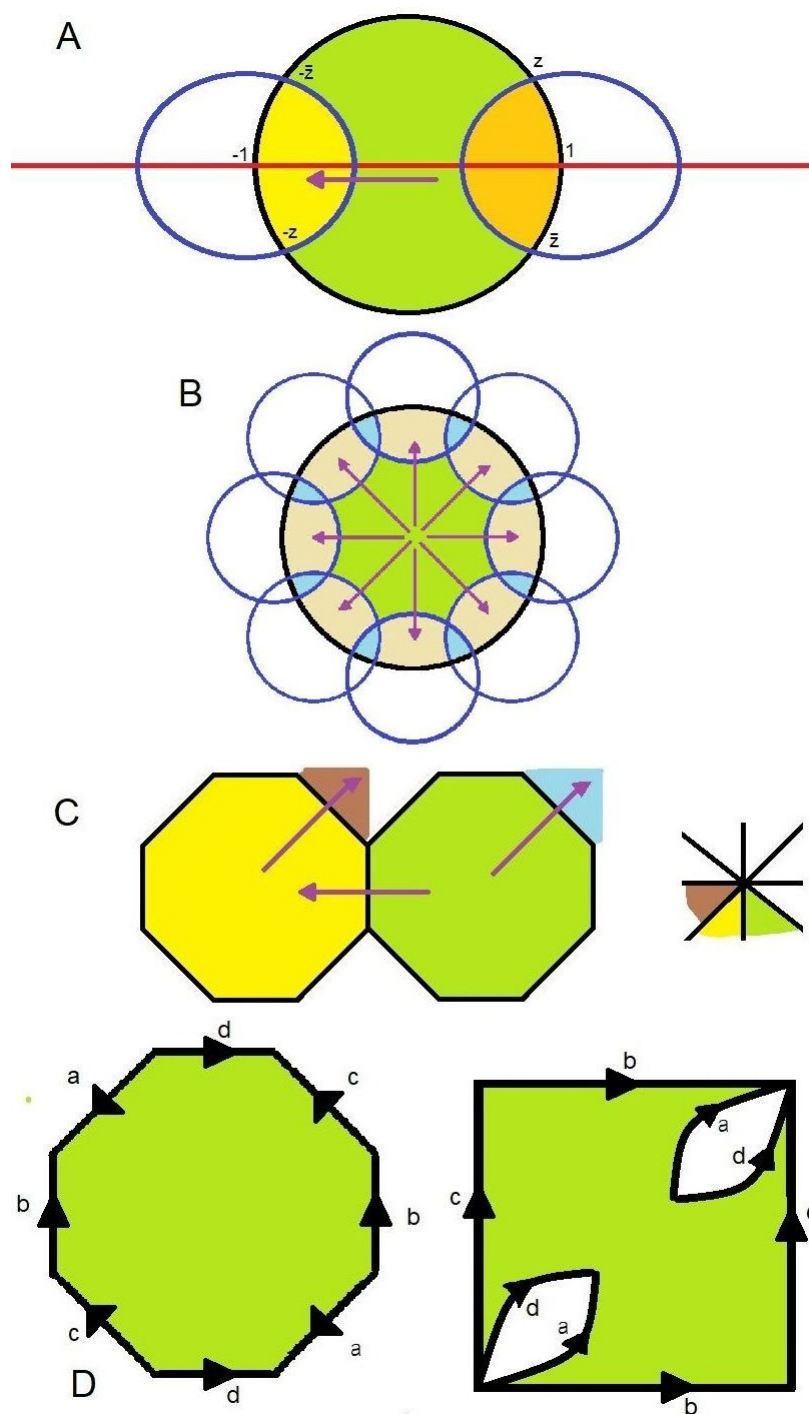


Figure 19.6: Ilustraciones para demostrar la Proposición 19.20.

ocho octágonos que encajan perfectamente alrededor del vértice dado. Esto puede hacerse escogiendo  $z$  apropiadamente. Si el ángulo entre  $z$  y  $\bar{z}$  vale  $\pi/4$  los círculos son tangentes. Si  $z$  está muy cerca de  $i$ , de modo que el arco entre  $z$  y  $\bar{z}$  es casi recto, los ángulos interiores del octágono fundamental  $O_0$  aproximan el valor  $3\pi/4$  que tienen los ángulos interiores de un octágono plano. Para algún valor intermedio de  $z$  los ángulos interiores toman el valor correcto. Cuando esto ocurre, las imágenes de  $O_0$  por elementos del grupo  $G = \langle \mu_i | 0 \leq i \leq 7 \rangle$  se enrollan alrededor de cada vértice formando una teselación completa del plano hiperbólico similar a la teselación de  $\mathbb{R}^2$  por cuadrados que corresponde al recubrimiento fundamental del toro. Esto muestra que la acción de  $G$  en  $D$  es propiamente discontinua y que el cociente es homeomorfo al espacio que se obtiene identificando los lados opuestos de un octágono como muestra la Figura 19.6.D.

Sólo resta mostrar que este último espacio es homeomorfo al bitoro. Para ello utilizamos las identificaciones para comprobar que todos los vértices están en una misma órbita, por lo que podemos ilustrar este espacio como se muestra a la derecha de la Figura 19.6.D. Identificando los lados  $b$  y  $c$  se obtiene claramente un toro con dos agujeros, y los bordes restantes se identifican formando un asa adicional.  $\square$

### Ejercicios

1. Sea  $X$  un espacio con recubrimiento universal  $\tilde{X}$ . Sean  $\phi_1 : Y_1 \rightarrow X$  y  $\phi_2 : Y_2 \rightarrow X$  dos recubrimientos conexos que satisfacen

$$\phi_{1*}(\pi_1(Y_1; y_1)) = \phi_{2*}(\pi_1(Y_2; y_2)),$$

donde los puntos  $y_1 \in Y_1$  e  $y_2 \in Y_2$  satisfacen  $\phi_1(y_1) = \phi_2(y_2)$ . Probar que existe un homeomorfismo  $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$  tal que  $\phi_1 = \phi_2 \circ \psi$ .

2. Sea  $X$  un espacio con recubrimiento universal  $\tilde{X}$  y sea  $\phi : Y \rightarrow X$  un recubrimiento. Sean  $y$  e  $y_1$  dos pre-imágenes de un punto  $x \in X$ . Probar que para una (toda) curva  $\alpha = \phi \circ \beta$ , donde  $\beta$  une  $y$  con  $y_1$ , se tiene

$$[\alpha]\phi_*(\pi_1(Y; y_1))[\alpha]^{-1} = \phi_*(\pi_1(Y; y)).$$

3. En las notaciones del problema precedente, probar que existe un homeomorfismo  $\psi : Y \rightarrow Y$  que satisface  $\phi = \phi \circ \psi$  y  $\psi(y) = y_1$  si y sólo si

Figure 19.7: La superficie de género  $g$ .

$\phi_*\left(\pi_1(Y; y_1)\right) = \phi_*\left(\pi_1(Y; y)\right)$ . Concluir de aquí que el grupo de automorfismos  $\rho : Y \rightarrow Y$  que satisfacen  $\phi = \phi \circ \rho$  actúan transitivamente en la preimagen  $\phi^{-1}(x)$  de un punto  $x \in X$  si y sólo si  $\phi_*\left(\pi_1(Y; y)\right)$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(X; x)$ .

4. Probar que todo espacio que recubre un toro es homeomorfo al plano, un cilindro, u otro toro.
5. Sea  $X$  el complemento de dos puntos en el plano. Determine cuantos recubrimientos dos a uno o tres a uno de  $X$  existen, salvo isomorfismos.
6. Sea  $X_n$  el espacio que se obtiene al identificar (en el mismo sentido) todos los lados de un polígono de  $n$  lados. Para que valores de  $n$  existe un recubrimiento de dos hojas  $\phi : Y \rightarrow X_n$  con  $Y$  conexo?
7. Sea  $X = X_1 \cup X_2$  donde  $X_1$  es la esfera unitaria y  $X_2$  el segmento que une el polo norte y el polo sur. Describa todos los recubrimientos conexos de  $X$ .
8. La superficie  $S_g$  de género  $g$  es el espacio ilustrado en la Figura 19.5, en la que la rosquilla se repite exactamente  $g$  veces. Sea  $G_g$  el grupo fundamental de dicha superficie. Demuestre que  $G_2$  tiene un subgrupo isomorfo a  $G_g$  para cada  $g \geq 3$ .
9. Pruebe que el recubrimiento universal de  $S_g$  es homeomorfo al plano si  $g \geq 3$ .
10. Sea  $F$  el grupo libre con generadores  $a$  y  $b$  y sea  $G$  el subgrupo normal generado por  $a^2$  y  $b$ . Encuentre un conjunto de generadores de  $G$  (sugerencia: observe que el subgrupo  $G$  corresponde a un recubrimiento de

dos hojas, y encuentre generadores del espacio recubridor correspondiente).

11. Encuentre un conjunto minimal de generadores para el menor subgrupo normal  $K \subseteq F_2$  que contiene a  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  y  $(x_1x_2)^2$ .
12. Sea  $H$  un subgrupo de índice  $m$  de  $F_n$ . Probar que  $H$  es isomorfo a  $F_N$  con  $N - 1 = m(n - 1)$ .
13. Encuentre todos los recubrimientos regulares seis a uno de la figura 8.
14. Encuentre todos los recubrimientos regulares  $p : Y \rightarrow X$  ocho a uno de la figura 8, pero los que  $X$  es el cociente de  $Y$  por la acción de un grupo isomorfo al grupo cuaternión  $Q_8$ .
15. Probar que el grupo libre  $F_\infty$  con una cantidad numerable de generadores es isomorfo a un subgrupo del grupo libre  $F_2$  (sugerencia: buscar un recubrimiento apropiado).
16. Sea  $G$  un grupo finitamente presentado (es decir que  $G$  está definido por una cantidad finita de generadores y una cantidad finita de relaciones). Probar que existe un espacio topológico cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $G$ . Usando esta idea, describa un método para estudiar los subgrupos de índice finito de  $G$ .
17. Sea  $X$  es espacio que se obtiene al pegar por un punto los espacios  $X_1$  y  $X_2$ . Asumiendo que  $X_1$  y  $X_2$  tienen un recubrimiento universal, probar que  $X$  tiene un recubrimiento universal y describalo. Sugerencia: intente primero el caso  $\pi_1(X_1; x) \cong \pi_1(X_2; x) \cong C_2$ .
18. Sea  $X$  es espacio que se obtiene al pegar dos planos proyectivos por un punto. Determine cuantos recubrimientos dos a uno y tres a uno existen, salvo isomorfismos.
19. Sea  $X$  es espacio que se obtiene al pegar dos planos proyectivos por un punto. Demuestre que  $X$  no puede ser homeomorfo a un cociente de la forma  $G \setminus Y$ , donde  $Y$  es conexo y  $G$  es isomorfo a  $Q_8$ .
20. Sea  $B = S_2$  el bitoro. Sea  $K \leq \pi_1(B, b_0)$  el subgrupo correspondiente al recubrimiento cuatro-a-uno  $\phi : Y \rightarrow B$  que satisface  $\phi = \phi \circ \sigma$  para una rotación  $\sigma$  de orden 4 como la ilustrada en la Figura 19.6. Encuentre un conjunto de generadores de  $K$ .

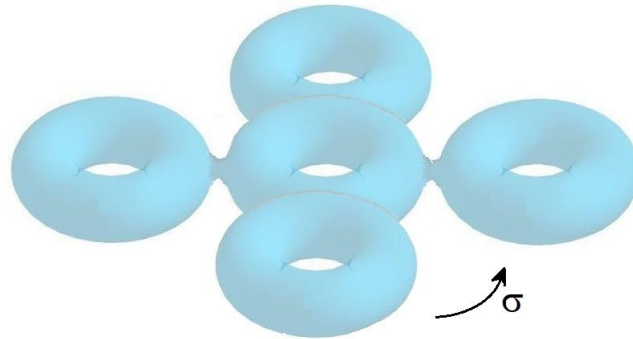


Figure 19.8: Una acción cuyo cociente es el bitoro.

21. En la demostración de la proposición 19.20, calcule el valor de  $z$  y escriba explícitamente las transformaciones  $\mu_i$ .
22. En la demostración de la proposición 19.20, describa explícitamente el grupo  $G$  en términos de generadores y relaciones.

# Chapter 20

## Teorías de homología.

El grupo fundamental nos permite distinguir, entre sí, un buen número de espacios topológicos. Sin embargo, este concepto no es tan útil, por ejemplo, para distinguir esferas de dimensión superior. Es posible definir análogos del grupo fundamental en dimensiones mayores. Tales grupos son llamados grupos de homotopía. Sin embargo, estos grupos son a menudo difíciles de calcular. Es por tal razón que introduciremos una herramienta algebraica que facilita este estudio en una variedad amplia de situaciones. Son los llamados grupos de homología. El contexto natural para definir estos grupos es el de complejos de cadenas. En estas notas, por un complejo de cadenas, entenderemos una sucesión  $C_n$  de grupos abelianos junto con una sucesión de morfismos  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  que satisfacen

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Si  $n$  es claro del contexto, o al hablar de todas estas funciones en forma genérica, omitiremos el sub-índice, escribiendo, por ejemplo, la ecuación anterior como  $\partial^2 = 0$ . Definiremos también

$$Z_n = \ker(\partial_n), \quad B_n = \text{im}(\partial_{n+1}), \quad H_n = Z_n/B_n.$$

Nótese que esto tiene sentido ya que la ecuación  $\partial^2 = 0$  nos da  $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$ . Llamaremos a  $H_n$  el  $n$ -ésimo grupo de homología del complejo. A menudo utilizaremos una notación del tipo

$$\mathfrak{C} : \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0=0} \{0\}$$

para denotar tal complejo de cadenas, en cuyo caso utilizaremos notaciones como  $Z_n(\mathfrak{C})$  o  $H_n(\mathfrak{C})$ , especialmente la última.

**ejemplo 20.1.** Consideremos el complejo de cadenas

$$\mathfrak{C} : \dots \xrightarrow{\partial_4} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \{0\},$$

donde  $\partial_n = 0$  para cada  $n$ . Entonces  $H_n(\mathfrak{C}) = C_n$  para cada  $n$ .

**ejemplo 20.2.** Consideremos el complejo de cadenas

$$\mathfrak{C} : \dots \xrightarrow{\partial_3} \{0\} \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \{0\},$$

donde  $C_n = 0$  para cada  $n \geq 3$ . Supongamos además que

$$C_2 = \mathbb{Z}, \quad C_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad C_0 = \mathbb{Z},$$

mientras que las funciones borde no triviales están definidas por

$$\partial_2(n) = (n, -n), \quad \partial_1(s, t) = s + t.$$

Podemos comprobar que se trata de un complejo de cadenas, puesto que

$$\partial_1 \circ \partial_2(n) = n + (-n) = 0.$$

En este caso comprobamos que  $H_n(\mathfrak{C}) = \{0\}$  para cada  $n$ .

En general, nos interesan, por cierto, complejos de cadenas que tengan una definición sencilla en términos de ciertos objetos de interés en topología. Daremos, a continuación, algunos de los ejemplos que juegan un rol central en los capítulos que siguen.

**Homología Simplicial:** Sea  $\Sigma$  un complejo simplicial, como se definió en el capítulo 16. Para cada símplice  $T \in \Sigma$  se escoge un orden en sus vértices, es decir, escribimos  $T = T_{x_0, \dots, x_n}$ , y consideramos para este símplice un elemento abstracto  $[x_0, \dots, x_n]$ . Asociamos a  $\Sigma$  un complejo de cadenas  $\mathfrak{C}^{\text{simp.}}$  en el que los grupos  $C_n$  se definen formalmente como sigue:

$$C_n^{\text{simp.}}(\Sigma) = \bigoplus_{T_{x_0, \dots, x_n} \in \Sigma} \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n].$$

Para cada permutación  $\rho$  del conjunto  $\{0, \dots, n\}$  se utiliza la convención  $[x_{\rho(0)}, \dots, x_{\rho(n)}] = (\text{sgn}(\rho))[x_0, \dots, x_n]$ , donde  $\text{sgn}$  denota la función signo. Los operadores borde  $\partial_n$  se definen mediante la fórmula

$$\partial[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n],$$

la que se extiende por linealidad. Aquí, el símbolo  $\widehat{x}$  denota la ausencia del correspondiente elemento  $x$ . El complejo  $\mathfrak{C}^{\text{simp}}$ , así definido, recibe el nombre de complejo de cadenas simpliciales. Podemos comprobar que de hecho se trata de un complejo de cadenas por un simple cálculo en los generadores:

$$\begin{aligned} \partial^2[x_0, \dots, x_n] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial[x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n] \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \partial[x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \partial[x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n] \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \partial[x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \partial[x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n] = 0, \end{aligned}$$

donde, en el penúltimo paso, se intercambia  $i$  por  $j$  en la primera suma. Este complejo de cadenas se denota  $\mathfrak{C}^{\text{simp}}(\Sigma)$ . Los correspondientes grupos de homología se definen por  $H_n^{\text{simp}}(\Sigma) := H_n(\mathfrak{C}^{\text{simp}}(\Sigma))$ . Se les llama grupos de homología simplicial.

**ejemplo 20.3.** Consideremos el complejo simplicial de la Figura 20.1. En este caso tenemos los bordes

$$\begin{aligned} \partial A &= e - b + a, & \partial B &= c - d + e, & \partial a &= x - w, \\ \partial b &= y - w, & \partial c &= z - y, & \partial d &= z - x, & \partial e &= y - x. \end{aligned}$$

Lo que nos da el complejo de cadenas

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^5 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^4 \longrightarrow \{0\},$$



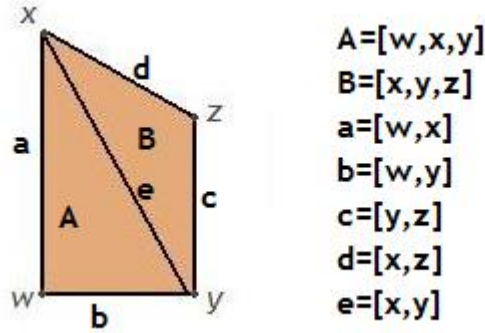


Figure 20.1: Un complejo y una orientación para sus símplices.

con bases ordenadas  $\{A, B\}$ ,  $\{a, b, c, d, e\}$ ,  $\{x, y, z, w\}$ , y donde los operadores borde están dados por las matrices

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí comprobamos que  $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma) = H_1^{\text{simp.}}(\Sigma) = \{0\}$ , mientras que la 0-homología nos da  $H_0^{\text{simp.}}(\Sigma) = \mathbb{Z}$ .

Llamaremos  $\Delta$ -complejo, o complejo simplicial generalizado, a un complejo simplicial en el que algunos símplices han sido identificados entre ellos, con la condición de que si dos símplices se identifican, lo mismo ocurre con todas sus caras en forma consistente. La notación para símplices dada más arriba no es tan útil en este contexto más general, pero la definición dada allí puede aún extenderse. Dejamos al lector la tarea de convencerse de esto.

**ejemplo 20.4.** Consideremos el complejo simplicial generalizado de la Figura 20.2. En otras palabras, tomamos la unión disjunta de dos símplices  $A = [w, x, y]$  y  $A' = [w', x', y']$ , para, a continuación, identificar los vértices correspondientes,  $w$  con  $w'$ ,  $x$  con  $x'$  e  $y$  con  $y'$ , así como las aristas correspondientes,  $a = [x, w]$  con  $[x', w']$ , y así sucesivamente. A nivel de clases de

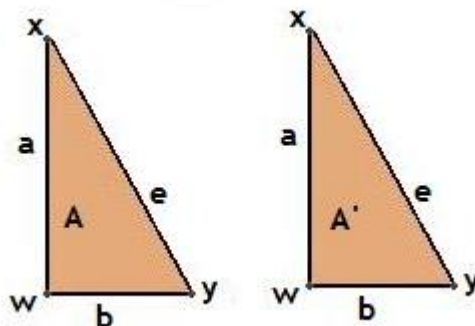


Figure 20.2: Dos símplices con bordes identificados.

equivalencia, tenemos ahora los bordes

$$\begin{aligned}\partial A &= e - b + a, & \partial A' &= e - b + a, \\ \partial a &= x - w, & \partial b &= y - w, & \partial e &= y - x.\end{aligned}$$

Lo que nos da el complejo de cadenas

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \{0\},$$

con bases ordenadas  $\{A, B\}$ ,  $\{a, b, e\}$ ,  $\{w, x, y\}$ , y donde los operadores borde están dados por las matrices

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí comprobamos que  $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1^{\text{simp.}}(\Sigma) = \{0\}$  y  $H_0^{\text{simp.}}(\Sigma) = \mathbb{Z}$ .

**$\Delta$ -Homología:** Sea  $\Sigma$  un  $\Delta$ -complejo. Un símlice singular combinatorial (o más simplemente, un símlice combinatorial) es una función

simplicial  $\sigma : T_u \rightarrow \Sigma$  donde  $T_u$  es el símplice unitario  $n$ -dimensional definido en el capítulo 16. Definimos el grupo de  $\Delta$ - $n$ -cadenas por

$$C_n^\Delta(\Sigma) = \bigoplus_{\substack{\sigma: T_u \rightarrow \Sigma \\ \text{simp. sing. comb.}}} \mathbb{Z}\sigma,$$

es decir,  $C_n^\Delta(\Sigma)$  es un módulo libre con una base indexada por los símplices combinatoriales. Por costumbre, el elemento de la base se identifica con el símplice correspondiente, por lo que los elementos de  $C_n^\Delta(\Sigma)$  se escriben como combinaciones formales de dichos símplices.

Por simplicidad, escribiremos la base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  como  $\{e_0, \dots, e_n\}$ , de modo que el símplice  $T_u$  tenga a dicha base cómo conjunto de vértices. Supongamos primero que  $\Sigma$  es un complejo simplicial. En este caso, un símplice combinatorial  $\sigma$  est  totalmente determinado por la imagen  $a_i$  de cada vector  $e_i$  de la base canónica, dado que  $\sigma$  es una función simplicial. Por esta razón, utilizaremos a menudo la notación  $\sigma =: |[a_0, \dots, a_n]|$ . En tal caso, podemos definir el borde por la fórmula siguiente:

$$\partial|[x_0, \dots, x_n]| = \sum_{i=0}^n (-1)^i |[x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n]|,$$

la que es enteramente análoga a la dada más arriba. En particular, la fórmula  $\partial^2 = 0$  se prueba como antes, con un ligero cambio de paréntesis. Cómo un ejemplo, obs rvase que, si  $\Sigma$  coincide con el símplice unitario  $T_u = [e_0, \dots, e_n]$ , entonces el símplice combinatorial  $\sigma_u = |[e_0, \dots, e_n]| : T_u \rightarrow T_u$  es simplemente la función identidad.

En el caso general, donde  $\Sigma$  es un  $\Delta$ -complejo arbitrario, se utiliza una definición algo más elaborada del operador borde. Se define la  $i$ -ésima cara del símplice unitario por

$$\tau_i = |[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]|,$$

y se define el operador borde mediante  $\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \tau_i$ . Nótese que esto es consistente con la fórmula precedente cuando  $\Sigma$  es un complejo simplicial. Si extendemos el operador composición  $\tau \mapsto \sigma \circ \tau$  linealmente a todo el grupo  $C_{n-1}^\Delta(\Sigma)$ , esta última fórmula se re-escribe  $\partial\sigma = \sigma \circ (\partial\sigma_u)$ . Esta observación permite demostrar fácilmente la fórmula  $\partial^2 = 0$  en completa generalidad. Este complejo de cadenas se denota  $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma)$ . Los correspondientes grupos

de homología son  $H_n^\Delta(\Sigma) := H_n(\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma))$ . Los llamaremos grupos de  $\Delta$ -homología.

En lo que sigue, nos referiremos a los símlices de la forma  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ , los que son conjuntos y no funciones, como símlices geométricos, a fin de evitar confusiones con los símlices combinatoriales, o con los símlices singulares que definimos más abajo.

**ejemplo 20.5.** Incluso complejos simpliciales muy sencillos (o poco complejos!) tienen un número infinito de símlices singulares combinatoriales, por lo que calcular ejemplos explícitos es difícil en este punto. Calcularemos aquí solamente la  $\Delta$ -homología del complejo que contiene sólo un símlice y de dimensión 0, es decir un punto. En este caso existe un único símlice singular en cada dimensión  $n$ . Lo denotaremos  $\lambda_n$ . No es difícil ver que  $\lambda_n \circ \tau_i = \lambda_{n-1}$  para cada  $i$ , ya que este es el único símlice de la dimensión correcta. Concluimos que el complejo de  $\Delta$ -cadenas tiene la forma

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\lambda_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\lambda_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\lambda_0 \longrightarrow \{0\}.$$

Observamos que  $\partial\lambda_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}-1}{2} \lambda_{n-1}$ , de modo que los operadores borde  $\partial_n$ , con  $n$  par, coinciden con el isomorfismo canónico, mientras los restantes son nulos. Identifiquemos cada generador con 1 por simplicidad. Obtenemos así la sucesión

$$\dots \xrightarrow{r_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{r_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{r_0} \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}, \quad r_i(1) = i,$$

el cual tiene homología nula, salvo en dimensión 0. En este caso la  $\Delta$ -homología coincide con la simplicial. Veremos más adelante que este es el caso para todo complejo simplicial.

**Homología Singular:** Sea  $X$  un espacio topológico. Un símlice singular en  $X$  es cualquier función continua  $\sigma : T_u \rightarrow X$ , con  $T_u$  como antes. Definimos el grupo de  $n$ -cadenas singulares mediante

$$C_n^{\text{sing.}}(X) = \bigoplus_{\substack{\sigma: T_u \rightarrow X \\ \text{simp. sing.}}} \mathbb{Z}\sigma.$$

El operador borde se define mediante  $\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \tau_i$ , como en el ejemplo anterior, y se demuestra la fórmula  $\partial^2 = 0$  también análogamente. En este caso escribimos  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$  por el complejo, y  $H_n^{\text{sing.}}(X) := H_n(\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X))$  por los grupos de homología.

**ejemplo 20.6.** Se deduce fácilmente que los grupos de homología singular del espacio  $\{p\}$  con un único punto son de la forma

$$H_0^{\text{sing.}}(\{p\}) = \mathbb{Z}, \quad H_n^{\text{sing.}}(\{p\}) = \{0\} \text{ para } n > 1,$$

puesto que este espacio tiene una estructura natural como  $\Delta$ -complejo y cada símplice singular allí es combinatorial.

**Modelos de papel:** El conjunto de símplices singulares puede ser, en la práctica, bastante poco manejable, pero hay un truco que permite reducir muchos cálculos a la  $\Delta$ -homología. Sea  $\tilde{\Sigma}$  cualquier familia finita de símplices singulares en un espacio topológico  $X$ . Asumiremos que esta familia es cerrada bajo caras y permutaciones, donde una cara de un símplice  $\sigma$  es cualquiera de los símplices  $\sigma \circ \tau_i$  que aparecen en la definición del operador borde, mientras que una permutación es cualquier símplice de la forma

$$\sigma \circ |[e_{\mu(0)}, e_{\mu(1)}, \dots, e_{\mu(n)}|,$$

donde  $\mu$  es una permutación del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Podemos definir un  $\Delta$ -complejo  $\Sigma$  con un símplice (geométrico) por cada símplice singular en  $\tilde{\Sigma}$ , identificando caras y permutaciones de la manera natural. Sea  $|\Sigma|$  el polihedro de  $\Sigma$ , es decir, el espacio topológico subyacente al complejo. Los símplices singulares pueden pegarse para dar una función continua  $\phi : |\Sigma| \rightarrow X$  tal que cada símplice singular en  $\tilde{\Sigma}$  es la imagen de un símplice combinatorial de  $\Sigma$ . Este truco permite trasladar identidades obtenidas para símplices combinatoriales al caso más general de símplices singulares, y reducir muchos cálculos a la construcción de modelos de papel apropiados.

**ejemplo 20.7.** Consideremos un 2-símplice combinatorial arbitrario y procedamos a dividirlo en tres símplices menores como muestra la Figura 20.3. Podemos probar que, ordenando apropiadamente los vértices de los símplices menores, existe un 3-símplice singular  $\rho$  que satisface  $\sigma + \partial\rho = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , donde la imagen de  $\sigma$  es el símplice mayor, mientras  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , y  $\sigma_3$  tienen como imágenes a los símplices menores. Una manera de hacer esto es construir un modelo de papel, que en este caso es el borde de un 3-símplice geométrico. No es difícil extender este modelo a uno que incluya el interior del 3-símplice. De hecho, puede extenderse mediante una función lineal. Pudiendo hacer esto con un símplice geométrico, no hay dificultad en ver que lo mismo se aplica a cualquier símplice singular. Los detalles se dejan al lector.

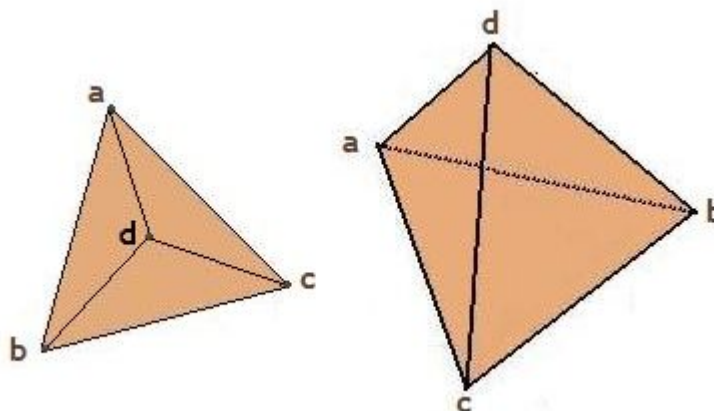


Figure 20.3: Modelo de papel para una subdivisión del 2-símplice.

**ejemplo 20.8.** Sea  $\sigma$  un 1-símplice singular arbitrario, el que puede interpretarse como una curva, y denotemos por  $\tau$  una reparametrización de la misma. Sabemos por el Lema 15.2 que existe una homotopía entre ambas curvas. Triangulando el cuadrado de forma apropiada, obtenemos un modelo de papel para esta situación como el representado en la Figura 20.4. La imagen de las líneas horizontales  $c$  y  $d$  son funciones constantes. Se deduce fácilmente del ejemplo 20.5 que el 1-símplice constante es un borde y por lo tanto también lo es el ciclo  $\sigma - \tau$ , que es la imagen de  $a - b$ .

**Homología con coeficientes:** Todo lo dicho anteriormente se aplica si, para cualquiera de las teorías precedentes, reemplazamos una cadena  $\mathfrak{C}$  por la cadena  $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{Z}} A$  para un grupo abeliano  $A$  cualquiera. En otras palabras, reemplazamos el grupo de  $n$ -cadenas  $C_n$  por el producto tensorial  $C_n \otimes_{\mathbb{Z}} A$ , y definimos el operador borde en este nuevo complejo por  $\hat{\partial} = \partial \otimes \text{Id}$ . De este modo obtenemos los grupos de homología  $H_n^{\text{Simp.}}(\Sigma, A)$ ,  $H_n^{\Delta}(\Sigma, A)$  y  $H_n^{\text{Sing.}}(X, A)$ , donde  $\Sigma$  es un complejo simplicial y  $X$  un espacio topológico. En este caso, hablaremos de grupos de homología con coeficientes en  $A$ .

### Ejercicios

Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos.

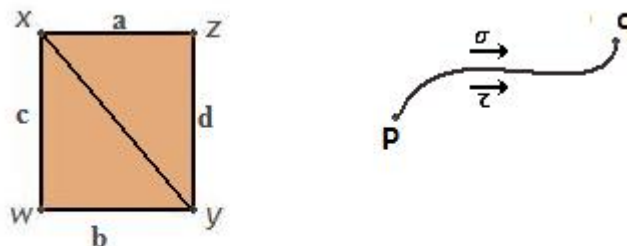


Figure 20.4: Modelo de papel para exhibir la diferencia de dos reparametrizaciones como un borde.

1. Calcule la homotopía del complejo

$$0 \xrightarrow{a} C_3 \xrightarrow{b} C_2 \xrightarrow{c} C_1 \xrightarrow{d} C_0,$$

donde se tienen las identidades

$$C_3 = \mathbb{Z}^3, C_2 = \mathbb{Z}^3, C_1 = \mathbb{Z}^3, C_0 = \mathbb{Z}^2,$$

y las funciones  $a, b, c, d$  tienen las matrices respectivas

$$[a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [b] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[c] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [d] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Calcule la homotopía del complejo

$$0 \xrightarrow{a} C_3 \xrightarrow{b} C_2 \xrightarrow{c} C_1 \xrightarrow{d} C_0,$$

donde se tienen las identidades

$$C_3 = \mathbb{F}_2^3, C_2 = \mathbb{F}_2^3, C_1 = \mathbb{F}_2^3, C_0 = \mathbb{F}_2^2,$$

y las funciones  $a, b, c, d$  tienen las matrices descritas mas arriba, pero en  $\mathbb{F}_2$ .

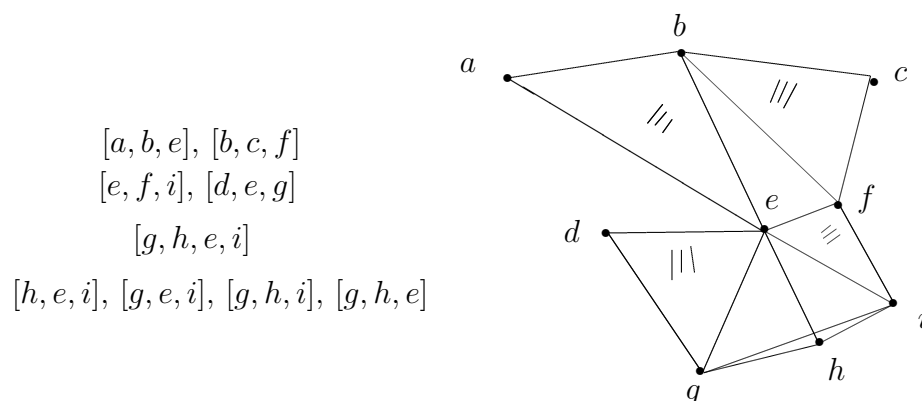


Figure 20.5: Un complejo simplicial.

3. Sea  $A$  un grupo abeliano arbitrario. Sea  $t : A \rightarrow A$  el homomorfismo  $t(x) = nx$  para algún entero  $n$  fijo. Pruebe que  $0 \rightarrow A \xrightarrow{t} A \rightarrow 0$  es un complejo de cadenas y calcule sus grupos de homología.
4. Sea  $K$  el complejo de la Figura 20.5, cuyos simplicios de dimensión 2 y 3 están indicados: Calcule los grupos de homología simplicial de  $K$ .
5. Probar que un grafo finito  $G$  es un árbol si y sólo si  $H_1^{\text{simp.}}(G) = \{0\}$ .
6. Sea  $\Sigma$  un complejo bidimensional cuyo poliedro es homeomorfo al disco. Llamaremos a este tipo de complejo un disco combinatorial. Probar por inducción que  $H_1^{\text{simp.}}(\Sigma)$  y  $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma)$  son triviales.
7. Sea  $\Sigma$  un complejo que se obtiene pegando dos discos combinatoriales por el borde, de modo que el poliedro  $|\Sigma|$  es homeomorfo la esfera  $S^1$ . Probar, usando el ejercicio anterior, que  $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ .
8. Probar que si  $K$  es un complejo de dimensión  $n$ , entonces  $H_n^{\text{simp.}}(K)$  es libre de torsión.
9. Probar que para todo complejo  $K$  y para cada  $p \geq n + 2$  se tiene  $H_n^{\text{simp.}}(K) = H_n^{\text{simp.}}(K_p)$ , donde  $K_p$  es el  $p$ -esqueleto de  $K$ .



10. Sea  $K$  un complejo arbitrario. Probar que  $H_0^{\text{simp.}}(K) \cong \mathbb{Z}^r$  donde  $r$  es el número de componentes conexas de  $K$ .
11. Encuentre un  $\Delta$ -complejo  $K_n$ , para cada entero  $n$ , tal que  $H_1^{\text{simp.}}(K_n) \cong C_n$ , donde  $C_n$  es el grupo cíclico con  $n$  elementos.
12. Sea  $X$  un espacio topológico con  $r$  componentes arco-conexas, probar que  $H_0^{\text{sing.}}(X) \cong \mathbb{Z}^r$ .
13. Sea  $X$  un espacio topológico contractible. Denotemos por  $B^2$  al disco unitario. Probar que para toda curva cerrada  $\gamma$  en  $X$  existe una función continua  $\rho : B^2 \rightarrow X$  tal que  $\gamma$  puede verse como el borde de  $\rho$  en un sentido apropiado. Usar esta idea para probar que  $H_1^{\text{sing.}}(X)$  es trivial.
14. Sea  $K$  una triangulación de una superficie compacta  $X$ . Diremos que  $K$  es orientable si es posible dar una orientación a cada cara (2-símplice) de  $K$  de modo que caras vecinas tengan orientaciones compatibles (dos orientaciones son compatibles si al calcular el borde de cada símplice, el coeficiente del lado común se cancela). Probar que, si  $K$  es orientable, entonces  $H_2^{\text{simp.}}(K) \cong \mathbb{Z}$ , y en caso contrario  $H_2^{\text{simp.}}(K) = \{0\}$ .
15. En una arista  $[a_1, a_2]$ , demuestre que la suma de los símplices combinatoriales  $|[a_1, a_2]|$  y  $|[a_2, a_1]|$  es un borde. Sugerencia: Calcule el borde de  $|[a_1, a_2, a_1]|$ .

# Chapter 21

## Homotopías de Cadenas.

El propósito del presente capítulo es estudiar la invariancia topológica de los grupos de homología. Es claro, ya de la definición, que los grupos de homología singular dependen sólo del espacio topológico sobre el cual se definen, por lo que son invariantes bajo homeomorfismos. Esto no es, a priori, cierto para la  $\Delta$ -homología, o la homología simplicial, puesto que estas dependen de la representación de un cierto espacio como el polihedro de un complejo. Sin embargo, es posible mostrar que todas estas teorías coinciden y que son invariantes bajo equivalencia homotópica, lo que es mucho más fuerte que la invariancia bajo homeomorfismos. En este capítulo mostraremos que este es el caso para la homología singular de un espacio topológico. A continuación lo probaremos para la  $\Delta$ -homología de un complejo, probando que esta coincide con la homología singular del polihedro correspondiente. Para cumplir dicho objetivo, debemos interpretar la noción de homotopía en términos de complejos de cadenas.

Para efectos de este apunte, una función de cadenas  $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  es una familia de morfismos  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  que satisfacen la identidad  $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n$ , a menudo resumida mediante la fórmula  $f\partial = \partial f$ . Una función de cadenas lleva ciclos en ciclos y bordes en bordes, es decir satisface las relaciones

$$f(Z_n(\mathfrak{C})) \subseteq Z_n(\mathfrak{D}), \quad f(B_n(\mathfrak{C})) \subseteq B_n(\mathfrak{D}),$$

por lo que define una función  $f_* : H_n(\mathfrak{C}) \rightarrow H_n(\mathfrak{D})$  a nivel de grupos de homología.

**ejemplo 21.1.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  define una función de cadenas  $f_\Delta : \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(Y)$  mediante  $f_\Delta(\sigma) = f \circ \sigma$ , por lo que

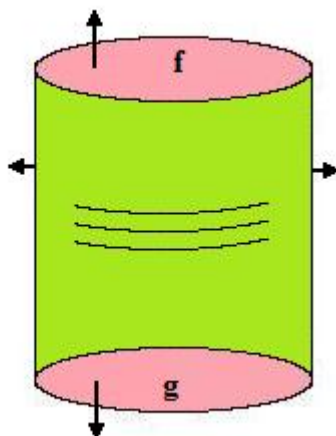


Figure 21.1: El borde de un tarro.

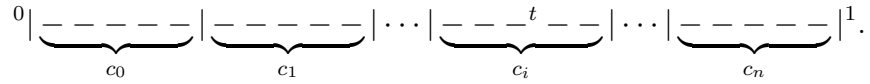
también define un morfismo  $f_* : H_n^{\text{sing.}}(X) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(Y)$  a nivel de homología.

Recordemos que una homotopía entre dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  es una función continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  que coincide con  $f$ , o con  $g$ , cuando el parámetro  $t \in I$  es igual a 0, o a 1, respectivamente. Esto hace que, para estudiar homotopías, entre funciones de cadenas, sea natural verlas en términos de una triangulación del “tarro” mostrado en la Figura 21.1. Los bordes superiores e inferiores se interpretan como copias del espacio  $X$ . Sin embargo, el borde del tarro tiene un tercer componente, la parte verde del dibujo. Por así decirlo, el “manto del tarro”. En símbolos, tenemos

$$\partial(X \times I) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\partial X \times I).$$

La idea es convertir esta relación conjuntista en una relación a nivel de grupos de cadenas que podamos utilizar como un análogo algebraico a la idea de homotopía. El primer obstáculo que encontramos reside en el hecho de que un producto de simplices no es, en general, un simplex por lo que necesitamos una triangulación.

Si  $T_u = [e_0, e_1, \dots, e_n]$  es el simplex unitario, describimos el producto

Figure 21.2: Una subdivisión del intervalo  $[0, 1]$ .

$T_u \times I$ , como un prisma cuyos vértices son los elementos del conjunto

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (e_0, 1), (e_1, 1), \dots, (e_n, 1)\}.$$

Este puede verse como la unión de los siguientes símplexes geométricos:

$$\Lambda_i = \left[ (e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_n, 1) \right], \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

De hecho, el elemento  $(x, t)$ , donde  $x \in T_u$  y  $t \in [0, 1]$  pertenece a uno de estos símplexes si podemos escribir

$$(x, t) = a_0(e_0, 0) + a_1(e_1, 0) + \dots + a_i(e_i, 0) + b_i(e_i, 1) + \dots + b_n(e_n, 1).$$

La unicidad de las coordenadas baricéntricas de  $x$  nos permite determinar que la coordenada  $c_j$  correspondiente al vértice  $e_j$  es la siguiente:

- $c_j = a_j$ , si  $j < i$ .
- $c_j = b_j$ , si  $j > i$ .
- $c_i = a_i + b_i$ , si  $j = i$ .

Por otro lado, se tiene  $t = b_i + b_{i+1} + \dots + b_n$ . En otras palabras, tenemos las siguientes desigualdades:

$$c_{i+1} + \dots + c_n \leq t \leq c_i + c_{i+1} + \dots + c_n,$$

por lo que  $(x, t)$  pertenece a exactamente uno de tales símplexes, a no ser que  $t$  coincida exactamente con una suma de la forma  $c_k + \dots + c_n$ , en cuyo caso puede escogerse  $k = i$  o  $k = i + 1$ . En este caso,  $(x, t)$  pertenece a una cara que separa dos símplexes. Esto puede ilustrarse dividiendo el intervalo  $[0, 1]$  en subintervalos de largo  $c_j$ , como se aprecia en la Figura 21.2, lo que es posible, pues  $c_0 + \dots + c_n = 1$ . El punto  $(x, t)$  se encuentra en el interior de un símplex si  $t$  está al interior de uno de estos intervalos, y en una cara cuando  $t$  está en un borde.

Consideremos ahora el símlice combinatorial

$$\rho_i = \left| \left[ (e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_n, 1) \right] \right|, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

correspondiente al símlice geométrico  $\Lambda_i$ . Definamos también las siguientes familias de símplices combinatoriales:

$$\mu_{i,j} = \left| \left[ (e_0, 0), (e_1, 0), \dots, \widehat{(e_j, 0)}, \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_n, 1) \right] \right|, \quad j \leq i,$$

$$\nu_{i,j} = \left| \left[ (e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, \widehat{(e_j, 1)}, \dots, (e_n, 1) \right] \right|, \quad i \leq j.$$

Es inmediato que  $\mu_{i,i} = \nu_{i-1,i-1}$ , de donde se tiene la relación

$$\begin{aligned} \partial \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \rho_i \right) &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \mu_{i,j} + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j+1} \nu_{i,j} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \mu_{i,j} + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} \nu_{i,j} + \nu_{n,n} - \mu_{0,0}, \end{aligned}$$

al cancelar todos los términos diagonales.

Introduzcamos la notación  $p = \sum_{i=0}^n (-1)^i \rho_i$ . A cada  $n$  símlice singular  $\sigma$  le asociamos la cadena  $K\sigma = \tilde{H}_\Delta(p)$ , donde  $\tilde{H} : T_u \times I \rightarrow Y$  es la composición  $H \circ (\sigma, \text{id})$ . Con estas notaciones, la fórmula de arriba nos da

$$\begin{aligned} \partial(K\sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \tilde{H}_\Delta(\mu_{i,j}) + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} \tilde{H}_\Delta(\nu_{i,j}) + \tilde{H}_\Delta(\nu_{n,n}) \\ &\quad - \tilde{H}_\Delta(\mu_{0,0}). \end{aligned}$$

Las dos primeras sumas contienen, exactamente, los mismos términos que la cadena  $-K(\partial\sigma)$ , en la que se aplica a cada cara de  $\sigma$  el mismo procedimiento utilizado al definir  $K\sigma$ . (sugerimos al lector escribir esta expresión con cuidado para cerciorarse de ello). Por otro lado  $\tilde{H} \circ \nu_{n,n} = g_\Delta(\sigma)$  y  $\tilde{H} \circ \mu_{0,0} = f_\Delta(\sigma)$ . Concluimos que se tiene la fórmula:  $\partial K = -K\partial + g_\Delta - f_\Delta$ . Esto es, de hecho, todo lo que necesitamos para concluir que las funciones inducidas, a nivel de homología, coinciden.

En general, por una homotopía de cadenas  $K : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  entre dos funciones de cadenas  $f, g : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ , nos referiremos a una familia de funciones  $K_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$  que cumplen la identidad  $\partial K + K\partial = g - f$ . Cuando tal homotopía existe diremos que las funciones de cadenas son homotópicas.

**Proposición 21.2.** *Funciones de cadenas homotópicas definen la misma función a nivel de homología.*

*Proof.* Sea  $c \in C_n$  un ciclo. Entonces  $g(c) - f(c) = (\partial K + K\partial)(c) = \partial(Kc)$ . Como esta última cadena es un borde se tiene  $g_*([c]) - f_*([c]) = 0$  y el resultado sigue.  $\square$

**Corolario 21.2.1.** *Espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos.*

Un lema técnico que nos hará la vida más sencilla en el resto del apunte es el siguiente:

**Lema 21.3.** *Si  $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  es una función de cadenas, y si  $K_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$  denota cualquier familia de funciones, entonces  $g = K\partial + \partial K + f$  es una función de cadenas.*

*Proof.* Esto se deduce del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} \partial g &= \partial(K\partial + \partial K + f) = \partial K\partial + \partial f \\ &= \partial K\partial + f\partial = (\partial K + K\partial + f)\partial = g\partial. \end{aligned}$$

$\square$

Es fácil definir una función de cadenas  $i : \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(|\Sigma|)$  para cada  $\Delta$ -complejo  $\Sigma$ . Basta con interpretar cada símplice combinatorial, que ya es una función, como un símplice singular, es decir, olvidamos que proviene de la estructura del complejo. Es inmediato que  $i$  es una función de cadenas y que, por lo tanto, define una función  $i_* : H_n^\Delta(\Sigma) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|)$  a nivel de homología. En lo que sigue probaremos que esta función es un isomorfismo.

**Subdivisión Baricéntrica.** Sea  $\sigma : T_u \rightarrow X$  un  $n$ -símplice singular arbitrario. Consideremos la división de este utilizando su baricentro  $b_0$ , como la que se muestra en el Ejemplo 20.7 (Ver figura 20.3). Definamos el  $(n+1)$ -símplice singular

$$L_{n,1}\sigma = -\sigma \circ [[b_0, e_0, e_1, \dots, e_n]],$$

y escribamos  $\delta_n\sigma = \partial(L_{n,1}\sigma) + \sigma$ . Nótese que esta última cadena está dada por la fórmula

$$\delta_n\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ [[b_0, e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]].$$

Agregamos ahora un nuevo vértice  $b_{1,i}$  por cada cara  $\tau_i = |[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]|$ , el que asumimos que es el baricentro de la imagen  $\tau_i(T'_u)$  del  $(n-1)$ -símplice estándar  $T'_u$ . A continuación, definimos

$$L_{n,2}\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ |[b_0, b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]|,$$

$$\delta_{n-1}\sigma = \partial L_{n,2}\sigma + L_{n-1,1}(\partial\sigma) + \delta_n\sigma.$$

Nótese que el primer sumando tiene términos obtenidos al borrar  $b_0$ , los que tienen la forma  $\sigma \circ |[b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]|$ . El operador  $L_{n-1,1}$  que aparece en el segundo sumando se define como  $L_{n,1}$ , pero la expresión explícita de las caras de  $\sigma$ , junto al hecho de que el vértice  $b_{1,i}$  es el baricentro de la cara correspondiente, nos permite mostrar que el segundo término es una suma de los mismos términos ya mencionados, pero con el signo cambiado, por lo que se cancelan. Del mismo modo tenemos, en el primer sumando, términos de la forma  $\sigma \circ |[b_0, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]|$  que se cancelan con el tercer sumando. Nos quedan así sólo términos de una de las dos formas siguientes:

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n]|,$$

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]|.$$

Cada uno de ellos con un signo que no es necesario precisar aquí.

Asumamos ahora que tenemos definida la cadena

$$\delta_{n-k}\sigma = \sum_{\rho} \epsilon_{\rho} \sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, a_0, \dots, a_{n-k-1}]|,$$

donde  $\rho$  recorre cierto conjunto de índices,  $\epsilon_{\rho} \in \{\pm 1\}$  es un signo, cada  $a_j = a_j(\rho)$  es un vértice original de  $T_u$ , y cada  $b_{i,\rho}$  es el baricentro de una  $(n-i)$ -cara  $S_i = S_i(\rho)$  del vértice estándar, de modo que se tiene

$$T_u = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_k \supseteq S_{k+1} = \text{im}\left(|[a_0, \dots, a_{n-k-1}]\right).$$

Definimos a continuación

$$L_{n,k+2}\sigma = (-1)^k \sum_{\rho} \epsilon_{\rho} \sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, b_{k+1,\rho}, a_0, \dots, a_{n-k-1}]|,$$

donde  $b_{k+1,\rho}$  es el baricentro de  $S_{k+1}$ . Además ponemos

$$\delta_{n-k-1}\sigma = \partial L_{n,k+2}\sigma + L_{n-1,k+1}(\partial\sigma) + \delta_{n-k}\sigma.$$

Como antes, los términos de la forma

$$\sigma \circ |[b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, b_{k+1,\rho}, a_0, \dots, a_{n-k-1}]|$$

se cancelan con los del segundo sumando, y los de la forma

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, a_0, \dots, a_{n-k-1}]|$$

se cancelan con el tercer sumando. Para recuperar la hipótesis de inducción necesitamos también probar que los símlices de la forma

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, \widehat{b_{i,\rho}}, \dots, b_{k,\rho}, b_{k+1,\rho}, a_0, \dots, a_n]|,$$

se cancelan. Para ello, observamos que cada vez que se agrega un baricentro y se remueve un vértice original, la lista de baricentros guarda la información sobre el orden en que los vértices originales fueron removidos. Si vemos en la lista  $\dots, b_{i-1,\rho}, b_{i,\rho}, b_{i+1,\rho}, \dots$ , esto nos permite concluir que el vértice que pertenece a  $S_{i-1}$  pero no a  $S_i$  fué removido antes que el vértice que pertenece a  $S_i$  pero no a  $S_{i+1}$ . Eliminar el término  $b_{i,\rho}$  borra la información sobre el orden en que estos dos vértices fueron removidos. Concluimos que este término aparece dos veces en la expresión  $\partial L_{n,k+2}\sigma$ . El hecho de que ambos tengan signos diferentes se prueba por un argumento similar al utilizado para probar la relación  $\partial^2 = 0$  en el capítulo precedente.

Nótese que por definición  $\delta = \delta_1 = \partial K + K\partial + \text{Id}$ , donde  $K_n = \sum_{i=0}^n L_{n,i}$ . Concluimos que la función  $\delta : \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$  es una función de cadenas por el Lema 21.3, y recibe el nombre de subdivisión baricéntrica. El siguiente resultado es ahora inmediato:

**Proposición 21.4.** *La subdivisión baricéntrica induce la función identidad a nivel de grupos de homología.*  $\square$

Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $\wp$  un cubrimiento abierto de  $X$ , es decir una colección de abiertos que satisface  $X = \bigcup_{U \in \wp} U$ . Un símlice singular  $\sigma$  se dice subordinado a  $\wp$  si su imagen está contenida en uno de los abiertos de  $\wp$ . El grupo de cadenas generado por los  $n$ -símlices subordinados a  $\wp$  se denota  $C_n^{\text{sing.}}(X, \wp) \subseteq C_n^{\text{sing.}}(X)$ . Esta familia define un subcomplejo  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, \wp)$  de  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$ , el que recibe el nombre de complejo de cadenas singulares subordinadas a  $\wp$ . En otras palabras,  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, \wp)$  es un complejo con el mismo operador borde que  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$ , de modo que la inclusión canónica  $i : \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, \wp) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$  es una función de cadenas.

**Proposición 21.5.** *La función  $i$  definida arriba induce un isomorfismo a nivel de homología.*



**Demostración:** Observemos que para todo ciclo  $c$  se tiene

$$[c] = \delta_*^n [c] = \left[ \delta^n(c) \right].$$

Afirmamos que la cadena  $\delta^n(c)$  esta subordinada a  $\wp$  para algún  $n$  suficientemente grande, de donde podremos concluir que  $i_*$  es epiyectiva. Por otro lado, si  $c$  es una cadena subordinada a  $\wp$  que satisface  $c = \partial d$  para alguna cadena  $d$  de  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$ , entonces tenemos  $\delta^n(c) = \partial(\delta^n(d))$  para todo  $n$ , y de nuevo  $\delta^n(d)$  está subordinada a  $\wp$  para  $n$  suficientemente grande, por lo que podemos escribir

$$[c] = \left[ \delta^n(c) \right] = \left[ \partial(\delta^n(d)) \right] = [0]$$

como elementos del grupo  $H_n^{\text{sing.}}(X, \wp)$ .

Falta probar que  $\delta^n(c)$  esta subordinada a  $\wp$  para toda cadena  $c$ , y para algún  $n = n(c)$  suficientemente grande. Es suficiente mostrar esto en el caso  $c = \sigma$ , donde  $\sigma$  es un símlice singular. La subdivisión baricéntrica reemplaza  $\sigma$  por una suma de símlices de la forma  $\sigma \circ \tau$ , donde  $\tau$  es un símlice cuya imagen está contenida en el símlice standard. Es más fácil estudiar este proceso en términos de símlices geométricos.

Dado un complejo simplicial  $\Sigma$ , podemos definir otro complejo  $\Sigma^{(1)}$ , llamado su subdivisión baricéntrica, en el que cada símlice  $T$  se reemplaza por la unión de todos los símlices de la forma  $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ , donde, como antes, cada  $b_i$  es el baricentro de un  $(n-i)$ -símlice  $S_i$  que satisfacen  $T = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n$ . Este proceso puede iterarse para definir la  $k$ -ésima subdivisión baricéntrica  $\Sigma^{(k)}$  mediante la recursión  $\Sigma^{(i+1)} = (\Sigma^{(i)})^{(1)}$ . Es fácil ver que, si consideramos el símlice standard  $T_u$  como un complejo simplicial, entonces  $\delta^n(c)$  es una combinación lineal de símlices de la forma  $\sigma \circ \tau$ , donde  $\tau$  es un símlice combinatorial del complejo  $T_u^{(n)}$ . Basta ver que, para  $n$  suficientemente grande, cada símlice (geométrico) de  $T_u^{(n)}$  está contenido en algún conjunto de la forma  $\sigma^{-1}(U)$  con  $U \in \wp$ . El resultado sigue ahora de los dos lemas siguientes:

**Lema 21.6.** *Los diámetros de los símlices de  $T_u^{(n)}$  convergen a 0, si  $n$  tiende a  $\infty$ .*

**Demostración:** Sea  $T$  un símlice geométrico de  $T_u^{(1)}$ . Sean  $v$  y  $w$  dos vértices de  $T$ . Nótese que  $v$  y  $w$  son los baricentros de dos caras  $A \subseteq B$  de

$T_u$ . Reenumerando los vértices de  $T_u$ , de ser necesario, podemos suponer que  $A = [e_0, \dots, e_m]$  y  $B = [e_0, \dots, e_n]$ , con  $m < n$ , de donde

$$\begin{aligned} |w - v| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n e_i - \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m e_i \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e_i - \left( \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{i=0}^m e_i \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e_i - \left( \frac{n-m}{(m+1)(n+1)} \right) \sum_{j=0}^m e_j \right| \\ &= \left| \left( \frac{1}{(m+1)(n+1)} \right) \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=0}^m (e_i - e_j) \right|. \end{aligned}$$

Si  $D$  es el diámetro de  $T_u$ , se tiene

$$|w - v| \leq \left( \frac{(n-m)(m+1)}{(m+1)(n+1)} \right) D \leq \left( \frac{n}{n+1} \right) D.$$

Esta es una cota para el diámetro de cualquier símplice de  $T_u^{(1)}$ . Basta ahora iterar la desigualdad precedente.  $\square$

**Lema 21.7.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto, y si  $\varphi$  es un cubrimiento abierto de  $X$ , existe una constante  $\delta > 0$  tal que todo subconjunto de  $X$  de diámetro menor a  $\delta$  está contenido en alguno de los abiertos de  $\varphi$ .*

**Demostración:** Como  $X$  es compacto, podemos suponer que  $\varphi$  es finito. Digamos  $\varphi = \{U_1, \dots, U_N\}$ . Sea  $d$  la métrica de  $X$  y sea

$$f(x) = \max_{i=1}^N d(x, U_i^c).$$

Esta es una función continua en  $X$ , la que no se anula dado que  $\varphi$  es un cubrimiento. Como  $X$  es compacto,  $f$  debe alcanzar su mínimo  $m > 0$ . Basta escoger  $\delta < m$ .  $\square$

En la Figura 21.2. Se ilustran algunas subdivisiones batricentricas de símplices. Como el lector podrá apreciar, el número de símplices de la subdivisión aumenta rápidamente con la dimensión. Dada cualquier colección

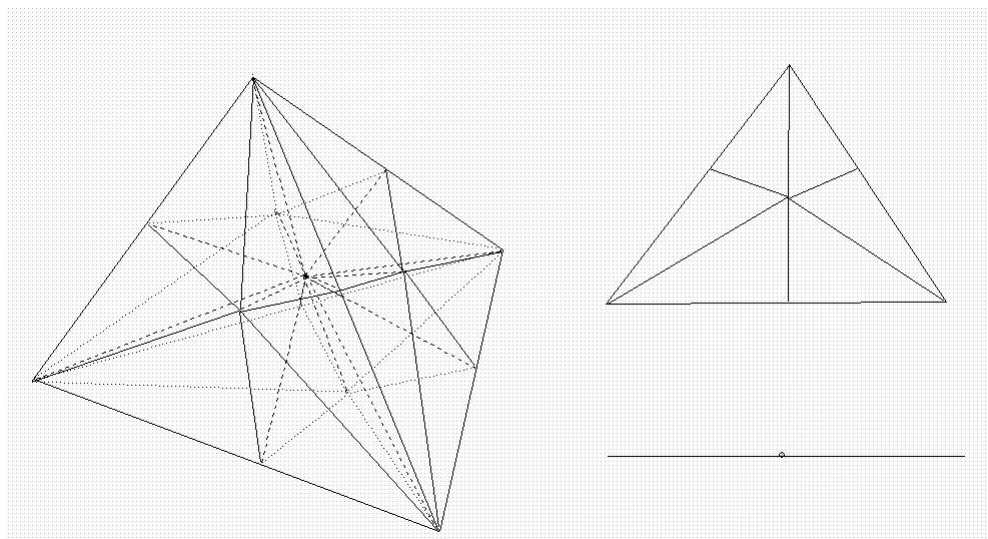


Figure 21.3: Subdivisión batricéntrica de símlices de dimensiones pequeñas..

de símlices singulares, podemos construir un modelo de papel de su subdivisión baricéntrica, tomando la subdivisión baricéntrica de su modelo de papel. Esto permite visualizar el remplazo de un símlice  $c$  por su subdivisión iterada  $\delta^n(c)$  como se usó en demostración precedente. Otra propiedad importante de la subdivisión baricéntrica es que nos permite reducir muchas demostraciones en  $\Delta$ -complejos al caso de complejos simpliciales, ya que la segunda subdivisión baricéntrica  $\Sigma^{(2)} = (\Sigma^{(1)})^{(1)}$  de un  $\Delta$ -complejo es siempre un complejo simplicial. Dejamos al lector la tarea de convencerse de este hecho.

**Aproximación Simplicial.** Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  complejos simpliciales. Recuerdese que función simplicial  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , es una función continua de  $|\Sigma|$  en  $|\Sigma'|$  que respeta la estructura del complejo, es decir lleva símlices en símlices. Se dice que la función simplicial  $s$  es una aproximación simplicial débil de una función continua  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ , si para cada punto  $x \in |\Sigma|$  existe un símlice  $T$  de  $\Sigma'$  que contiene a ambos  $s(x)$  y  $f(x)$ . En tal caso existe una homotopía entre ambas funciones. Basta ver que

$$H(x, t) = (1 - t)s(x) + tf(x)$$

es una homotopía bien definida. Por ser  $\Sigma'$  un complejo simplicial, podemos suponerlo contenido en algún espacio  $\mathbb{R}^n$ . Basta ver que la recta que une cada par  $(s(x), f(x))$  está contenida en el polihedro  $|\Sigma'|$ , lo que es inmediato de la convexidad de los símlices. Esto prueba el siguiente resultado:

**Lema 21.8.** *Bajo las hipótesis precedentes, si  $s$  es una aproximación simplicial débil de  $f$ , entonces ambas funciones inducen la misma función a nivel de homología singular.*

Es este último resultado lo que nos impide extender la demostración de este capítulo al caso de  $\Delta$ -complejos. Si identificamos los extremos de una arista para formar un círculo, no es difícil ver que en el  $\Delta$ -complejo resultante la identidad puede aproximarse por una función constante, según la definición de arriba, pero estas funciones no son homotópicas. Por esta razón, en esta sección limitamos nuestro interés a complejos simpliciales.

Es posible definir la función inducida, a nivel de  $\Delta$ -homología, por una función continua entre complejos simpliciales. Para esto definimos una noción no tan débil de aproximación. Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  complejos simpliciales. Diremos que una función simplicial  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  es una aproximación simplicial de una función continua  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ , si para cada punto  $x \in |\Sigma|$  la imagen  $s(x)$  está contenida en el menor símlice que contiene a  $f(x)$ .

**Lema 21.9.** *Bajo las hipótesis precedentes, si  $s$  y  $s'$  son dos aproximaciones simplicial de la misma función continua  $f$ , entonces ambas funciones inducen la misma función a nivel de  $\Delta$ -homología.*

*Proof.* La hipótesis implica que, para cada punto  $x \in |\Sigma|$ , las imágenes  $s(x)$  y  $s'(x)$  están contenidas en un mismo símlice. La homotopía entre ambas funciones puede definirse por

$$H(x, t) = (1 - t)s(x) + ts'(x).$$

Afirmamos que que esta función es afín en cada símlice de la triangulación que utilizamos para transformar homotopías de funciones en homotopías de cadenas. En otras palabras, consideramos a  $\Sigma \times I$  como un complejo simplicial con polihedro  $|\sigma| \times I$ , en el que cada vértice tiene la forma  $(v, 0)$  o  $(v, 1)$  donde  $v$  es un vértice de  $\Sigma$ . Esto se consigue subdividiendo cada conjunto de la forma  $T \times I$ , donde  $T$  es un  $n$ -símlice, en  $(n + 1)$ -símlices como se vió al comienzo de este capítulo. La función  $H$  arriba definida es afín en cada

conjunto de la forma  $T \times I$ , de donde se sigue la afirmación. Ahora definimos una homotopía de cadenas del tipo

$$K\sigma = \bar{H}_\Delta \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \rho_i \right), \quad \bar{H} = H \circ (\sigma, \text{Id})$$

donde los  $\rho_i$  se definen como al inicio del capítulo. Aquí asumimos que  $\sigma$  es un símplice combinatorial y observamos que  $(\sigma, \text{Id}) : T_u \times I \rightarrow |\Sigma| \times I$  es simplicial. El resultado sigue.  $\square$

Para cada vértice  $v$  de  $\Sigma$  podemos definir su vecindad estrellada  $\text{Est}(v) \subseteq |\Sigma|$  como la unión de los interiores de los símplices que tienen a  $v$  como vértices. Una consecuencia inmediata de la definición es el siguiente resultado:

**Lema 21.10.** *Sea  $\Sigma$  un complejo simplicial, y sea  $V = \{v_0, \dots, v_n\}$  un conjunto de vértices en  $\Sigma$ . Existe un símplice  $T$  en  $\Sigma$  cuyo conjunto de vértices es  $V$  si y sólo si*

$$\bigcap_{i=0}^n \text{Est}(v_i) \neq \emptyset.$$

$\square$

Sea  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$  una función continua. Supongamos que, para cada vértice  $v$  de  $\Sigma$ , podemos encontrar un vértice  $v'$  en  $\Sigma'$  que satisfaga la relación  $f(\text{Est}(v)) \subseteq \text{Est}(v')$ . Entonces, definimos una correspondencia entre vértices mediante  $\hat{s}(v) = v'$ . Para ver que  $s$  se extiende a una función simplicial, necesitamos probar que lleva los vértices de cualquier símplice de  $\Sigma$  a los vértices de algún símplice de  $\Sigma'$ . Sean estos  $v_0, \dots, v_n$ . Sea  $x$  un elemento del interior del símplice en cuestión. Entonces  $x \in \text{Est}(v_i)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Concluimos que

$$f(x) \in \text{Est}(\hat{s}(v_i)) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad (21.1)$$

por lo que la intersección de dichas estrellas es no vacía, y por tanto los vértices  $\{\hat{s}(v_0), \hat{s}(v_1), \dots, \hat{s}(v_n)\}$  definen un símplice  $S$ . Si llamamos  $s$  a la función simplicial definida por la correspondencia  $\hat{s}$ , tenemos por definición que  $s(x)$  pertenece al símplice  $S$  arriba definido, mientras que (21.1) nos dice que  $f(x)$  está en un símplice que tiene a  $S$  como cara.

El siguiente resultado es ahora inmediato de los lemas 21.6 y 21.7. Los detalles se dejan al lector:

**Proposición 21.11. (Teorema de aproximación Simplicial).** *Sea  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$  una función continua entre poliedros. Entonces existe  $n > 0$  para el cual  $f$  tiene una aproximación simplicial  $s : \Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma'$ .*

Podemos ahora mostrar la equivalencia entre  $\Delta$ -homología y homología singular. Sea  $\Sigma$  un complejo y se  $X = |\Sigma|$  su polihedro. Observemos que existe una inclusión  $i : C_n^\Delta(\Sigma) \hookrightarrow C_n^{\text{sing.}}(X)$  que se obtiene asociando a cada símplice combinatorial el símplice singular correspondiente. Nótese que esto tiene sentido, dado que un símplice combinatorial es una función simplicial y una función simplicial es una función continua. Por otro lado, las definiciones de las funciones borde en ambas teorías de homología son idénticas, por lo que  $i$  es, realmente, un morfismo de cadenas.

**Proposición 21.12.** *Sea  $\Sigma$  un complejo simplicial. La función  $i_* : H_n^\Delta(\Sigma) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|)$  es un isomorfismo.*

*Proof.* Sea  $c \in Z_n^{\text{sing.}}(X)$  un ciclo singular en  $X = |\Sigma|$ , y sea  $\phi : |\tilde{\Sigma}| \rightarrow X$  un modelo de papel para el conjunto de símplices que aparecen en  $c$ , junto con sus caras y permutaciones. Esto significa que podemos escribir la cadena  $c$  como la imagen  $c = \phi_\Delta(c')$ , donde  $c' \in Z_n^\Delta(\tilde{\Sigma}) \subseteq Z_n^{\text{sing.}}(|\tilde{\Sigma}|)$  es un símplice combinatorial de  $\tilde{\Sigma}$  y  $\phi_\Delta$  es la función de cadenas inducida por  $\phi$ . Reemplazando  $\tilde{\Sigma}$  este por una subdivisión baricéntrica iterada, de ser necesario, podemos suponer que  $\tilde{\Sigma}$  es un complejo simplicial y que  $\phi : |\tilde{\Sigma}| \rightarrow |\Sigma|$  tiene una aproximación simplicial  $s : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ . Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_n^\Delta(\tilde{\Sigma}) & \xrightarrow{s_*} & H_n^\Delta(\Sigma) \\
 \hat{i} \swarrow & & \searrow i_* \\
 H_n^{\text{sing.}}(|\tilde{\Sigma}|) & \xrightarrow{\phi_*} & H_n^{\text{sing.}}(X)
 \end{array}$$

donde  $\hat{i}$  es inducida por la inclusión  $i' : C_n^\Delta(\tilde{\Sigma}) \rightarrow C_n^{\text{sing.}}(|\tilde{\Sigma}|)$ . Concluimos que

$$[c] = \phi'_* \circ \hat{i}[c'] = i_* \circ s_*[c'],$$

de donde  $i_*$  es epiyectiva. Por el mismo razonamiento, si  $c$  es un ciclo combinatorial que satisface  $i_*[c] = 0$ , podemos escribir  $c = \partial d$  para alguna cadena singular  $d \in C_n^{\text{sing.}}(X)$ . Tomando un modelo de papel apropiado  $\phi : \tilde{\Sigma} \rightarrow X$ ,

podemos escribir  $\phi_\Delta \circ i'(d') = d$  para cierta cadena  $d' \in C_{n+1}^\Delta(\tilde{\Sigma})$ . Escribamos ahora el diagrama conmutativo a nivel de grupos de cadenas:

$$\begin{array}{ccc}
 C_n^\Delta(\tilde{\Sigma}) & \xrightarrow{s_\Delta} & C_n^\Delta(\Sigma), \\
 \swarrow i' & & \searrow i \\
 C_n^{\text{sing.}}(|\tilde{\Sigma}|) & \xrightarrow{\phi_\Delta} & C_n^{\text{sing.}}(X)
 \end{array}$$

donde la definición de  $d'$  nos da

$$i(c) = \partial(d) = \partial \circ \phi_\Delta \circ i'(d') = \phi_\Delta \circ i'(\partial d') = i \circ s_\Delta(\partial d').$$

Como  $i$  es inyectiva, tenemos  $c = s_\Delta(\partial d') = \partial(s_\Delta(d'))$ . Lo que prueba que  $c$  se anula en  $H_n^\Delta(\Sigma)$ . □

**Proposición 21.13.** *Para cada entero  $n \geq 1$ , existe una aproximación simplicial  $\chi : \Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma$  de la identidad  $\text{id} : |\Sigma| = |\Sigma^{(n)}| \rightarrow |\Sigma|$ .*

*Proof.* Basta con comprobar que, para cada vértice  $v$  de la subdivisión baricéntrica existe un vértice  $v'$  en  $\Sigma$  que satisface la relación  $\text{Est}(v) \subseteq \text{Est}(v')$ . Esto es inmediato. □

**Proposición 21.14.** *Si  $\chi : \Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma$  es una aproximación simplicial de la identidad  $\text{id} : |\Sigma| = |\Sigma^{(n)}| \rightarrow |\Sigma|$ , entonces  $\chi_* : H_n^\Delta(\Sigma^{(n)}) \rightarrow H_n^\Delta(\Sigma)$  es el isomorfismo inverso de  $\delta_*^n : H_n^\Delta(\Sigma) \rightarrow H_n^\Delta(\Sigma^{(n)})$ .*

*Proof.* Como cualquier par de aproximaciones simpliciales de la misma función induce el mismo morfismo en homología, puede escogerse la aproximación en forma arbitraria. Basta considerar el caso  $n = 1$ , pues la caracterización que se usa en la demostración precedente muestra que cualquier composición de aproximaciones simpliciales de la identidad, asociadas a subdivisiones sucesivas, es también una aproximación simplicial de la identidad. Escribimos  $X = \Sigma = \Sigma^{(1)}$ . Recuérdesse que la subdivisión baricéntrica induce la identidad a nivel de símplices singulares. Lo mismo ocurre con una aproximación de la identidad por el Lema 21.8. Esto nos entrega un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_n^\Delta(\Sigma^{(1)}) & \xrightleftharpoons{\chi_*} & H_n^\Delta(\Sigma), \\
 \swarrow i_* & \delta_* & \searrow i_* \\
 & H_n^{\text{sing.}}(X) &
 \end{array}$$

de donde sigue el resultado. □

De hecho, es posible probar que estas funciones son inversas a nivel de homotopía, es decir que las composiciones  $\chi \circ \delta$  y  $\delta \circ \chi$  son homotópicas a las identidades respectivas. Utilizando este hecho, es posible demostrar muchas de las propiedades functoriales de la  $\Delta$ -homología, o de la homología simplicial, sin pasar por la homología singular. Para un estudio más detallado utilizando este enfoque, referimos al lector al libro de Armstrong.

**Ejercicios:** (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Probar que si el poliedro  $|K|$  de un complejo es un espacio conexo, existe un recorrido de aristas que conecta a dos vértices cualesquiera de  $K$  (sugerencia: Aproxime simplicialmente una curva).
2. Pruebe que un espacio contractible tiene grupos de homología singular trivial.
3. Pruebe que un complejo simplicial cuyo polihedro es un espacio contractible tiene grupos de  $\Delta$ -homología trivial.
4. Dado un espacio topológico  $X$  se define el cono  $CX$  como el espacio que se obtiene al identificar entre ellos los puntos cuya segunda coordenada es 1 en  $X \times [0, 1]$ . Si  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  es un complejo, se define el cono  $C\Sigma$  como el complejo que se obtiene al considerar  $\Sigma$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  y agregarlo todos los simplices generados por un símplice de  $\Sigma$  (incluyendo el vacío) y un vértice fijo en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$ . Probar que  $C|\Sigma|$  y  $|C\Sigma|$  son espacios homeomorfos. Utilizar este resultado para probar que los grupos de  $\Delta$ -homología de  $C\Sigma$  son triviales.
5. Probar que si  $X$  e  $Y$  son espacios triangulables, probar que  $X \times Y$  es triangulable (Sugerencia: Probarlo primero para dos simplices, generalizando la construcción al comienzo de este capítulo).
6. Sea  $\Lambda$  un subcomplejo de  $\Sigma$  y sea  $N$  la colección de todos los simplices  $\sigma$  de  $\Sigma^{(2)}$  para los cuales existe un símplice  $\tau$  en  $\Lambda^{(2)}$  tal que los vértices de  $\sigma$  junto con los del símplice  $\tau$  determinan un símplice de  $\Sigma^{(2)}$ . Probar que  $N$  es un subcomplejo de  $\Sigma^{(2)}$  y que  $|\Lambda|$  está contenido en el interior de  $|N|$ .



7. Sea  $\Sigma$  un complejo y sea  $\Lambda$  un subcomplejo. Probar que el espacio de identificación de  $|\Sigma|$  que se obtiene al contraer  $|\Lambda|$  a un punto es triangulable.
8. Dadas triangulaciones  $\Sigma_k$  y  $\Sigma_n$  de las esferas  $S^k$  y  $S^n$  con  $k < n$ , probar que toda aplicación simplicial de  $\Sigma_k$  en  $\Sigma_n$  es homotópica a una constante. Utilice el Teorema de aproximación simplicial para probar que toda función continua de  $S^k$  en  $S^n$  es homotópica a una constante.
9. Utilice una triangulación de la  $n$ -esfera y el teorema de aproximación simplicial para probar que  $H_k^{\text{sing.}}(S^n) = \{0\}$  para todo  $k < n$ .
10. Probar que una aplicación simplicial de  $\Sigma$  en  $\Sigma'$  induce una aplicación simplicial de  $\Sigma^{(n)}$  en  $(\Sigma')^{(n)}$  para todo  $n$ .
11. Sea  $\sigma = |[a_0, a_1, \dots, a_n]|$  un  $n$ -símplice combinatorial cuya imagen es el símplice geométrico  $T = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Sea  $\rho$  una permutación  $\rho$  del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$  y escribamos  $\rho(\sigma) = |[a_{\rho(0)}, a_{\rho(1)}, \dots, a_{\rho(n)}]|$ . Probar que  $\sigma - (\text{sign}(\rho))\rho(\sigma)$  es la suma de un borde y una cadena cuyo soporte está contenido en el borde de  $T$ .
12. Sea  $\Sigma$  el  $(n - 1)$ -esqueleto del  $n$ -símplice  $[v_0, \dots, v_n]$ . Probar que toda  $(n - 1)$ -cadena cerrada en  $C_n^\Delta(\Sigma)$  es cohomóloga a un múltiplo de la cadena

$$b = \sum_{i=0}^n (-1)^i |[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]|.$$

Sugerencia: Usar el ejercicio previo.

13. Sea  $\Sigma'$  el  $n$ -símplice estándar  $T_u$  considerado como un complejo. Sea  $\sigma = |[e_0, e_1, \dots, e_n]|$ . sea  $c$  una  $(n + 1)$ -cadena en  $C_n^\Delta(\Sigma')$ . Sea  $a_\rho$  el coeficiente de  $\rho(\sigma)$  en  $\partial(c)$ . Pruebe que  $\sum_\rho (\text{sign}(\rho))\rho(\sigma) = 0$ , donde la suma se extiende por todas las permutaciones  $\rho$  del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$ .
14. Utilice los dos ejercicios anteriores para probar que  $H_n^{\text{sing.}}(S^n) = \mathbb{Z}$ .
15. Describa un generador de  $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n - \{p\})$ .
16. Sea  $X$  el complemento de  $m$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $H_k^{\text{sing.}}(X) = \{0\}$  para  $k < n$ .

17. Calcule el grupo de homología  $H_n^{\text{sing.}}(X)$  si  $X$  es el complemento de 2 puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Sugerencia: Para el caso  $n = 2$  escriba  $X$  como la unión de dos abiertos homotópicamente equivalentes a la esfera.

## Chapter 22

# Sucesiones exactas de grupos de homología.

En este capítulo escribiremos, a menudo, letras en Frankfurter para denotar complejos de cadenas cuyos grupos de  $n$ -cadenas se denotan usando la misma letra en formato normal. Por ejemplo, el complejo  $\mathfrak{X}$  tiene grupos de  $n$ -cadenas denotadas por  $X_n$ .

Cuando decimos “una sucesión exacta corta de complejos de cadenas”, y escribimos un diagrama del tipo siguiente:

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \rightarrow \{0\},$$

nos referimos a una sucesión de sucesiones exactas cortas de grupos abelianos

$$\{0\} \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow \{0\}$$

que hace conmutativos, para cada entero no negativo  $n$ , los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n & . \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\ A_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C_{n+1} & \end{array}$$

Estas sucesiones juegan un papel central en la teoría homológica dado que nos permiten obtener relaciones importantes entre diversos grupos de homología, gracias, en parte, al siguiente resultado:

**Proposición 22.1.** *Una sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \rightarrow \{0\}$$

*induce una sucesión exacta larga del tipo*

$$\dots \rightarrow H_n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathfrak{B}) \xrightarrow{g_*} H_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(\mathfrak{B}) \rightarrow \dots,$$

*a nivel de grupos de homología, para ciertos morfismos  $\partial$  definidos con ese propósito.*

*Proof.* La función  $\partial_*$  se define como sigue: Para cada  $n$ -ciclo  $c$  en  $\mathfrak{C}$ , escogemos una pre-imagen  $b$ , la cual es una  $n$ -cadena en  $\mathfrak{B}$ , pero no necesariamente un ciclo. El borde de esta cadena satisface  $g(\partial b) = \partial c = 0$ , dado que  $c$  es un ciclo. Concluimos que existe una  $n-1$  cadena  $a$  en  $\mathfrak{A}$  tal que  $f(a) = \partial b$ . Como  $f(\partial a) = \partial^2 b = 0$ , y como  $f$  es inyectiva, se tiene que  $a$  es un ciclo. Definimos  $\partial_*[c] = [a]$ .

Debemos probar primero que esta clase es independiente de la elección de la pre-imagen  $b$  de  $c$ . Si  $b'$  es otra pre-imagen, es decir, si  $g(b') = c = g(b)$ , concluimos que  $b' = b + f(a')$  para alguna cadena  $a'$ . Se sigue que  $\partial b' = \partial b + f(\partial a')$ . Como  $f$  es inyectiva, esto implica que  $a'' = a + \partial a'$  es la única solución de  $f(a'') = \partial b'$ . Concluimos que  $[a''] = [a]$ , por lo que nuestra función está bien definida.

Falta probar que la sucesión larga es exacta en cada lugar. Es fácil ver que  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$ . Supongamos ahora que  $g_*[b] = 0$ . Esto significa que  $g(b) = \partial c'$  para alguna cadena  $c'$ . Sea  $b'$  una pre-imagen, vía  $g$ , de  $c'$ . Entonces  $g(b - \partial b') = 0$ , por lo que existe una cadena  $a$  en  $\mathfrak{A}$  que satisface  $f(a) = b - \partial b'$ . Como  $f$  es inyectiva y  $b - \partial b'$  es un ciclo, también lo es  $a$ , y se tiene  $f_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$ . Esto prueba que la sucesión es exacta en  $H_n(\mathfrak{B})$ .

Probaremos ahora la exactitud en  $H_n(\mathfrak{C})$ . Si  $[c] = g_*[b]$ , podemos asumir que  $c = g(b)$ , donde  $b$  es un ciclo, y podemos realizar el cálculo que define  $\partial_*$  usando  $\partial b = 0$ , de donde  $a = 0$ , y por lo tanto  $\partial_*[c] = 0$ . Por otro lado, si  $\partial_*[c] = [a] = 0$ , el ciclo  $a$  debe ser un borde  $\partial a'$ , de donde  $f(\partial a') = f(a) = \partial b$ . Nótese que  $b - f(a')$  es también una pre-imagen de  $c$ , y de hecho  $\partial(b - f(a')) = \partial b - \partial b = 0$ , por lo que es un ciclo. Concluimos que  $[c] = g_*[b - f(a')]$ .

Finalmente, nos ocupamos de la exactitud en  $H_n(\mathfrak{A})$ . Si  $[a] = \partial_*[c]$ , manteniendo las notaciones anteriores, se tiene  $f(a) = \partial b$  por lo que  $f_*[a] = 0$ . Por otro lado, si  $f_*[a] = 0$ , existe una cadena  $b$  que satisface  $\partial b = f(a)$ , por lo que  $\partial g(b) = g(\partial b) = 0$ , y podemos obtener  $\partial_*[c] = [a]$  definiendo  $c = g(b)$ , el cual es un ciclo. El resultado sigue.  $\square$

**$\Delta$ -Homología relativa y homología simplicial relativa.** Sea  $\Sigma$  un  $\Delta$ -complejo, y sea  $\Upsilon$  un subcomplejo, como en la definición 16.3. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i} \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma) \xrightarrow{p} \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \rightarrow \{0\},$$

donde los grupos de cadenas del complejo  $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$  son los cocientes

$$C_n^\Delta(\Sigma)/C_n^\Delta(\Upsilon).$$

No es difícil ver que tales cocientes de complejos de cadenas son también complejos de cadenas o, en el lenguaje de la teoría de categorías, la categoría de complejos de cadenas admite cocientes. Concluimos que existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_n^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i_*} H_n^\Delta(\Sigma) \xrightarrow{p_*} H_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^\Delta(\Sigma) \rightarrow \dots,$$

donde  $H_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$  es el  $n$ -ésimo grupo de homología del complejo  $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$ . Este recibe el nombre de grupo de  $\Delta$ -homología relativa. Los grupos de homología simplicial relativa se definen análogamente y tienen la misma propiedad.

**ejemplo 22.2.** Sea  $\Sigma$  el  $n$ -símplice unitario, visto como un complejo simplicial, y sea  $\Upsilon$  su borde. Sabemos por los resultados del capítulo anterior que  $\Sigma$  tiene la homología de un punto, es decir

$$H_n^\Delta(\Sigma) = \{0\}, \text{ si } n \geq 1, \quad H_0^\Delta(\Sigma) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, el complejo  $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$  tiene símplices en dimensión  $n$  o mayor, por lo que  $H_m^\Delta(\Sigma, \Upsilon) = \{0\}$  para  $m < n$ . Se sigue que  $H_m^\Delta(\Upsilon) \cong H_m^\Delta(\Sigma) \cong \{0\}$  para  $0 < m < n - 1$ . Afirmamos que  $H_m^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \cong \mathbb{Z}$  y que  $\sigma = [[e_0, \dots, e_n]]$  es un generador. Este símplice es claramente un ciclo, pues cada símplice de su borde es 0 en el cociente, y es no nulo como elemento de  $C_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$ . De hecho, este último es el grupo libre generado por todos los

símplices combinatoriales que son permutaciones de  $\sigma$ . Por un razonamiento similar,  $C_{n+1}^\Delta(\Sigma, \gamma)$  es el grupo libre generado por los símplices de la forma  $\sigma = |[a_0, \dots, a_{n+1}]|$  que tienen a lo más un vértice repetido. El borde de cualquiera de tales símplices es una expresión del tipo

$$\rho(\sigma) - \left( \text{sgn}(\rho^{-1}\lambda) \right) \lambda(\sigma),$$

donde  $\rho$  y  $\lambda$  son permutaciones de la base canónica. Por ejemplo

$$\partial|[e_1, e_0, e_2, e_1]| = |[e_1, e_0, e_2]| - |[e_0, e_2, e_1]|,$$

dado que todos los sumandos restantes son símplices combinatoriales con imagen contenida en el borde, y por lo tanto con imagen nula en el grupo  $C_n^\Delta(\Sigma, \gamma)$ . El resultado sigue. La sucesión exacta larga de homología nos queda

$$\dots \rightarrow H_n^\Delta(\gamma) \xrightarrow{i_*} \{0\} \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^\Delta(\gamma) \xrightarrow{i_*} \{0\} \rightarrow \dots$$

Lo que nos dice, no sólo que  $H_{n-1}^\Delta(\gamma) \cong \mathbb{Z}$ , sino también que un generador puede obtenerse calculando el borde de  $\sigma$ . Por los resultados del capítulo anterior, y utilizando la observación de que  $|\gamma| \cong S^{n-1}$  es la  $(n-1)$ -esfera, obtenemos también la fórmula  $H_n^{\text{sing.}}(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .

**Homología singular relativa.** Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $Y$  un subespacio. Nuevamente, existe una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(Y) \xrightarrow{i} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X) \xrightarrow{p} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, Y) \rightarrow \{0\},$$

donde el complejo  $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, Y)$  se define como el complejo cociente. Concluimos que existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(Y) \xrightarrow{i_*} H_n^{\text{sing.}}(X) \xrightarrow{p_*} H_n^{\text{sing.}}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing.}}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^{\text{sing.}}(X) \rightarrow \dots$$

Nuevamente,  $H_n^{\text{sing.}}(X, Y)$  recibe el nombre de grupo de homología relativa.

**ejemplo 22.3.** Sea  $X = B^n$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $Y = S^{n-1}$ . Los cálculos precedentes nos dejan la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sign.}}(Y) \xrightarrow{i_*} \{0\} \xrightarrow{p_*} H_n^{\text{sign.}}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \{0\} \rightarrow \dots$$

Lo que nos dice que  $H_n^{\text{sing.}}(X, Y) \cong \mathbb{Z}$ , es generado por cualquier ciclo cuyo borde sea un generador de  $H_{n-1}^{\text{sing.}}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Como  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  es homotópicamente equivalente a la  $(n-1)$ -esfera, el mismo razonamiento prueba que  $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ , y que cualquier símplice  $\sigma : T_u \rightarrow \mathbb{R}^n$  afín que contenga a 0 en su interior es un generador.

Para cualquier espacio  $X$  y cualquier punto  $p \in X$ , el grupo  $H_n^{\text{loc.}}(X; p) := H_n^{\text{sing.}}(X, X - \{p\})$  recibe el nombre de grupo de homología local de  $X$  en  $p$  en dimensión  $n$ . Así, pues, el párrafo precedente calcula el grupo de homología local de  $\mathbb{R}^n$  en cero en dimensión  $n$ . El lector comprobará fácilmente que los grupos de homología local de  $\mathbb{R}^n$  en todos sus puntos coinciden.

Una de las propiedades centrales de los grupos de homología relativa es la siguiente:

**Proposición 22.4. (Lema de la escisión).** *Si  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos en  $X$ , con  $X = A \cup B$ , entonces la inclusión induce un isomorfismo  $j_* : H_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B) \cong H_n^{\text{sing.}}(X, B)$ .*

*Proof.* Denotemos por  $\wp$  el cubrimiento abierto  $X = A \cup B$ . Sea  $c$  un ciclo singular en  $C_n^{\text{sing.}}(X, B)$ . Remplazándolo por una subdivisión baricéntrica, de ser necesario, podemos suponer que está subordinada a  $\wp$ . Como las imágenes de los símlices contenidos en  $B$  se anulan en el grupo  $C_n^{\text{sing.}}(X, B)$  de cadenas relativas, podemos suponer que no hay ninguno, por lo que el ciclo está en  $C_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B)$ . Concluimos que  $[c] \in j_* \left( H_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B) \right)$ . Por otro lado, si  $j_*[c] = 0$ , esto significa que existe una cadena singular  $d$  en  $X$  y una cadena  $e$  en  $B$  tal que  $c = \partial d + e$ . Aplicando la subdivisión baricéntrica se tiene

$$\delta^n(c) = \partial \left( \delta^n(d) \right) + \delta^n(e).$$

Escribiendo  $\delta^n(d) = d_1 + d_2$ , donde cada símplice de  $d_1$  está contenido en  $A$  y cada símplice de  $d_2$  está contenido en  $B$ , se puede escribir

$$\delta^n(c) - \partial d_1 = \left( \partial d_2 + \delta^n(e) \right),$$

donde cada símplice de la cadena de la izquierda está contenido en  $A$  y cada símplice de la derecha está contenido en  $B$ . Concluimos que  $d_3 = \delta^n(c) - \partial d_1$  es una cadena en  $A \cap B$  y se tiene  $\delta^n(c) = \partial d_1 + d_3$ . En otras palabras,  $[c]$  se anula como elemento de  $H_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B)$ .  $\square$

**ejemplo 22.5.** Sea  $M$  una variedad topológica, es decir un espacio localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n$ . Entonces, para todo punto  $p \in M$ , se tiene

$$H_n^{\text{sing.}}(M, M - \{p\}) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Además, para  $0 < m < n$  se tiene

$$H_m^{\text{sing.}}(M, M - \{p\}) \cong H_m^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \{0\}.$$

Esto implica que  $n$ , la dimensión de  $M$  en el punto  $p$ , está bien definido y es localmente constante. Si  $M$  es conexa, su dimensión está bien definida.

El siguiente resultado es bastante útil al comparar sucesiones exactas largas:

**Proposición 22.6. (El 5-Lema).** *En un diagrama conmutativo de grupos abelianos*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

con filas exactas, si los morfismos  $a, b, d$  y  $e$  son isomorfismos, también lo es  $c$ .

*Proof.* Definamos un complejo simplicial  $\mathfrak{A}$ , en el cual  $A_1 = A, A_0 = A'$ , y todos los otros grupos de cadenas son 0. Asumimos que  $\partial_1 = a$  en este complejo. Entonces  $a$  es inyectiva si y sólo si  $H_1(\mathfrak{A}) = \{0\}$ , mientras que  $a$  es epiyectiva si y sólo si  $H_0(\mathfrak{A}) = \{0\}$ . Se definen, análogamente los complejos  $\mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{E}$ . Definiendo  $\mathfrak{F} = \ker(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$  y  $\mathfrak{G} = \text{coker}(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \cong \ker(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$ , tenemos una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \{0\}.$$

Del mismo modo, podemos escribir sucesiones exactas

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{H} \rightarrow \{0\},$$

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{I} \rightarrow \{0\},$$

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \{0\}$$

y

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{K} \rightarrow \{0\},$$



donde  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{J}$  y  $\mathfrak{K}$ , se definen como conúcleos de cada una de las sucesivas funciones de cadenas, las que coinciden con el núcleo de la función siguiente, mientras que  $\mathfrak{K} = \text{coker}(\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{E})$ . Como  $\mathfrak{E}$  es acíclico, es decir que  $H_n(\mathfrak{E}) = \{0\}$ , por ser  $e$  un isomorfismo, se tiene  $H_1(\mathfrak{J}) \cong H_2(\mathfrak{K}) = \{0\}$ , dado que cada uno de los complejos tiene grupo de 2-cadenas trivial. Como  $\mathfrak{D}$  es acíclico, se tiene  $H_1(\mathfrak{J}) \cong H_2(\mathfrak{J}) = \{0\}$  y  $H_0(\mathfrak{J}) \cong H_1(\mathfrak{J}) = \{0\}$ . Por el otro lado, como  $\mathfrak{A}$  es acíclico, se tiene  $H_0(\mathfrak{G}) = \{0\}$ , y como  $\mathfrak{B}$  es acíclico, se tiene  $H_1(\mathfrak{H}) \cong H_0(\mathfrak{G}) = \{0\}$  y  $H_0(\mathfrak{H}) = \{0\}$ . Ahora se usa la sucesión que contiene a  $\mathfrak{C}$  para probar que  $H_0(\mathfrak{C})$  y  $H_1(\mathfrak{C})$  se anulan. El resultado sigue.  $\square$

**ejemplo 22.7.** Sea  $\Sigma$  un complejo simplicial, y sea  $\Upsilon$  el complejo que se obtiene al remover un  $n$ -símplice  $T$ , el que no es cara de ningún otro símplice. Sea  $B$  el abierto que se obtiene al remover el baricentro de  $T$  y sea  $A$  el interior de  $T$ . El lema de la escisión nos dice que el cálculo se reduce sólo al símplice  $T$ , es decir

$$H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, B) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Como el polihedro  $|\Upsilon|$  es un retracto de deformación de  $B$ , en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, |\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Sigma|) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n^{\text{sing.}}(B) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, B) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(B) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Sigma|) \end{array}$$

todas las funciones verticales, salvo quizás  $\gamma$  son isomorfismos. Una aplicación directa del 5-Lema muestra que  $\gamma$  es un isomorfismo. Del mismo modo, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^\Delta(\Upsilon) & \longrightarrow & H_n^\Delta(\Sigma) & \longrightarrow & H_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(\Upsilon) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, |\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Sigma|) \end{array}$$

muestra que  $\eta$  es un isomorfismo. Concluimos que  $H_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \cong \mathbb{Z}$ .

**La sucesión de Mayer-Vietoris.** Consideremos ahora un espacio  $X$ , el que podemos escribir como unión de dos subconjuntos abiertos  $X = A \cup B$ . Estos constituyen un cubrimiento  $\varphi$  como antes, por lo que tenemos una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(A \cap B) \xrightarrow{f} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(A) \oplus \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(B) \xrightarrow{g} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X; \varphi) \rightarrow \{0\},$$

donde, como antes,  $\mathfrak{C}^{\text{sing}\cdot}(X; \wp)$  denota el complejo de cadenas subordinadas a  $\wp$ . Las funciones de cadenas se definen por  $f(c) = (c, -c)$  y  $g(a, b) = a + b$ . Aplicando nuestro resultado general a esta sucesión, obtenemos una sucesión exacta larga de grupos de homología

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing}\cdot}(A \cap B) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{sing}\cdot}(A) \oplus H_n^{\text{sing}\cdot}(B) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{sing}\cdot}(X; \wp) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}\cdot}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Utilizando el hecho de que la homología singular subordinada a  $\wp$  coincide con la usual, podemos eliminar la aparición del símbolo  $\wp$  en esta última sucesión para obtener

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing}\cdot}(A \cap B) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{sing}\cdot}(A) \oplus H_n^{\text{sing}\cdot}(B) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{sing}\cdot}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}\cdot}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Esta sucesión exacta larga se conoce como la sucesión de Mayer-Vietoris.

**ejemplo 22.8.** Sea  $X = S^n$  la  $n$ -esfera. Sean  $A$  y  $B$  vecindades abiertas de los hemisferios norte y sur. Nótese que  $A$  y  $B$  son contractibles, mientras que  $A \cap B$  es homeomorfo a la  $(n-1)$ -esfera. En este caso, si  $n \geq 2$ , se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$H_n^{\text{sing}\cdot}(A) \oplus H_n^{\text{sing}\cdot}(B) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{sing}\cdot}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}\cdot}(A \cap B) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{sing}\cdot}(A) \oplus H_n^{\text{sing}\cdot}(B).$$

Como  $A$  y  $B$  son contractibles, su homología es trivial, de donde se tiene

$$H_k^{\text{sing}\cdot}(A) \oplus H_k^{\text{sing}\cdot}(B) \cong \{0\} \oplus \{0\} \cong \{0\},$$

para  $k \in \{n, n-1\}$ . Al remplazar en la sucesión precedente, se obtiene el isomorfismo  $H_n^{\text{sing}\cdot}(S^n) \cong H_{n-1}^{\text{sing}\cdot}(S^{n-1})$ .

**ejemplo 22.9.** Este ejemplo generaliza el que precede. Para todo espacio topológico  $X$ , el cono  $C(X)$  sobre  $X$  se define identificando en un punto todos los elementos de la forma  $(x, 1) \in X \times I$ , donde  $I = [0, 1]$  es el intervalo cerrado. La suspensión  $\Sigma(X)$  de  $X$  se define identificando en un punto los elementos de la base del cono, es decir los elementos de la forma  $(x, 0) \in C(X)$ . Ciertamente todo cono es contractible, mientras que  $\Sigma(X)$  puede verse como la unión de dos conos cuya intersección es homotópicamente equivalente a  $X$ , dado que se retrae al ecuador. Concluimos, por un razonamiento análogo al del ejemplo precedente que  $H_n^{\text{sing}\cdot}(\Sigma(X)) \cong H_{n-1}^{\text{sing}\cdot}(X)$ , para  $n \geq 2$ .

**La sucesión de Mayer-Vietoris simplicial.** Consideremos ahora un  $\Delta$ -complejo  $\Sigma$ , el que podemos escribir como unión de dos sub-complejos

$\Sigma = \Upsilon \cup \Omega$ . Esto quiere decir que cada s3mplice de  $\Sigma$  pertenece a al menos uno de lo subcomplejos. Esto nos da automaticamente una sucesi3n exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Upsilon \cap \Omega) \xrightarrow{f} \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Upsilon) \oplus \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Omega) \xrightarrow{g} \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Sigma) \rightarrow \{0\},$$

donde, de nuevo, se definen las funciones de cadenas mediante  $f(c) = (c, -c)$  y  $g(a, b) = a + b$ , si  $c$  es una cadena simplicial en  $\Upsilon \cap \Omega$ ,  $a$  es una cadena simplicial en  $\Upsilon$  y  $b$  es una cadena simplicial en  $\Omega$ . El c3lculo es id3ntico al caso singular, salvo que la epiyectividad de  $g$  es inmediata en este caso por la observaci3n sobre el significado de ser una uni3n de complejos, por lo que no se requiere una construcci3n que juegue el papel de la homolog3a subordinada al cubrimiento. Aplicando la teor3a general, nuevamente obtenemos una sucesi3n exacta larga de grupos de homolog3a

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{simp.}}(\Upsilon \cap \Omega) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{simp.}}(\Upsilon) \oplus H_n^{\text{simp.}}(\Omega) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{simp.}}(\Sigma) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{simp.}}(\Upsilon \cap \Omega) \rightarrow \dots$$

Puede obtenerse un resultado an3logo para la  $\Delta$ -homolog3a con un argumento id3ntico.

**Ejercicios:** (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Calcule los grupos de homolog3a del espacio que se obtiene al unir la esfera de radio 1 centrada en  $(0, 0, 0)$  con su proyecci3n en el plano  $XY$ .
2. Calcule la homolog3a del espacio que se obtiene al identificar los polos norte de  $n$  esferas en un punto, y los polos sur de las mismas esferas en otro punto.
3. Calcule los grupos de homolog3a del toro, escribiendo este como la uni3n de dos espacios homot3picamente equivalentes al c3rculo.
4. Calcule los grupos de homolog3a del complemento de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ .
5. Calcule los grupos de homolog3a del complemento de una  $m$ -esfera en  $\mathbb{R}^n$ , con  $m < n$ .
6. Calcule los grupos de homolog3a del espacio que se obtiene al remover un c3rculo de un toro s3lido, como el de la Figura 23.1.A.
7. Calcule los grupos de homolog3a del complemento de un nudo en  $\mathbb{R}^3$ . Depende este c3lculo del nudo?

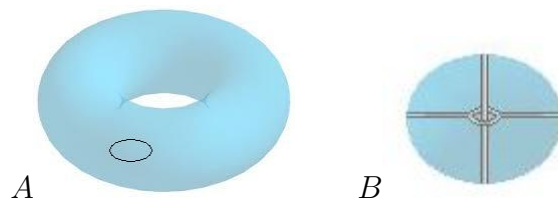


Figure 22.1: Un toro sólido, menos un círculo (A) y una esfera con dos túneles (B).

8. Calcule los grupos de homología del espacio que se obtiene al cavar, de una esfera sólida, los túneles indicados en la Figura 23.1.B.
9. Probar que para todo espacio topológico  $X$  se tiene

$$H_0^{\text{sing.}}(X) \cong H_1^{\text{sing.}}(\Sigma(X)) \oplus \mathbb{Z}.$$

10. Sea  $\Sigma$  un  $\Delta$ -complejo. Considere un complejo de cadenas  $\mathfrak{C}^\Gamma(\Sigma) \subseteq \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma)$  que contiene, precisamente, aquellas cadenas con coeficiente nulo para cada símplice degenerado.
  - (a) Pruebe que este es un complejo de cadenas, y defina los grupos de  $\Gamma$ -homología  $H_n^\Gamma(\Sigma)$ .
  - (b) Demuestre que la sucesión de Mayer-Vietoris es exacta en este caso.
  - (c) Defina los grupos de  $\Gamma$ -homología relativa  $H_n^\Gamma(\Sigma, \gamma)$ , y calcule el grupo de  $\Gamma$ -homología relativa  $H_n^\Gamma(\Sigma^n, \Sigma^{n-1})$ , donde  $\Sigma^n$  denota el  $(n-1)$ -esqueleto de un  $\Delta$ -complejo.
  - (d) Es la  $\Gamma$ -homología un invariante de homotopía? Justifique.
11. Sea  $X$  un espacio topológico, y sean  $Z \subseteq Y$  dos subespacios. Encuentre una sucesión exacta larga que involucre los grupos  $H_n^{\text{sing.}}(X, Y)$ ,  $H_n^{\text{sing.}}(X, Z)$  y  $H_n^{\text{sing.}}(Y, Z)$ .
12. Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $A$  un subconjunto cerrado que es un retracts de deformación fuerte de algún abierto  $U$  que contiene a  $A$ . Probar que  $H_n^{\text{sing.}}(X, A) \cong H_n^{\text{sing.}}(X/A)$ , donde  $X/A$  es el espacio

que se obtiene al identificar entre sí todos los puntos de  $A$ . Sugerencia: Probar que  $H_n^{\text{sing.}}(X, A) \cong H_n^{\text{sing.}}(X, U)$ , aplicar el Lema de la escisión, y finalmente realizar una operación similar en  $X/A$ .

13. Probar que si  $Z \subset Y \subseteq X$  son espacios topológicos, se tiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(Y, Z) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(X, Z) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(X, Y) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(Y, Z) \rightarrow \cdots$$

14. Enuncie y demuestre un resultado similar al anterior para la cohomología simplicial y la  $\Delta$  homología.

## Chapter 23

# Teoría del grado y homología celular.

Recordemos que la  $n$ -homología de la  $n$ -esfera  $S^n$  está dada por

$$H_n^{\text{sing.}}(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

En particular, esto nos dice que, para toda función continua  $f : S^n \rightarrow S^n$ , existe un entero  $d = d(f)$  para el cual se tiene  $f_*[c] = d[c]$ , para todo ciclo singular  $c$  en la esfera. Este entero  $d(f)$  recibe el nombre de grado de la función  $f$ . Este grado juega un papel fundamental en la topología de la esfera. A la elección de uno de los dos generadores del grupo  $H_n^{\text{sing.}}(S^n) \cong \mathbb{Z}$  como *generador preferente*, le llamaremos una orientación de la esfera. Estas nociones se generalizan a otros grupos de homología que sean isomorfos a  $\mathbb{Z}$ , cómo el grupo relativo  $H_n^{\text{sing.}}(B_n, \partial B_n)$ , o el grupo de homología local  $H_n^{\text{loc.}}(\mathbb{R}^n; p) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\})$ . En este capítulo veremos algunas aplicaciones de estas definiciones.

### Homología celular:

En esta sección daremos una generalización de la homología simplicial que simplifica bastante los cálculos y coincide con la homología singular. En particular, probaremos aquí que la homología simplicial coincide con la singular. Antes de entrar en materia necesitamos cierta preparación.

La homología reducida  $\tilde{H}_n^{\text{sing.}}(X)$  de un espacio arco-conexo  $X$  es la cohomología relativa  $\tilde{H}_n^{\text{sing.}}(X, \{p\})$  para un punto  $p \in X$ . Esta es independiente

de  $p$  por ser  $X$  arco-conexo. La homología reducida tiene propiedades similares a las de la homología usual, pero tiene la ventaja de ser trivial si  $X$  es contractible.

**Lema 23.1.** *Sea  $B_n \subseteq \mathbb{R}^n$  la bola de centro  $\vec{0}$  y radio 1, y sea  $\partial B_n$  su borde. Entonces, existe un isomorfismo canónico entre  $H_n^{\text{sing.}}(B_n, \partial B_n)$  y el grupo de homología local de  $B_n$  en su centro. Del mismo modo, existe un isomorfismo canónico entre  $H_n^{\text{sing.}}(S^n)$  y el grupo de homología local de  $S^n$  en cualquiera de sus puntos.*

*Proof.* La primera afirmación sigue razonando como en el ejemplo 22.7. Basta por lo tanto probar la segunda afirmación. Esta sigue de la sucesión exacta

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(S^n - \{p\}) \rightarrow \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(S^n) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(S^n, S^n - \{p\}) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(S^n - \{p\}),$$

la que es un caso particular del ejercicio 13 del capítulo anterior. Dado que  $S^n - \{p\}$  es contractible, ambos extremos de la sucesión son grupos triviales, por lo que el morfismo central es un isomorfismo. El uso de la homología reducida nos permite incluir el caso  $n = 1$ .  $\square$

Recordemos ahora la definición de CW-complejo dada en el capítulo 14. Un CW-complejo, o mejor dicho su espacio topológico subyacente  $X$  se obtiene como la unión (límite directo) de una sucesión de espacios  $\{X^{(n)}\}_n$ , donde cada  $X^{(n)}$  se obtiene del anterior  $X^{(n-1)}$  adjuntando una familia de  $n$ -bolas euclideas  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I_n}$ , las  $n$  celdas, mediante funciones de pegado  $g_\alpha : \partial B_\alpha \rightarrow X^{(n-1)}$ . El espacio  $X^{(0)}$  es discreto. Afirmamos que existe un isomorfismo canónico

$$H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z}\alpha. \quad (23.1)$$

De hecho,  $X^{(n-1)}$  es un retracto del espacio  $Y = X^{(n)} - \{p_\alpha | \alpha \in I_n\}$ , el cual se obtiene removiendo el centro  $p_\alpha$  de cada celda  $B_\alpha$ . Razonando como en el ejemplo 22.7, podemos concluir que  $H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, Y)$ . Utilizando el Lema de la Escisión, puede remplazarse  $X^{(n)}$  por un conjunto de la forma  $\bigcup_{\alpha \in I_n} V_\alpha$ , donde  $V_\alpha$  es una vecindad del punto  $p_\alpha$ . El resultado sigue fácilmente de esta observación y del cálculo de la homología local en  $\mathbb{R}^n$ .

Definamos ahora un complejo de cadenas  $\mathfrak{C}^{\text{cel.}}$  como sigue: El grupo de  $n$ -cadenas se define por

$$C_n^{\text{cel.}} = \bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z}\alpha,$$

mientras el operador borde  $\delta : C_n^{\text{cel.}} \rightarrow C_{n-1}^{\text{cel.}}$  se define por

$$\delta(\alpha) = \sum_{\beta \in I_{n-1}} g_{\alpha,\beta} \beta,$$

donde  $g_{\alpha,\beta}$  es el grado de la composición canónica

$$S^{(n-1)} \cong \partial B_\alpha \rightarrow X^{(n-1)} \xrightarrow{\nu} S^{(n-1)},$$

cuya última función  $\nu$  se obtiene identificando en un punto el borde de la celda  $B_\beta$  así como el complemento de dicha celda. Parecería haber cierta ambigüedad en la elección del signo del coeficiente así definido, pero esto se resuelve pensando en cada una de las celdas en la construcción del CW complejo como *celdas orientadas*, es decir, escogiendo a priori un generador  $\alpha$  de cada grupo de homología  $H_n^{\text{sing.}}(B_\alpha, \partial B_\alpha)$  con  $\alpha \in I_n$ . El isomorfismo  $H_n^{\text{sing.}}(B_\alpha, \partial B_\alpha) \cong H_{n-1}^{\text{sing.}}(\partial B_\alpha)$  es también canónico, por lo que una orientación de cada celda entrega automáticamente una orientación del borde.

**Proposición 23.2.**  $H_n(\mathfrak{C}^{\text{cel.}}) \cong H_n^{\text{sing.}}(X)$ .

*Proof.* Por convención, omitiremos el superíndice "sing." al escribir grupos de cohomología de espacios. Consideremos la siguiente sucesión exacta larga de grupos de homología singular:

$$\begin{array}{c} \{0\} \cong H_n(X^{(n-1)}) \longrightarrow H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \\ \hspace{15em} \downarrow \partial_* \\ \longrightarrow H_{n-1}(X^{(n-1)}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{(n)}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \{0\}, \end{array}$$

donde el último isomorfismo se obtiene razonando como en la demostración de (23.1), mientras que, para verificar el primero, probamos por inducción en  $k$  que  $H_n(X^{(k)}) \cong \{0\}$  si  $k < n$ , lo que requiere observar que  $H_n(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong \{0\}$ , la que también se demuestra como (23.1). En términos de las funciones de la sucesión exacta larga de arriba, el operador borde  $\delta_n : C_n^{\text{cel.}} \rightarrow C_{n-1}^{\text{cel.}}$  puede interpretarse como la composición

$$H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}).$$



Para distinguir los morfismos que corresponden a cada grado escribiremos esta última composición como  $\delta_n = j_{*,n-1} \circ \partial_{*,n}$ , mientras que en la sucesión exacta larga precedente aparecen  $j_{*,n}$  y  $\partial_{*,n}$ . Ahora consideramos la siguiente cadena de isomorfismos:

$$\begin{aligned} H_n(\mathfrak{C}^{\text{cel.}}) &= \frac{\ker \delta_n}{\text{Im} \delta_{n+1}} \cong \frac{\ker(j_{*,n-1} \circ \partial_{*,n})}{\text{Im}(j_{*,n} \circ \partial_{*,n+1})} \cong \frac{\ker(\partial_{*,n})}{j_{*,n}(\text{Im}(\partial_{*,n+1}))} \\ &= \frac{j_{*,n}(H_n(X^{(n)}))}{j_{*,n}(\partial_{*,n+1}(H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)})))} \cong \frac{H_n(X^{(n)})}{\partial_{*,n+1}(H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}))} \\ &\cong H_n(X^{(n+1)}) \cong H_n(X). \end{aligned}$$

En la primera fila se utilizan sólo las definiciones y el hecho de que  $j_{*,n-1}$  es inyectivo. La inyectividad es una consecuencia de la sucesión exacta larga. En la identidad de la segunda fila se utiliza nuevamente la exactitud de esa sucesión, al remplazar el núcleo de  $\partial_*$  por la imagen de  $j_*$ . El isomorfismo de esa fila es, de nuevo, una consecuencia de la inyectividad de  $j_*$ . El primer isomorfismo de la tercera fila sigue, una vez más, de la sucesión exacta, mientras que el último se prueba por inducción a partir de la sucesión siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \cong H_{n+1}(X^{(n+k+1)}, X^{(n+k)}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X^{(n+k)}) \\ & \cong & \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X^{(n+k+1)}) & \longrightarrow & H_n(X^{(n+k+1)}, X^{(n+k)}) \cong \{0\}, \end{array}$$

válido para  $k \geq 1$ , y del hecho de que cada identidad entre cadenas es válida en algún modelo de papel finito, lo que sólo puede involucrar un número finito de celdas, por lo que tener el isomorfismo  $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X^{n+k})$  para todo  $k$  positivo nos permite concluir el isomorfismo  $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$ .

Cuando  $n = 0$ , es importante notar que  $C_0^{\text{cel.}}$  se identifica directamente con  $H_0(X^{(0)})$ , por lo que la función  $j_{*,-1}$  no aparece en el cálculo anterior, pero el resto de la demostración permanece sin cambios.  $\square$

Nos queda por probar el siguiente resultado:

**Proposición 23.3.** *Si  $X$  es el polihedro de un complejo simplicial generalizado  $\Sigma$ , el que puede interpretarse como un CW-complejo de forma natural, entonces, con las definiciones precedentes, se tiene  $H_n(\mathfrak{C}^{\text{cel.}}) \cong H_n^{\text{simp.}}(\Sigma)$ .*

*Proof.* Los grupos de  $n$ -cadenas son idénticos en ambos complejos, por lo que basta ver que los operadores borde coinciden. Identificamos el borde  $\partial T$  del símplece  $T = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  con la  $n$ -esfera  $S^n$  mediante la función

$$f(x) = \frac{x - \bar{a}}{|x - \bar{a}|},$$

donde  $\bar{a}$  denote el baricentro. En particular, el generador estándar de la  $(n-1)$ -homología singular del borde está dado por la suma

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [[a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]].$$

Por otro lado, si identificamos en un punto el complemento, en  $\partial T$ , del interior de un símplece  $T_i = [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]$ , podemos utilizar la imagen del símplece combinatorial  $[[a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]]$  como representante del generador estándar de la  $(n-1)$ -homología singular de la esfera  $S^{(n-1)}$ . Esto debido a la hipótesis de que la identificación de  $T_i/\partial T_i$  con  $S^{(n-1)}$  preserva la orientación. Eso nos dice que el coeficiente del generador  $\alpha_{T_i}$ , correspondiente al símplece  $T_i$ , en la expresión para el borde de  $T$  es  $(-1)^i$ , que es el mismo coeficiente que utilizamos al definir la cohomología simplicial. El resultado sigue.  $\square$

**Corolario 23.3.1.** *La homología simplicial de un complejo simplicial coincide con su homología singular y, por lo tanto, también con su  $\Delta$ -homología.*  $\square$

### Aplicaciones geométricas del grado.

El siguiente resultado se demuestra de manera análoga al Ejemplo 13.4, con una homotopía del tipo

$$H(x, t) = \frac{f(x) + t[-x - f(x)]}{\|f(x) + t[-x - f(x)]\|}.$$

**Proposición 23.4.** *Una función continua  $f : S^n \rightarrow S^n$  sin puntos fijos es homotópica a la función antipodal  $a(x) = -x$ .*  $\square$

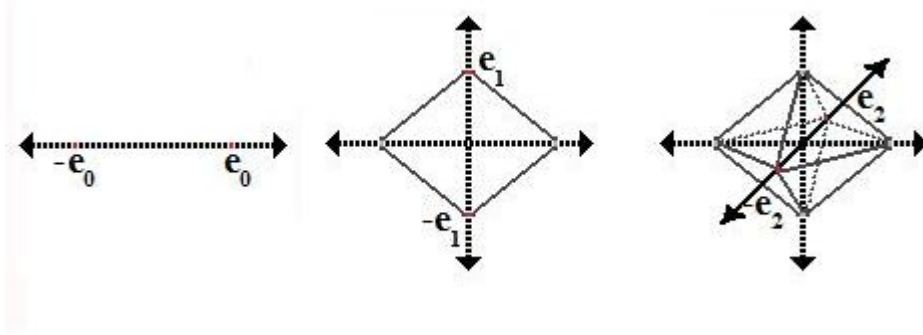


Figure 23.1: La triangulación del texto para las esferas de dimensión 0,1 y 2.

**Corolario 23.4.1.** *Una función continua  $f : S^n \rightarrow S^n$  sin puntos fijos tiene el mismo grado que la función antipodal.*  $\square$

Esto plantea el problema de calcular el grado de la función antipodal. Para ello consideramos un complejo simplicial  $\Sigma_n$  con un vértice en el punto cartesiano correspondiente a cada vector  $e_i$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , o su inverso  $-e_i$ , y con todos los símlices de la forma  $[\varepsilon_1 e_{i_1}, \dots, \varepsilon_k e_{i_k}]$ , donde  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$  son diferentes y cada  $\varepsilon_i$  es 1 o  $-1$  (ver Figura 23.1). Este complejo tiene un polihedro homeomorfo a la  $n$ -esfera, y no es difícil ver que un generador de su  $\Delta$ -homología en dimensión  $n$ , y por lo tanto también de su homología singular, está dado por la suma

$$c = \sum_{\vec{\varepsilon}} (\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n) |[\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n]|,$$

donde  $\vec{\varepsilon}$  recorre el conjunto de todos los vectores reales con coordenadas 1 o  $-1$ . Ahora observamos que, en  $\Sigma_n$ , la función antipodal es, de hecho, simplicial, y se tiene

$$a_{\Delta}(c) = \sum_{\vec{\varepsilon}} (\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n) |[-\varepsilon_0 e_0, \dots, -\varepsilon_n e_n]| = (-1)^{n+1} c.$$

Concluimos que el grado de la función antipodal es  $(-1)^{n+1}$ .

**Corolario 23.4.2.** *Si el grado de una función continua  $f : S^n \rightarrow S^n$  es diferente de  $(-1)^{n+1}$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.*  $\square$



Figure 23.2: Una variedad diferenciable con su plano tangente en un punto.

**Corolario 23.4.3.** Si  $G$  es un grupo topológico homeomorfo a la esfera  $S^n$ , entonces  $n$  es impar.

*Proof.* Si  $g$  es un elemento diferente de la identidad, la función  $x \mapsto gx$  no tiene puntos fijos, pero esta función debe ser homotópica a la identidad mediante una homotopía del tipo  $H(t, x) = \gamma(t)x$ , donde  $\gamma$  es una curva que une la identidad con  $g$ . Concluimos que  $(-1)^{n+1} = 1$ .  $\square$

Para la siguiente aplicación necesitamos recordar algunos conceptos de la geometría diferencial. Para efectos de estas notas, consideraremos una variedad diferenciable como un conjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  en el que cada punto  $p \in M$  tiene una vecindad abierta  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , para la que existe un homeomorfismo diferenciable  $\phi : D \rightarrow V \cap M$ , donde  $D$  es un abierto en  $\mathbb{R}^m$ , con  $m < n$ . También asumimos que  $\phi$  tiene una matriz derivada inyectiva en  $\phi^{-1}(0)$ . Esta es la definición de lo que en geometría diferencial se conoce como una variedad incrustada en  $\mathbb{R}^n$ , pero nos bastará por ahora. El fibrado tangente  $TM \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  es la unión de los conjuntos de la forma  $\tilde{T}_p M = \{p\} \times T_p M$ , donde  $T_p M$  es el espacio tangente a la variedad  $M$  en el punto  $p$ . Con estas convenciones, un campo vectorial en  $M$  es una función diferenciable  $\tilde{V}$  de  $M$  en su fibrado tangente  $TM$  que satisface  $\tilde{V}(p) \in \tilde{T}_p M$  para cada punto  $p \in M$ . A menudo escribimos  $V$  para la segunda coordenada de  $\tilde{V}$ , es decir la función que satisface  $\tilde{V}(p) = (p, V(p))$ . Un campo vectorial define un flujo  $\Phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mediante la ecuación diferencial  $\frac{d}{dt} \Phi(x, t) = V(x)$ . Recuérdese que la tangente a una curva definida en una variedad es un vector del espacio tangente en el punto correspondiente, por lo que esta ecuación tiene sentido. La existencia de tal solución y su diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales son estudio de la teoría de ecuaciones diferenciales, materias en las que no entraremos aquí.

**Corolario 23.4.4.** *Sea  $n$  un entero positivo par y sea  $\tilde{V} : S^n \rightarrow \tilde{T}S^n$  un campo vectorial en la  $n$ -esfera. Entonces existe un punto  $p \in S^n$  que satisface  $V(p) = 0$ .*

*Proof.* Supongamos que este no es el caso, es decir  $V(p) \neq 0$  para cada  $p \in S^n$ . En este caso, una expansión de Taylor nos da

$$\Phi(p, t) = p + tV(p) + g(p, t),$$

donde  $g$  es una función continua que satisface  $|g(p, t)|/t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ . La compacidad nos permite asumir que esta convergencia es uniforme, por lo que  $|\Phi(p, t) - p|$  está acotado por abajo para  $t$  suficientemente pequeño. Esto contradice el hecho de que  $x \mapsto \Phi(x, t)$  tiene un punto fijo para cada  $t$  dado, por ser homotópica a la identidad. La contradicción termina la demostración.  $\square$

**Proposición 23.5.** *Una función continua impar  $f : S^n \rightarrow S^n$ , es decir una función que satisface la relación  $f(-x) = -f(x)$ , debe tener grado impar.*

*Proof.* Observemos primero que si  $f$  es impar, entonces tiene una aproximación simplicial impar. Esto sigue del hecho de que una aproximación simplicial  $s$  sólo necesita cumplir con la condición

$$f(\text{Est}(v)) \subseteq \text{Est}(s(v)), \quad (23.2)$$

por lo que las imágenes bajo  $s$  pueden escogerse de modo que respeten antípodas. En otras palabras, pedimos que se satisfaga la relación  $s(-v) = -s(v)$ , para cada vértice  $v$ . Nótese que si  $v$  y  $s(v)$  cumplen la relación (23.2), también lo hacen  $-v$  y  $-s(v)$ , por lo que no hay problema en modificar las imágenes de un punto en cada par de vértices antipodales para garantizar la condición requerida.

Utilizaremos la homología simplicial con coeficientes en el cuerpo  $\mathbb{F}_2$  con dos elementos. Recuédese que las cadenas de la homología con coeficientes se definen mediante la relación  $C_n^{\text{Simp.}}(\Sigma; \mathbb{F}_2) = C_n^{\text{Simp.}}(\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2$ . Dado que  $C_n^{\text{Simp.}}(\Sigma)$  es un grupo abeliano libre con un conjunto de generadores indexado por los simplices del complejo, esto equivale a definir  $C_n^{\text{Simp.}}(\Sigma; \mathbb{F}_2)$  como un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial cuya base está indexada por ese mismo conjunto. No es difícil ver que, con estas convenciones, un generador de la  $n$ -homología, en este caso, es el siguiente:

$$\bar{c} = \sum_{\substack{\rightarrow \\ \epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)}} [\epsilon_0 e_0, \dots, \epsilon_n e_n].$$

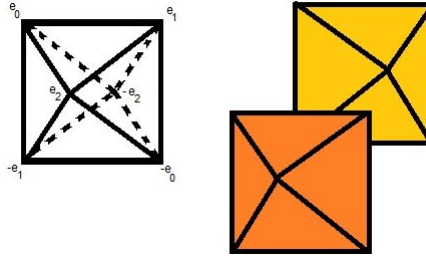


Figure 23.3: La división de la esfera en dos casquetes en el caso  $n = 2$ .

Nótese que en el presente contexto, el signo en el coeficiente ya no es relevante. Una función continua tiene grado impar sí y sólo si induce un isomorfismo a nivel de  $H_n^{\text{sing.}}(S^n, \mathbb{F}_2) \cong H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$ . En caso contrario inducirá la función 0. Asumiremos esto último para llegar a una contradicción. Esto probará que el grado es impar.

Definimos una cadena que representa el casquete superior, es decir el hemisferio norte, mediante la fórmula siguiente:

$$b = \sum_{\substack{\vec{\varepsilon} \\ \varepsilon_n=1}} [\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n],$$

de modo que se tenga  $\bar{c} = b + a_\Delta(b)$ . Véase la Figura 23.3. Consideremos una aproximación simplicial impar  $s : \Sigma_n^{(m)} \rightarrow \Sigma_n$  de  $f$ , donde  $\Sigma_n$  es el complejo simplicial definido antes, y ponemos  $b_0 = \delta^m b$ . Como  $s$  tiene grado par debe inducir la función 0 a nivel de homología. Por otro lado, se tiene que  $a_\Delta s_\Delta = s_\Delta a_\Delta$ , dado que  $s$  es impar.

Dado que no hay cadenas simpliciales no triviales de dimensión  $n + 1$ , la imagen bajo  $s_\Delta$  de cualquier generador de la homología simplicial de  $\Sigma_n^{(m)}$  debe ser trivial. En otras palabras, tenemos  $s_\Delta(b_0) + a_\Delta s_\Delta(b_0) = 0$ , es decir  $s_\Delta(b_0) = a_\Delta s_\Delta(b_0)$ . Concluimos que cada vez que un símplice aparece en la expresión de  $s_\Delta(b_0)$ , también aparece su antipodal. En particular, puede escribirse  $s_\Delta(b_0) = h + a_\Delta(h)$  para cierta cadena  $h$ .

Supongamos primero que  $n = 1$ , de modo que  $b = [e_0, e_1] + [-e_0, e_1]$ . En este caso  $\partial b_0 = \partial b = [e_0] + [-e_0]$ , por lo que

$$\partial s_\Delta(b_0) = [s(e_0)] + [s(-e_0)] = [s(e_0)] + [-s(e_0)].$$

Por otro lado, se tiene

$$\partial s_{\Delta}(b_0) = \partial h + \partial a_{\Delta}(h),$$

es decir la suma de un número par de vértices ( $\partial h$ ) y sus antípodas. La expresión de más arriba no tiene esa forma, lo que demuestra el teorema en este caso.

Más generalmente,  $\partial b_0$  es el ecuador de  $\Sigma_n^{(m)}$  como se aprecia en la Figura 23.3, el que es una esfera de dimensión  $n-1$ . Por esta razón, puede escribirse  $\partial b_0 = b_1 + a_{\Delta}(b_1)$ , donde

$$b_1 = \delta^m \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-2}} [\epsilon_0 e_0, \dots, \epsilon_{n-2} e_{n-2}, e_{n-1}],$$

suma que se extiende sobre todas las posibles elecciones de los signos  $\epsilon_i$ . En particular, se tiene

$$\partial h + s_{\Delta}(b_1) = a_{\Delta}(\partial h + s_{\Delta}(b_1)),$$

de donde tenemos, por el mismo razonamiento anterior

$$\partial h + s_{\Delta}(b_1) = h_1 + a_{\Delta}(h_1),$$

para cierta cadena  $h_1$ . Aplicando el operador borde y utilizando la fórmula  $\partial^2 = 0$ , obtenemos

$$s_{\Delta}(\partial b_1) = \partial s_{\Delta}(b_1) = \partial h_1 + a_{\Delta}(\partial h_1).$$

Como  $\partial b_1$  es el ecuador de la  $n-1$  esfera, podemos definir  $b_2$  por la fórmula

$$b_2 = \delta^m \left( \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-3}} [\epsilon_0 e_0, \dots, \epsilon_{n-3} e_{n-3}, e_{n-2}] \right),$$

como antes, para obtener  $\partial b_1 = b_2 + a_{\Delta}(b_2)$ , y por ende

$$\partial h_1 + s_{\Delta}(b_2) = a_{\Delta}(\partial h_1 + s_{\Delta}(b_2)).$$

Iterando este proceso obtenemos finalmente

$$\partial h_{n-2} + s_{\Delta}(b_{n-1}) = h_{n-1} + a_{\Delta}(h_{n-1}),$$

donde  $b_{n-1} = \delta^m ([e_0, e_1] + [-e_0, e_1])$ , y la demostración se termina como antes.  $\square$

**Corolario 23.5.1. (Teorema de Borsuk-Ulam).** Sea  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Entonces existe un punto  $x \in S^n$  para el cual  $f(x) = f(-x)$ .

*Proof.* En caso contrario, la fórmula  $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$  define una función impar  $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ . Su restricción al ecuador es una función  $g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  que es homotópica a una constante, por lo que tiene grado cero. Esto contradice el resultado anterior.  $\square$

**Corolario 23.5.2. (Teorema del Sandwich de Jamón y Queso).** Dados tres conjuntos medibles y acotados en el espacio, existe un plano que los bisecta simultáneamente a los tres.

*Proof.* Llamemos a estos conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Sea  $\vec{u} \in S^2$  un vector unitario, y sea  $L$  un plano perpendicular a  $\vec{u}$ . Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  los dos semi-espacios determinados por  $L$ . Para fijar ideas, digamos que  $\Omega_1$  se encuentra en la dirección de  $\vec{u}$ . Nótese que  $\text{Vol}(A \cap \Omega_1) - \text{Vol}(A \cap \Omega_2)$  varía continuamente con la posición de  $L$ , mientras que su valor converge a  $\text{Vol}(A)$  cuando esta posición se aleja hacia el infinito en una dirección, y a  $-\text{Vol}(A)$  en la dirección contraria. Concluimos que es posible escoger dicho plano de modo que bisecte a  $A$ , es decir  $\text{Vol}(A \cap \Omega_1) = \text{Vol}(A \cap \Omega_2)$ .

Se define la función

$$f(\vec{u}) = \left( \text{Vol}(B \cap \Omega_1), \text{Vol}(C \cap \Omega_1) \right).$$

Afirmamos que esta es una función continua de  $S^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que existe un valor del vector unitario  $\vec{u}$  para el cual  $f(\vec{u}) = f(-\vec{u})$ . Nótese que remplazar  $\vec{u}$  por  $-\vec{u}$  intercambia  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , por lo que se sigue el resultado.

Falta probar la continuidad. Esto requiere algo de geometría. Consideremos una bola  $D = B_R(\vec{0})$  centrada en el origen y de radio  $R$  suficientemente grande para contener a todos los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Removamos de  $D$  una pequeña vecindad de la parte del plano  $L$  que la intersecta. Si  $\text{Vol}(A) = V$ , la intersección de  $A$  con cada una de las zonas verdes de la Figura 23.4 contiene un volumen entre  $\frac{V}{2} - \varepsilon$  y  $\frac{V}{2}$ . Además, el resto de  $A$  se ubica en la franja intermedia. Concluimos que, para vectores unitarios  $\vec{v}$  cercanos a  $\vec{u}$ , el plano  $P$  que es perpendicular a  $\vec{v}$  y bisecta a  $A$  se encuentra muy cerca de la franja, por lo que las regiones en las que  $P$  divide a  $B$  y  $C$  son también similares. Dejamos los detalles al lector.  $\square$



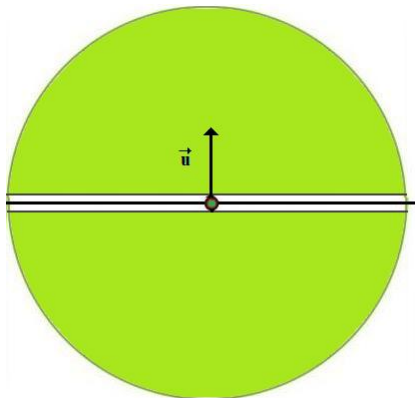


Figure 23.4: La esfera de la demostración del Teorema del Sandwich de Jamón y Queso.

### Grado de una aplicación entre variedades compactas orientables.

Sea  $M$  una variedad conexa sin borde y triangulable. Mostraremos que el concepto de grado se extiende sin dificultad a funciones  $f : M \rightarrow M$ . Para ello, escojamos un complejo simplicial  $\Sigma$  cuyo polihedro  $|\Sigma|$  es homeomorfo a  $M$  y lo utilizamos para calcular la homología de  $M$  vía homología simplicial. Consideremos dos símlices adyacentes de dimensión máxima  $n$ , denotados  $A$  y  $B$  como en la Figura 23.5. Sea  $c$  una cara común entre ambos símlices. Consideremos un ciclo (simplicial)  $\gamma$  de dimensión máxima. Supongamos que el coeficiente de  $A$  en  $\gamma$  es  $t \neq 0$ . Entonces el coeficiente de  $B$  debe ser también no nulo, y de hecho, existe una única elección de este último coeficiente que permite que el coeficiente de la cara común  $c$  se anule. Además, este coeficiente es, o bien  $t$ , o bien  $-t$ . Lo mismo se aplica a otros vecinos de  $A$  o  $B$ , e inductivamente a todo los símlices de la triangulación, por ser  $M$  conexa. En particular se concluye lo siguiente:

1. Si existe un ciclo no trivial, este debe tener el mismo coeficiente en cada uno de los símlices de dimensión maximal, salvo por una elección de signo, la que debe realizarse coherentemente.
2. Si existe un ciclo no trivial, la triangulación debe tener sólo una cantidad finita de símlices de dimensión máxima. En particular,  $M$  es

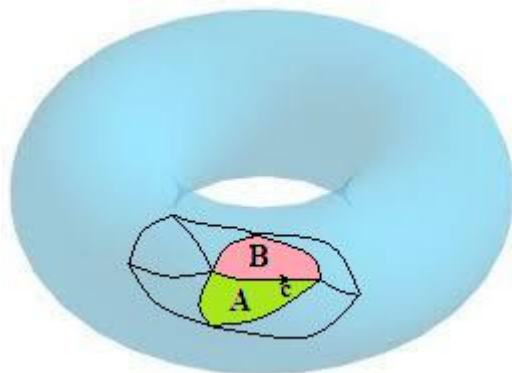


Figure 23.5: Dos símlices adyacentes en una triangulación de una variedad compacta sin borde.

compacta.

3. Asumamos que  $M$  es compacta. Un ciclo no trivial existe si y sólo si la elección de signo puede realizarse de manera coherente en todos los símlices de dimensión maximal de la triangulación. En este caso diremos que la triangulación es orientable.
4. Si un ciclo no trivial existe, al no haber cadenas no triviales de dimensión mayor, la homología  $n$ -dimensional es no trivial, y de hecho  $H_n^{\text{sing.}}(M) \cong H_n^{\text{simp.}}(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ .

Concluimos, de esta última observación, que la orientabilidad es una propiedad de la variedad, no de la triangulación escogida. Le llamaremos una orientación, a una elección de un generador de  $H_n^{\text{sing.}}(M)$ . Nótese que, como prueba lo dicho más arriba, basta escoger la orientación de un sólo símlice.

Si  $M$  es una variedad conexa, compacta, orientable y triangulable, le llamaremos grado  $d = \deg(f)$  de una aplicación continua  $f : M \rightarrow M$  al número entero  $d$  que satisface la relación  $f_*(a) = da$  para cada  $a \in H_n^{\text{sing.}}(M)$ . Es posible también definir el grado de una aplicación continua  $f : M \rightarrow N$  entre variedades distintas, pero sólo si se escoge un generador de cada grupo de homología, es decir una orientación de cada variedad.

Nótese que la elección del signo en un único símlice nos da también una elección de un generador preferente para el grupo de cohomología local

$H_n^{\text{loc.}}(M; p)$  para cada punto  $p$  interior a dicho simple. No es difícil convencerse de que esta observación nos proporciona una manera de identificar la orientación local en un punto con la orientación global de la variedad. Esta orientación es independiente de la triangulación escogida, como se verá en la sección siguiente.

### Grado local y principio local-global.

Sean  $M$  y  $N$  variedades compactas orientables como en la sección anterior, y sea  $p \in M$ . El grupo de homología local  $H_n^{\text{loc.}}(M; p) = H_n^{\text{sing.}}(M, M - \{p\})$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , de modo que es posible definir un grado local  $\text{deg}_p(f)$  mediante la fórmula  $f_*(a) = [\text{deg}(f)]b$ , donde  $a$  es un generador de  $H_n^{\text{loc.}}(M; p)$  y  $b$  es un generador de  $H_n^{\text{loc.}}(N; f(p))$ , para cada función continua  $f : M \rightarrow N$ . Esta definición depende de los generadores  $a$  y  $b$ . Sin embargo, la discusión de la sección precedente nos dice que estos generadores están completamente determinados si se escoge una orientación de cada una de las variedades  $M$  y  $N$ . En particular, si  $M = N$ , es posible escoger los generadores de forma coherente, en el sentido en el que ambas estén inducidas por una misma orientación global. Esto fija el signo del grado local en ese caso, dado que cambiar el signo del generador de la homología global cambia el signo del grado de todos los generadores locales simultáneamente. En el caso general el grado local está definido salvo signo.

Una manera de visualizar esto es tomando un generador de la homología local, el cual puede ser la imagen de un simple que contenga al punto  $p$  en su interior, como el que se muestra en la Figura 23.6. Podemos suponer que el simple mostrado en la figura es uno de los simples del complejo  $\Sigma$  que triangula la variedad, como el que mostramos en la sección anterior. Existe, por lo dicho allí, un único generador  $a \in H_n^{\text{sing.}}(M)$  representado con una cadena cuyo coeficiente en el simple dado es 1. De hecho el homomorfismo canónico

$$\rho_* : H_n^{\text{sing.}}(M) \rightarrow H_n^{\text{loc.}}(M; p)$$

es un isomorfismo. Más aún, si  $f : M \rightarrow N$  es una función continua, para cada punto  $q \in N$  se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \\ \downarrow \mu_* & & \downarrow \rho_* \\ H_n(M, M - f^{-1}(q)) & \xrightarrow{f_*} & H_n^{\text{loc.}}(N; q) \end{array}$$

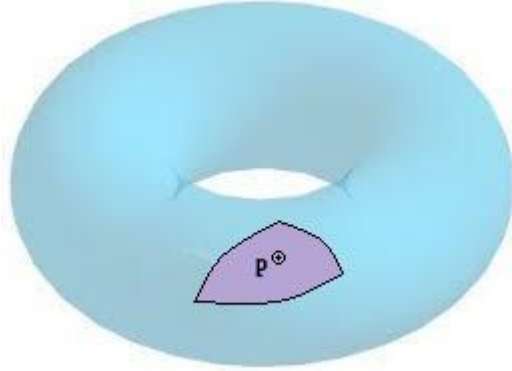


Figure 23.6: Un generador de la homología local.

donde  $\mu_*$  es la función inducida por la proyección a nivel de cadenas

$$\mu : C_n^{\text{sing.}}(M) \rightarrow C_n^{\text{sing.}}(M, M - f^{-1}(q)),$$

la que lleva cada cadena singular en la clase correspondiente. Supongamos que la pre-imagen  $f^{-1}(q)$  es finita, y que cada uno de sus puntos está en el interior de un símlice, como  $p$  en la Figura 23.6, lo que siempre puede suponerse con una elección apropiada de la triangulación. Más aún, utilizando una subdivisión baricéntrica, podemos suponer que los símlices que corresponden a puntos distintos de la pre-imagen no son adyacentes. En tal caso, el lema de la escisión nos muestra que la homología relativa  $H_n^{\text{sing.}}(M, M - f^{-1}(q))$ , es la suma directa de los grupos de homología local  $H_n^{\text{loc.}}(M; p)$ , donde  $p$  recorre la pre-imagen  $f^{-1}(q)$ , y se tiene

$$\mu_*(a) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} a_p,$$

donde cada  $a_p$  es un generador del grupo de homología local correspondiente. En particular, podemos realizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} [\deg(f)]b_q &= \rho_*([\deg(f)]b_N) = \rho_* \circ f_*(a_M) = f_* \circ \mu_*(a_M) \\ &= \sum_{p \in f^{-1}(q)} f_*(a_p) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} [\deg_p f]b_q. \end{aligned}$$

El siguiente resultado es ahora inmediato:

**Proposición 23.6. (*Principio local global*).** *El grado de una función continua entre variedades sin borde, compactas, conexas y triangulables es la suma de los grados locales en las pre-imágenes de cada punto con pre-imagen finita.*

**ejemplo 23.7.** Sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una función analítica de la esfera de Riemann en si misma. Recordemos que el grupo de homología local  $H_2(\hat{\mathbb{C}}; 0)$  es isomorfo a  $H_2(\mathbb{C}; 0) \cong H_1(\mathbb{C}^*)$ . El espacio  $\mathbb{C}^*$  es homotópicamente equivalente al círculo, por lo que la clase correspondiente a una curva cerrada puede calcularse utilizando el número de vueltas. Si  $f$  tiene un cero de orden  $n$  en  $0$ , entonces podemos escribir  $f(z) = az^n + f_1(z)$ , donde  $\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z)z^{-n} = 0$ . Es fácil ver que la curva  $s \mapsto f(\varepsilon e^{2s\pi i})$  es homotópica en  $\mathbb{C}^*$  a  $s \mapsto a\varepsilon^n e^{2ns\pi i}$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño ( $\varepsilon \ll 1$ ) mediante una homotopía del tipo

$$H(s, t) = tf(\varepsilon e^{2s\pi i}) + (1-t)a\varepsilon^n e^{2ns\pi i} = a\varepsilon^n e^{2ns\pi i} + tf_1(\varepsilon e^{2s\pi i}),$$

dado que el valor absoluto del último término está acotado por  $a\varepsilon^n/2$  para  $\varepsilon \ll 1$ , por lo que la homotopía no se anula. Concluimos que el grado local de  $f$  en  $0$  es igual a  $n$ . Afirmamos ahora que el grado de una función racional viene dada por la fórmula

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\},$$

si  $P$  y  $Q$  son polinomios sin divisores comunes. Para esto, observamos que el polinomio  $\frac{P}{Q}$  tiene un cero en  $\infty$  si y sólo si  $\deg(Q) > \deg(P)$ . Si este no es el caso, los ceros de  $\frac{P}{Q}$  son los ceros de  $P$ , y estos no son ceros de  $Q$ , por lo que el grado de cada cero  $p$  coincide con la multiplicidad del factor  $z - p$  en la descomposición prima de  $P(z)$ . Si hay un cero en infinito, a lo anterior hay que sumarle el grado de dicho cero, por lo que basta probar que el grado del cero en infinito es  $\deg(Q) - \deg(P)$ . Para esto escribimos  $P(z) = az^n + P_1(z)$  y  $Q(z) = bz^m + Q_1(z)$ , donde  $P_1(z)$  y  $Q_1(z)$  contienen las sumas de los términos de grado no maximal de cada polinomio. Ahora observamos que

$$\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \frac{az^{-n} + P_1(z^{-1})}{bz^{-m} + Q_1(z^{-1})} = z^{m-n} \cdot \frac{a + z^n P_1(z^{-1})}{b + z^m Q_1(z^{-1})},$$

de donde sigue el resultado.

**El número de Lefschetz:**

Sea  $\Sigma$  un complejo simplicial finito, de modo que, en particular, el grupo  $H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$  sea un espacio vectorial racional de dimensión finita para cada  $n$ . Más específicamente  $H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\beta_n}$ . El entero no negativo  $\beta_n$  se denomina el  $n$ -ésimo número de Betty de  $\Sigma$ .

Sea  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma|$  una función continua, y sea  $f_{*,n} : H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q}) \rightarrow H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$  la función que induce a nivel de homología  $n$ -dimensional. Definamos

$$\Lambda_f := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(f_{*,k}).$$

Este se denomina número de Lefschetz de  $f$ .

Antes de probar el resultado principal de esta sección necesitamos un lema técnico:

**Lema 23.8.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita, y sea  $W$  un subespacio. Sea  $f : V \rightarrow V$  una función lineal que satisface  $f(W) \subseteq W$ , y sea  $\tilde{f} : V/W \rightarrow V/W$  la función inducida. Sea  $f'$  la restricción de  $f$  a  $W$ . Entonces  $\text{tr}(f') + \text{tr}(\tilde{f}) = \text{tr}(f)$ .*

*Proof.* Este resultado sigue fácilmente de la observación de que si  $A$  es la matriz de  $f'$  y  $B$  es la matriz de  $\tilde{f}$ , entonces  $f$  tiene una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

□

**Proposición 23.9. (Teorema del punto fijo de Lefschetz).** *Si  $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma|$  es una función continua que satisface  $\Lambda_f \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

*Proof.* El espacio topológico  $X = |\Sigma|$  es compacto y metrizable, por lo que podemos encontrar un mínimo no nulo de la función  $x \mapsto d(x, f(x))$ , para cualquier métrica que defina la topología. En particular, reemplazando  $\Sigma$  por una subdivisión baricéntrica suficientemente fina, podemos suponer que, para cualquier símplice  $T$  de  $\Sigma$ , la distancia entre  $T$  y  $f(T)$  es mayor a tres veces el diámetro de cualquier símplice. Si ahora  $s : \Sigma^m \rightarrow \Sigma$  es una aproximación simplicial, entonces afirmamos que la función inducida  $s_{\Delta,n} : C_n^{\text{simp.}}(\Sigma^{(m)}, \mathbb{Q}) \rightarrow C_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$  satisface  $\text{tr}(\delta^m s_{\Delta,n}) = 0$ . De hecho, sea  $T$

un s3mplice arbitrario de  $\Sigma^m$ , y sea  $U$  un s3mplice arbitrario de  $\Sigma$  que lo contiene. Sea  $x$  un punto interior de  $T$ , de modo que el soporte  $W$  de  $f(x)$  en  $\Sigma$  contiene a  $s(x) \in s(U)$ . En particular, la distancia de  $f(x)$  a  $s(x)$  es menor que el di3metro de  $W$ . Se sigue que la distancia de  $x$  a  $s(x)$  es mayor al doble del di3metro m3ximo de un s3mplice. Se sigue que  $T$  y  $s(T)$  no se intersectan. Los s3mplices que aparecen en la expresi3n  $\delta^m s_{\Delta,n}(T)$  son aquellos en los que  $s(T)$  se subdivide, por lo que ninguno de ellos coincide con  $T$ . La afirmaci3n sigue.

Probaremos ahora que el n3mero de Lefschetz satisface

$$\Lambda_f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{\Delta,n}).$$

Esto termina la demostraci3n. Es claro que

$$\Lambda_f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(s_{*,n}),$$

por lo que podemos utilizar las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0 \quad & \text{y} \\ 0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

junto con el lema precedente para escribir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{*,k}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{Z,k}) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{B,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{\Delta,k}) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{B,k-1}) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{B,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{\Delta,k}), \end{aligned}$$

donde  $s_{Z,k} : Z_k^{\text{simp.}}(\Sigma^{(m)}, \mathbb{Q}) \rightarrow Z_k^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$  y  $s_{B,k} : B_k^{\text{simp.}}(\Sigma^{(m)}, \mathbb{Q}) \rightarrow B_k^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$  son las funciones inducidas correspondientes, y el resultado sigue del hecho de que  $\delta^m$  induce la identidad a nivel de homolog3a. N3tese que en la suma del medio de la segunda l3nea aparece una funci3n  $s_{B,-1}$  que debe interpretarse como 0.  $\square$

**ejemplo 23.10.** Si  $|\Sigma| = S^n$ , entonces  $\Lambda_f = 1 + (-1)^n \deg(f)$ , con lo que se recupera el criterio dado al comienzo de este capítulo para que una función entre esferas tenga un punto fijo.

La característica de Euler de un espacio compacto triangulable  $X$  se define por  $\chi(X) = \Lambda_{\text{id}}$ , el número de Lefschetz de la identidad. La demostración del Teorema de Punto Fijo de Lefschetz muestra que esta puede calcularse utilizando la fórmula

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k N_k,$$

donde  $N_k$  es el número de  $k$ -símplices en una triangulación dada de  $X$ . Esta tiene la propiedad aditiva

$$\chi(X_1 \cup X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2),$$

cuando cada uno de los espacios involucrados es triangulable, como puede comprobarse fácilmente utilizando, por ejemplo, la sucesión de Mayer Vietoris. También pueden probarse los siguientes resultados, de manera análoga a los Corolarios 24.1.3 y 24.1.4:

**Corolario 23.10.1.** *Si  $G$  es un grupo topológico compacto triangulable no trivial, entonces  $\chi(G) = 0$ .*  $\square$

**Corolario 23.10.2.** *Si  $M$  es una variedad compacta triangulable que admite un campo vectorial  $V : M \rightarrow TM$  que no se anula en ningún punto, entonces  $\chi(M) = 0$ .*  $\square$

En el segundo corolario no consideramos a un punto como una variedad.

**Ejercicios:** (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Utilice la homología celular para calcular la homología de la esfera, el toro y la botella de Klein.
2. Sea  $K$  el  $(n-1)$ -esqueleto del  $n$ -símplice  $[v_0, \dots, v_n]$ . Probar que toda  $(n-1)$ -cadena cerrada de  $K$  es un múltiplo de la cadena

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$



3. Utilice la fórmula para el grado de una función racional como función de  $\hat{\mathbb{C}}$  en si mismo para dar una demostración del teorema fundamental del álgebra.
4. Probar que si  $f : S^m \rightarrow S^n$  es impar, entonces  $m \leq n$  (Sugerencia: Usar el Teorema de Borsuk-Ulam).
5. Extienda el Teorema del Sandwich de Jamón y Queso a dimensión  $n$ .
6. Para cada entero  $n$ , sea  $T_n$  la transformación lineal con matriz  $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ . Para que valor de  $n$  la función que  $T_n$  induce en el toro es homotópica a una transformación sin puntos fijos?
7. Utilice la sucesión de Mayer Vietoris para probar la aditividad de la característica de Euler.
8. Suponga que  $X = X_1 \cup X_2$ , y que existe una triangulación de  $X$  en la que  $X_1$  y  $X_2$  sean polihedros de subcomplejos. Dar una demostración directa de la aditividad de la característica de Euler.
9. Sea  $\beta_n$  el  $n$ -ésimo número de Betty de un espacio triangulable  $X$ , es decir  $H_n^{\text{sing.}}(X, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\beta_n}$ . Probar que la característica de Euler satisface  $\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k$ . Utilice esta propiedad para calcular  $\beta_1$  cuando  $X$  es la superficie orientable de género  $g$ .
10. Puede extenderse la propiedad anterior a los números de Betty módulo 2, los que satisfacen  $H_n^{\text{sing.}}(X, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2^{\beta_n}$ ?
11. Sea  $\Sigma$  un complejo simplicial y  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$  una función simplicial. Probar que los puntos fijos de  $s$  forman un subcomplejo  $\Upsilon$  de la subdivisión baricéntrica de  $\Sigma$  y que  $\chi(|\Upsilon|) = \Lambda_s$ . En particular, probar que si  $s$  sólo tiene puntos fijos aislados, entonces tiene exactamente  $\Lambda_s$  puntos fijos.

## Chapter 24

# Cohomología.

Un complejo de co-cadenas es esencialmente lo mismo que un complejo de cadenas, excepto que los morfismos, llamado en este caso operadores co-borde, van en la dirección contraria, del grupo de co-cadenas de menor dimensión al de mayor dimensión. Para ser precisos, un complejo de co-cadenas  $\mathfrak{C}$  consiste en un grupo de co-cadenas  $C^n$  en cada dimensión, y un operador co-borde  $\delta_n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ , el cual utilizamos para definir el grupo de  $n$ -cobordes  $Z_n(\mathfrak{C}) = \ker(\delta_n)$  y el grupo de  $n$ -cociclos  $B^n(\mathfrak{C}) = \delta_{n-1}(C^{n-1}) \subseteq C^n$ . También en este caso imponemos la condición  $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$ , lo que implica que  $B^n(\mathfrak{C}) \subseteq Z^n(\mathfrak{C})$ , por lo que podemos definir los grupos de cohomología mediante

$$H^n(\mathfrak{C}) = \frac{Z^n(\mathfrak{C})}{B^n(\mathfrak{C})},$$

como antes. Alternativamente, podemos interpretar un complejo de co-cadenas, como un complejo de cadenas que tiene grupos de cadenas no triviales sólo en dimensión no positiva. Por esta razón, muchas de las propiedades de los complejos de cadenas se trasladan, sin mayor esfuerzo a la nueva situación.

El camino más común para definir un complejo de co-cadenas a partir de un complejo de cadenas es dualizar. Si  $\mathfrak{C}$  es un complejo de cadenas, su complejo de co-cadenas dual  $\mathfrak{C}^* = \text{Hom}(\mathfrak{C}, A)$  se define por los grupos de co-cadenas  $C^n = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, A)$ , para cierto grupo abeliano  $A$  fijo, que supondremos igual a  $\mathbb{Z}$  si no se especifica lo contrario. El operador coborde  $\delta$  es, en este caso, el dual  $\delta = \delta'$  del operador borde usual  $\partial$ , y definimos los grupos de cohomología de  $\mathfrak{C}$  mediante  $H^n(\mathfrak{C}) = H^n(\mathfrak{C}^*)$ . Con esta convención, definimos los grupos de cohomología singular de un espacio topológico, o los

grupos de cohomología simplicial y  $\Delta$ -cohomología de un complejo de celdas, en términos de los duales de los correspondientes complejos de cadenas. Por ejemplo, para un complejo simplicial  $\Sigma$  y un espacio topológico  $X$  definimos

$$H_{\text{simp.}}^n(\Sigma; A) = H^n(\mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Sigma)), \quad H_{\text{sing.}}^n(X; A) = H^n(\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)).$$

Del mismo modo, cada morfismo  $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  entre complejos de cadenas define un dual  $f' : \mathfrak{D}^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$ , que es también un morfismo de cadenas, lo que nos permite definir funciones  $f^* : H^n(\mathfrak{D}) \rightarrow H^n(\mathfrak{C})$  a nivel de cohomología. El concepto de homotopía de cadenas se extiende también al nuevo contexto, y podemos definir homotopías de co-cadenas simplemente dualizando homotopías de cadenas. La ecuación  $K\partial + \partial K = f - g$  implica, dualizando, la ecuación

$$K'\delta + \delta K' = f' - g'$$

para el complejo dual. Esto demuestra, por ejemplo, la invarianza de los grupos de cohomología bajo equivalencia homotópica, es decir, el resultado siguiente:

**Proposición 24.1.** *Espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de cohomología isomorfos.*  $\square$

Los detalles se dejan al lector.

Con lo dicho hasta aquí podría parecer que los grupos de cohomología son una variación sencilla de los grupos de homología, con lo que el lector se preguntará si entregan realmente información nueva. De hecho es posible, como veremos a continuación, calcular los grupos de cohomología directamente a partir de los grupos de homología. Sin embargo, es posible dotar, a la suma directa de los grupos de homología, una estructura de anillo gradado, la que no es fácil de definir, en la mayoría de los casos, para su contraparte homológica. Los grupos de cohomología de variedades diferenciables tienen también una versión analítica, en términos de formas diferenciales, como veremos en un capítulo posterior (aún no escrito en esta versión de los apuntes).

A fin de calcular los grupos de cohomología a partir de la homología necesitamos ciertas herramientas del álgebra homológica. Específicamente, precisamos la definición del functor Ext. Para estos efectos, definimos una resolución libre, de un grupo abeliano  $A$ , como una sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$\{0\} \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow \{0\}$$

donde  $K$  y  $F$  son grupos libres. Tal sucesión siempre existe, dado que podemos tomar un conjunto de generadores de  $A$ , interpretarlo como las imágenes de los generadores de un grupo libre  $F$ , y definir  $K$  como el núcleo de homomorfismo así obtenido. Nótese de que aquí usamos el hecho de que todo subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.

Nótese que podemos definir un complejo de cadenas  $\mathfrak{A}$ , donde  $C_0(\mathfrak{A}) = F$ ,  $C_1(\mathfrak{A}) = K$  y  $C_n(\mathfrak{A}) = \{0\}$  para  $n \geq 2$ , utilizando, como único operador borde no trivial, la inclusión de  $K$  en  $F$ . Este complejo satisface  $H_0(\mathfrak{A}) \cong A$  y  $H_n(\mathfrak{A}) \cong \{0\}$  para  $n \geq 1$ , como el lector comprobará fácilmente. Nos referiremos a este complejo como un complejo resolución del grupo abeliano  $A$ .

**Lema 24.2.** *Dos complejos resolución arbitrarios de un grupo abeliano fijo  $A$  son homotópicamente equivalentes. Cada homomorfismo de grupos abelianos  $f : A \rightarrow A'$  induce una función de cadenas  $f_\Delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$  entre los correspondientes complejos resolución, la que es única módulo homotopía.*

*Proof.* Basta probar la última afirmación para una resolución arbitraria, pues si  $\mathfrak{A}_1$  y  $\mathfrak{A}_2$  son dos complejos resolución del mismo grupo, lo anterior implica la existencia de morfismo de cadenas  $h : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$  y  $n : \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1$  inducidas por la identidad, mientras las composiciones  $h \circ n$  y  $n \circ h$  son homotópicas a las identidades respectivas por la condición de unicidad incluida en la última afirmación.

Para probar la existencia de la función de cadenas necesitamos completar el homomorfismo  $f$  a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{d} & F & \xrightarrow{e} & A \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ K' & \xrightarrow{d'} & F' & \longrightarrow & A' \end{array} .$$

Para definir  $f_0$  se escoge una base de  $F$ , y a cada uno de sus miembros  $v$  se le asocia una pre-imagen del elemento correspondiente  $f \circ e(v) \in B$ . Lo mismo se hace para definir  $\tilde{f}_1$ . Para tener una homotopía entre dos de tales funciones de cadenas  $f_\Delta$  y  $\tilde{f}_\Delta$ , descritas respectivamente por morfismos con y sin tilde, basta encontrar un homomorfismo  $k : F \rightarrow K'$  que cumpla las identidades

$$d' \circ k = f_0 - \tilde{f}_0, \quad k \circ d = f_1 - \tilde{f}_1.$$

Esto se realiza como sigue: Para que  $k$  satisfaga la primera condición se utiliza una base de  $F$  y se escoge, para cada miembro  $v$  una pre-imagen,

bajo  $d'$ , de  $f_0(v) - \tilde{f}_0(v)$ , la que existe dado que  $f_0(v)$  y  $\tilde{f}_0(v)$  tienen la misma imagen en  $B$ . Para probar que también se cumple la segunda, escogemos un elemento  $r \in K$  y calculamos

$$d' \circ k \circ d(r) = f_0(d(r)) - \tilde{f}_0(d(r)) = d'(f_1(r) - \tilde{f}_1(r)),$$

donde utilizamos el hecho de que  $f_\Delta$  y  $f'_\Delta$  son morfismos de cadenas. Concluimos recordando que  $d'$  es inyectiva.  $\square$

Para todo grupo abeliano  $B$ , el grupo  $\text{Ext}(A, B)$  se define como el conúcleo del homomorfismo  $\text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B)$ , donde  $\text{Hom}(X, B)$  denota el grupo de homomorfismos, en la categoría de grupos abelianos, de  $X$  a  $B$ . Este functor puede calcularse a partir de los complejos resolución. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

**Lema 24.3.** *Sea  $A$  un grupo abeliano, y sea  $\mathfrak{A}$  un complejo resolución arbitrario de  $A$ . El dual  $\mathfrak{A}^* = \text{Hom}(\mathfrak{A}, B)$  satisface  $H^0(\mathfrak{A}^*) \cong \text{Hom}(A, B)$  y  $H^1(\mathfrak{A}^*) \cong \text{Ext}(A, B)$ .*

*Proof.* El dual  $\mathfrak{A}^* = \text{Hom}(\mathfrak{A}, B)$  es el complejo

$$\{0\} \rightarrow \text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B) \rightarrow \{0\}.$$

La segunda afirmación es, por lo tanto, inmediata a partir de la definición del functor  $\text{Ext}$ . Para probar la primera, es suficiente probar que la sucesión

$$\{0\} \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B)$$

es exacta. La inyectividad sigue del hecho de que una función es nula si y sólo si su imagen es  $\{0\}$ , mientras que una función  $s \in \text{Hom}(A, B)$  tiene la misma imagen  $s(A)$  que la función  $\tilde{s} \in \text{Hom}(F, B)$  que induce. Por otro lado, si una función  $\tilde{s} \in \text{Hom}(F, B)$  se anula en  $\text{Hom}(K, B)$ , entonces define una función  $s \in \text{Hom}(A, B)$  por la propiedad universal del cociente. El resultado sigue.  $\square$

**ejemplo 24.4.** Si  $A$  es un grupo libre podemos escoger  $K = \{0\}$ , por lo que se tiene  $\text{Ext}(A, B) = 0$ .

**Lema 24.5.** *Sea  $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A'' \rightarrow \{0\}$  una sucesión exacta corta de grupos abelianos. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}(A', B) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}(A'', B) \\ & & & & & & \downarrow \delta^* \\ & & & & & & \text{Ext}(A, B) \xrightarrow{g^*} \text{Ext}(A', B) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}(A'', B) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

de grupos abelianos, donde  $f^*$  y  $g^*$  son co-inducidas de  $f$  y  $g$ .

*Proof.* Para esto construimos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \end{array}$$

donde cada columna es una resolución libre del grupo correspondiente, y cada fila es exacta. Para garantizar la exactitud de las filas superiores es suficiente tomar  $F' = F \oplus F''$ , escogiendo pre-imagenes arbitrarias de los generadores de  $A''$  como imágenes de los correspondientes elementos de la base de  $F''$ . Esta función depende ciertamente de la elección de las pre-imagenes. Sin embargo, para cada elemento  $r \in K'' \subseteq F''$ , la correspondiente imagen  $\psi(r) \in A'$  cae en  $A$ , pues su imagen en  $A''$  es la identidad por definición de  $K''$ . Esto significa que podemos escoger un elemento  $\eta(r) \in F$  que tiene a  $\psi(r)$  como imagen en  $A$ , y por lo tanto tenemos

$$K' = \left\{ (u + \eta(r), r) \mid u \in K, r \in K'' \right\},$$

de donde concluimos la exactitud de la fila que contiene a  $K$ . Lo anterior define una sucesión exacta corta de los correspondientes complejos resolución

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{A}' \xrightarrow{g} \mathfrak{A}'' \rightarrow \{0\}.$$

Si se dualiza esta sucesión y se toma la correspondiente sucesión exacta larga a nivel de homología, se obtiene el resultado pedido.  $\square$

**Proposición 24.6.** *Sea  $R$  un grupo abeliano. Sea  $\mathfrak{C}$  un complejo de cadenas, con grupos de cadenas  $C_n(\mathfrak{C})$  libres, y sea  $\mathfrak{C}^* = \text{Hom}(\mathfrak{C}, R)$  su complejo dual. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\{0\} \rightarrow \text{Ext}\left(H_{n-1}(\mathfrak{C}), R\right) \rightarrow H^n(\mathfrak{C}^*) \rightarrow \text{Hom}\left(H_n(\mathfrak{C}), R\right) \rightarrow \{0\}.$$

*Proof.* Utilizamos la sucesión exacta

$$\{0\} \rightarrow Z_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{i} C_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(\mathfrak{C}) \rightarrow \{0\},$$

la que podemos dualizar para obtener la sucesión

$$\{0\} \rightarrow B_{n-1}(\mathfrak{C})^* \xrightarrow{\partial^*} C_n(\mathfrak{C})^* \xrightarrow{i^*} Z_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow \{0\},$$

la que es exacta, dado que todos los grupos involucrados son libres. Convertimos esta última en una sucesión exacta corta de complejos de co-cadenas

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{B}_-^* \rightarrow \mathfrak{C}^* \rightarrow \mathfrak{Z}^* \rightarrow \{0\},$$

en el que ambos extremos tienen homomorfismos borde triviales. El subíndice de la derecha implica que el grupo de  $n$ -cadenas de  $\mathfrak{B}_-^*$  es  $B_{n-1}(\mathfrak{C})^*$ . La correspondiente sucesión exacta larga de grupos de cohomología nos da

$$\dots \rightarrow Z_{n-1}^* \rightarrow B_{n-1}^* \rightarrow H^n(\mathfrak{C}^*) \rightarrow Z_n^* \rightarrow B_n^* \rightarrow \dots,$$

en la que el lector puede comprobar fácilmente que el morfismo borde  $Z_n^* \rightarrow B_n^*$  es la restricción. En particular, se tiene una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \text{coker}\left(Z_{n-1}^* \rightarrow B_{n-1}^*\right) \rightarrow H^n(\mathfrak{C}^*) \rightarrow \ker\left(Z_n^* \rightarrow B_n^*\right) \rightarrow \{0\}.$$

Basta ahora identificar el núcleo y el conúcleo en la sucesión precedente. Para ello tomamos la sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow B_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{i} Z_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{p} H_n(\mathfrak{C}) \rightarrow \{0\},$$

para obtener, aplicando el lema precedente, la sucesión

$$\{0\} \rightarrow H_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow Z_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow B_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow \text{Ext}(H_n(\mathfrak{C}), R) \rightarrow \{0\},$$

de donde se concluye lo pedido.  $\square$

**Observación 24.7.** Puede probarse que esta sucesión exacta se descompone, es decir, se tiene

$$H^n(\mathfrak{C}^*) \cong \text{Ext}(H_{n-1}(\mathfrak{C}), R) \oplus \text{Hom}(H_n(\mathfrak{C}), R),$$

pero este último homomorfismo no tiene buenas propiedades functoriales. No es natural, en el sentido de teoría de categorías.

**ejemplo 24.8.** Si  $X$  es el Toro, todos los grupos de homología singular son libres, por lo que se tiene  $H_{\text{sing.}}^n(X; \mathbb{Z}) \cong H_n^{\text{sing.}}(X)$  para cada  $n$ .

**ejemplo 24.9.** Si  $X$  es el plano proyectivo, se tiene  $H_0^{\text{sing.}}(X) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1^{\text{sing.}}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y  $H_2^{\text{sing.}}(X) \cong \{0\}$ . Concluimos que  $H_{\text{sing.}}^0(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_{\text{sing.}}^1(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ , mientras que  $H_{\text{sing.}}^2(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ . Para calcular este último grupo utilizamos la resolución

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \{0\},$$

donde  $f$  es la multiplicación por 2. Esto nos dice que  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  es el conúcleo de la función dual  $f'$ , la que es esencialmente  $f$ , por lo que el conúcleo es  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Esto nos dice que la 2-cohomología del plano proyectivo, a diferencia de su homología, no es trivial.

El resultado precedente apoya la idea de que el concepto de grupo de cohomología no aporta información adicional al estudio de grupos topológicos. En lo que sigue probaremos que esto no es así. Definiremos a continuación el concepto de anillo de cohomología. Una estructura que sólo puede definirse ocasionalmente a nivel de homología, pero que nos aporta una herramienta adicional para distinguir espacios topológicos cuyos grupos de homología coinciden. Este *cup-producto*, se define a nivel de co-cadenas singulares mediante la fórmula

$$(\phi \cup \psi)(\sigma) = \phi(\sigma \circ |[e_0, \dots, e_k]|) \psi(\sigma \circ |[e_k, \dots, e_{k+m}]|),$$



para cada  $(k+m)$ -símplice singular  $\sigma$ , cada  $k$ -cocadena  $\phi$  y cada  $m$ -cocadena  $\psi$ . Para que esta definición tenga sentido, es necesario que trabajemos con grupo de cohomología de la forma  $H_{\text{sing.}}^n(X; R)$ , donde  $R$  es un anillo. A fin de probar que esta definición entrega la estructura correcta, necesitamos el siguiente resultado:

**Proposición 24.10.** *Para cada  $k$ -cocadena  $\phi$  y cada  $m$ -cocadena  $\psi$ , se tiene la relación*

$$\delta(\phi \cup \psi) = (\delta\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\delta\psi).$$

*Proof.* Este es un cálculo sencillo utilizando las fórmulas que se utilizan para calcular el borde de un símplice afín. Para cada  $(k+m+1)$ -símplice singular  $\sigma$ , se tiene

$$\begin{aligned} \delta(\phi \cup \psi)(\sigma) &= (\phi \cup \psi)(\partial\sigma) \\ &= \sum_{r=0}^{k+m+1} (-1)^r (\phi \cup \psi) \left( \sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \phi \left( \sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+1}]| \right) \psi \left( \sigma \circ |[e_{k+1}, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\ &\quad + \sum_{r=k+1}^{k+m+1} (-1)^r \phi \left( \sigma \circ |[e_0, \dots, e_k]| \right) \psi \left( \sigma \circ |[e_k, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \phi \left( \sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+1}]| \right) \psi \left( \sigma \circ |[e_{k+1}, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\ &\quad + \sum_{r=k}^{k+m+1} (-1)^r \phi \left( \sigma \circ |[e_0, \dots, e_k]| \right) \psi \left( \sigma \circ |[e_k, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\ &= \left[ (\delta\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\delta\psi) \right](\sigma), \end{aligned}$$

donde, en el penúltimo paso, es fácil ver que los dos nuevos términos agregados a las sumas difieren sólo en el signo.  $\square$

**Proposición 24.11.** *El cup-producto de dos co-ciclos es un co-ciclo. Si  $\phi$  es un cociclo y  $\psi$  es un coborde, entonces  $\phi \cup \psi$  es un coborde.*

*Proof.* La primera afirmación se prueba con un cálculo directo. De hecho, si  $\phi$  y  $\psi$  son cociclos, se tiene

$$\delta(\phi \cup \psi) = (\delta\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\delta\psi) = 0 \cup \psi + (-1)^k \phi \cup 0 = 0.$$

Para la segunda afirmación, notamos que si  $\psi = \delta\eta$ , entonces

$$\delta(\phi \cup \eta) = (\delta\phi) \cup \eta + (-1)^k \phi \cup (\delta\eta) = (-1)^k \phi \cup \psi.$$

□

Se concluye de lo anterior que el cup-producto está bien definido a nivel de clases cohomología singular. Nótese que estas fórmulas no funcionan para la cohomología simplicial, dado que las fórmulas que hemos dado aquí no son invariantes al permutar los vértices de un símlice, por lo que el cup-producto no está bien definido, ni siquiera a nivel de cocadenas simpliciales.

**Lema 24.12.** *Para cada entero  $n$ , sea  $f_n : C_n^{\text{Sing.}}(X; R) \rightarrow C_n^{\text{Sing.}}(X; R)$  el homomorfismo que lleva a cada símlice singular  $\sigma$  en la cadena*

$$\bar{\sigma} = (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ [[e_n, \dots, e_0]].$$

*La familia de funciones  $\{f_n\}_n$  definen una función de cadenas  $f$ , de  $\mathfrak{C}^{\text{Sing.}}(X; R)$  a si mismo que es homotópico a la identidad.*

*Proof.* Para probar que es una función de cadenas basta ver que conmuta con el operador borde, lo que sale del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \partial\bar{\sigma} &= (-1)^{n(n+1)/2} \sigma_* (\partial[[e_n, \dots, e_0]]) \\ &= (-1)^{n(n+1)/2} \sigma_* \left( \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} [[e_n, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_0]] \right) \\ &= (-1)^{n(n+1)/2} \sigma_* \left( \sum_{i=0}^n (-1)^{i-n} [[e_n, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_0]] \right) \\ &= (-1)^{n(n+1)/2-n} \sigma_* \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i [[e_n, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_0]] \right) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} \sigma_* \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i [[e_n, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_0]] \right) = f_{n-1}(\partial\sigma). \end{aligned}$$

Para probar que es homotópica a la identidad, ponemos  $\epsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ , y luego definimos la homotipía siguiente:

$$P\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_i, e_n, \dots, e_i]|.$$

Nótese que se tiene una  $(n+1)$ -cadena ya que el vértice  $e_i$  está repetido. A continuación calculamos el borde:

$$\begin{aligned} \partial(P\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_i, e_n, \dots, e_i]| \\ &+ \sum_{j \leq i} (-1)^{2i+n+1-j} \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_i, e_n, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_i]|. \end{aligned}$$

En el último término, el vértice  $e_j$  está en la posición  $(i+1) + (n-j+1) = (i+n+1-j) + 1$ , de donde se calcula el exponente correspondiente. A continuación calculamos  $P(\partial\sigma)$ .

$$\begin{aligned} P(\partial\sigma) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j P\left(\sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]|\right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_i, e_n, \dots, e_i]| \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^{i+j} \epsilon_{n-1-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_i, e_n, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_i]|, \end{aligned}$$

donde aplicamos la observación de que, en la primera suma, el término repetido se encuentra en la posición  $i-1$ , por lo que el coeficiente que aparece allí es  $\epsilon_{(n-1)-(i-1)} = \epsilon_{n-i}$ . Si observamos que  $\epsilon_{n-i-1} = (-1)^{n-i} \epsilon_{n-i}$ , se concluye que todos los términos de la expresión  $(P\partial + \partial P)(\sigma)$  se cancelan, excepto los que corresponden a  $i = J$ . En otras palabras, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (P\partial + \partial P)(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{2i} \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\ &+ \sum_{i=0}^n (-1)^{n+1+i} \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_i, e_n, \dots, e_{i+1}]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i} \epsilon_{n-i+1} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\
&= \sum_{i=0}^n \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i} (-1)^{n-i+1} \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\
&= \sum_{i=0}^n \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1) \epsilon_{n-i} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_{i-1}, e_n, \dots, e_i]| \\
&= \epsilon_n \sigma \circ |[e_n, \dots, e_0]| - \epsilon_{-1} \sigma \circ |[e_0, \dots, e_n]|.
\end{aligned}$$

Ahora el resultado sigue observando que  $\epsilon_{-1} = (-1)^0 = 1$ .  $\square$

**Proposición 24.13.** *Si  $R$  es un anillo conmutativo, el cup-producto tiene la propiedad*

$$a \cup b = (-1)^{nm} b \cup a,$$

si  $a \in H^n(X; R)$  y  $b \in H^m(X; R)$

*Proof.* Es inmediato de la definición, y del resultado precedente, que, para cada par de co-ciclos  $\phi, \psi$ , y para todo  $(n+m)$ -símplice singular  $\sigma$ , se tiene la identidad

$$\begin{aligned}
(\phi \cap \psi)(\bar{\sigma}) &= \epsilon_{n+m} \phi \left( \sigma \circ |[e_{n+m}, \dots, e_m]| \right) \psi \left( \sigma \circ |[e_m, \dots, e_0]| \right) \\
&= \epsilon_{n+m} \psi \left( \sigma \circ |[e_m, \dots, e_0]| \right) \phi \left( \sigma \circ |[e_{n+m}, \dots, e_m]| \right) \\
&= \epsilon_{n+m} \epsilon_n \epsilon_m \psi \left( \overline{\sigma \circ |[e_0, \dots, e_m]|} \right) \phi \left( \overline{\sigma \circ |[e_m, \dots, e_{n+m}]|} \right).
\end{aligned}$$

Si denotamos por  $\bar{\phi}$  el homomorfismo definido por  $\bar{\phi}(\sigma) = \phi(\bar{\sigma})$ , entonces la relación precedente se lee así:

$$\overline{\phi \cap \psi} = \epsilon_{n+m} \epsilon_n \epsilon_m (\bar{\phi} \cup \bar{\psi}).$$

El cálculo

$$\frac{(n+m)(n+m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = nm$$

$$+ 2 \left( \frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \right),$$

nos muestra que  $\epsilon_{n+m}\epsilon_n\epsilon_m = (-1)^{mn}$ . El resultado sigue ahora al observar que la función de co-cadenas  $\phi \mapsto \bar{\phi}$  es homotópica a la identidad por ser el dual de la función de cadenas  $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ .  $\square$

### La Fórmula de Künneth:

En esta sección se requiere conocer las propiedades del functor Tor, por lo que sugerimos que el lector desarrolle los ejercicios 1 y 2 del capítulo antes de proseguir.

Consideremos dos complejos de cadenas  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{D}$ . Definimos un tercer complejo  $\mathfrak{C}$  de modo que su grupo de  $n$ -cadenas esté definido por

$$C_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} D_j,$$

y su operador borde mediante

$$\partial(x \otimes y) = (\partial x) \otimes y + (-1)^i x \otimes (\partial y),$$

si  $x \in A_i$  e  $y \in D_j$ . La comprobación de que esto define efectivamente un complejo de cadenas es la siguiente:

$$\partial^2(x \otimes y) = \partial \left( (\partial x) \otimes y + (-1)^i x \otimes (\partial y) \right) = (\partial^2 x) \otimes y$$

$$+ (-1)^{i+1} (\partial x) \otimes (\partial y) + (-1)^i (\partial x) \otimes (\partial y) + (-1)^{2i} x \otimes (\partial^2 y) = 0.$$

Nótese que el signo en el segundo término de la definición de borde es necesario para que los términos centrales se cancelen en el cálculo presedente. Tiene sentido, por lo tanto, hablar de la cohomología del complejo  $\mathfrak{C}$ . Este complejo se denota a menudo como  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{D}$ . El siguiente resultado, conocido como la Fórmula de Künneth algebraica, nos permite calcular su homología:

**Proposición 24.14.** *En las notaciones anteriores, si los grupos de cadenas del complejo  $\mathfrak{D}$  son libres, entonces existe una sucesión exacta*

$$\{0\} \rightarrow \sum_{i+j=n} H_i(\mathfrak{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_j(\mathfrak{D}) \rightarrow H_n(\mathfrak{C}) \rightarrow \sum_{i+j=n-1} \text{Tor}(H_i(\mathfrak{A}), H_j(\mathfrak{D})) \rightarrow \{0\}.$$

*Proof.* Supongamos primero que los operadores borde del complejo  $\mathfrak{D}$  son triviales. En este caso, el complejo producto  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{D}$  puede concebirse como suma directa de copias del complejo  $\mathfrak{A}$  con sus dimensiones desplazadas. Para cada generador  $b$  del grupo  $D_j$ , se considera un sumando  $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{Z}d$ , lo que equivale a remplazar el grupo  $A_i$  de  $i$ -cadenas por el grupo  $A_i \otimes \mathbb{Z}d$  de  $(i+j)$ -cadenas. En este caso el operador borde es  $\partial(a \otimes d) = (\partial a) \otimes d$ , por lo que la homología se puede calcular sumando a sumando y se obtiene lo pedido, ya que no hay factores Tor en este caso.

Volviendo al caso general, consideramos la sucesión exacta

$$\{0\} \rightarrow Z_j(\mathfrak{D}) \xrightarrow{i} D_j \xrightarrow{\partial} B_{j-1}(\mathfrak{D}) \rightarrow \{0\},$$

la que se descompone, dado que todos los grupos involucrados son libres. Esta sucesión puede tensorizarse con  $A_i$  y sumar para obtener una sucesión exacta de complejos

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{B}_- \rightarrow \{0\}.$$

Nótese que el complejo central es  $\mathfrak{C}$ . La correspondiente sucesión exacta larga de grupos de cohomología nos da

$$\bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} B_j \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} Z_j \rightarrow H_n(\mathfrak{C}) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} B_j \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} Z_j.$$

Escribiendo  $\text{Cok}_n$  y  $\text{Ke}_n$  para el conúcleo y el núcleo de la función

$$\bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} B_j \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} Z_j,$$

obtenemos una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \text{Cok}_n \rightarrow H^n(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Ke}_{n-1} \rightarrow \{0\}.$$

Queda por identificar estos factores. Para ello tomamos la sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow B_j(\mathfrak{D}) \xrightarrow{i} Z_j(\mathfrak{D}) \xrightarrow{p} H_j(\mathfrak{D}) \rightarrow \{0\},$$

donde  $i$  es la inclusión canónica y  $p$  es la proyección. De aquí puede deducirse

la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & \text{Tor}\left(H_i(\mathfrak{A}), H_j(\mathfrak{D})\right) & \longrightarrow & H_i(\mathfrak{A}) \otimes B_j(\mathfrak{D}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{---} i \text{---} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_i(\mathfrak{A}) \otimes Z_j(\mathfrak{D}) & \xrightarrow{p} & H_i(\mathfrak{A}) \otimes H_j(\mathfrak{D}) \longrightarrow \{0\},
 \end{array}$$

usando el hecho de que el functor Tor tiene las propiedades análogas a los Lemas 24.3-5, como el lector comprobará al realizar el ejercicio 1 de este capítulo. El resultado sigue.  $\square$

**ejemplo 24.15.** Si  $\mathfrak{A}$  es el complejo que tiene al grupo abeliano  $R$  como grupo de 0 cadenas, y tiene grupos de cadenas nulos en cualquier otra dimensión, el resultado precedente nos entrega la sucesión exacta

$$\{0\} \rightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} H_j(\mathfrak{D}) \rightarrow H_n(R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{D}) \rightarrow \text{Tor}\left(R, H_j(\mathfrak{D})\right) \rightarrow \{0\},$$

el que se conoce como teorema de los coeficientes universales para homología.

Si pudiésemos interpretar la cohomología de un espacio producto como un producto tensorial de los complejos correspondientes a los espacios factores podríamos utilizar la Fórmula de Künneth algebraica para calcular la homología de un espacio producto. En lo que queda de este capítulo realizaremos esto para productos de CW-complejos, utilizando homología celular.

Para poder trabajar con la homología celular cómodamente, la interpretaremos utilizando  $n$ -cubos en vez de  $n$ -esferas. Construiremos un complejo de celdas  $X$  definiendo  $X^{(0)}$  como un conjunto finito y, sucesivamente, agregando una familia de  $n$ -cubos homeomorfos a  $I^n$ , con  $I = [0, 1]$ , que se pegan por el borde al espacio  $X^{(n-1)}$  para formar  $X^{(n)}$ . Esta construcción es completamente equivalente, desde el punto de vista teórico, a la versión con esferas, dado que el  $n$ -cubo es homeomorfo a la  $n$ -esfera. Pero es relativamente sencillo identificar el  $(n + m)$ -cubo  $I^{n+m}$  con el producto  $I^n \times I^m$ . El producto cartesiano  $a \times b$ , de una celda  $a$  del complejo  $X$  y una celda  $b$  del complejo  $Y$ , puede identificarse así con una celda del complejo producto  $X \times Y$ . Esto define una función bilineal

$$\beta : H_n^{\text{Cel.}}(X) \times H_m^{\text{Cel.}}(Y) \rightarrow H_{n+m}^{\text{Cel.}}(X \times Y)$$

que denotaremos  $(c, d) \mapsto c \times d$ .

Necesitamos poder calcular el borde de una celda. Para esto trabajamos primero con la celda estándar  $I^n$ . Nótese que la estructura de complejo de celdas de  $I^1$  se obtiene poniendo un vértice en cada extremo y una única 1-celda entre estos extremos, por lo que  $\partial I^1 = [1] - [0]$ . La estructura de  $I^n$  se obtiene como producto de la anterior, por lo que no es difícil ver que

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i I^{i-1} \times (\partial I) \times I^{n-i},$$

para alguna elección de los signos  $\epsilon_i$ , dado que esta expresión contiene precisamente aquellas celdas de dimensión maximal que conforman el borde de la celda. Sólo se necesita determinar los signos. Nótese que intercambiar dos coordenadas invierte las orientaciones, dado que ello equivale a multiplicar por una matriz conjugada a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que los signos  $\epsilon_i$  se alternan, por lo que basta con determinar uno de ellos. Consideremos, pues, el primero, es decir

$$(\partial I) \times I^{n-1} = [1] \times I^{n-1} - [0] \times I^{n-1}.$$

Nótese que el símlice  $[0, e_1, \dots, e_n]$  tiene una orientación compatible con la de  $I^n$ , y el símlice  $[0, e_2, \dots, e_n]$ , cuya orientación es compatible con la de la celda  $[0] \times I^{n-1}$ , tiene signo negativo en su borde. Concluimos que  $(\partial I) \times I^{n-1}$  debe tener un signo positivo en la expresión para el borde de  $\partial I^n$ . Esto nos da la fórmula

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} I^{i-1} \times (\partial I) \times I^{n-i}.$$

Si se identifica  $I^{n+m}$  con  $I^n \times I^m$ , como antes, la fórmula anterior implica la relación  $\partial(I^n \times I^m) = (\partial I^n) \times I^m + (-1)^n I^n \times (\partial I^m)$ . Nos gustaría generalizar esta identidad a celdas arbitrarias. Para esto recordamos la definición



del borde de una celda en homología celular. Si  $D$  denota una  $n$ -celda, la expresión

$$\partial D = \sum_{D'} m_{D'} D',$$

donde  $D'$  recorre el conjunto de  $(n-1)$ -celdas, nos dice que  $m_{D'}$  es el grado de la función que va del borde de  $D$ , identificado con  $S^{n-1}$  en el cociente

$$X^{(n-1)} / \left( X^{(n-1)} \setminus \text{int}(D') \right),$$

también identificado con  $S^{n-1}$ . Asumamos que  $D = D_1 \times D_2$ , donde  $D$  es la celda descrita antes,  $D_1$  es una  $n$ -celda de  $X$  y  $D_2$  es una  $m$ -celda de  $Y$ . En este caso, el borde de  $D$  debe estar contenido en

$$(X \times Y)^{(n+m-1)} = (X^{(n-1)} \times Y^{(m)}) \cup (X^{(n)} \times Y^{(m-1)}).$$

Sea  $D'$  una celda en  $X^{(n-1)} \times Y^{(m)}$ . Entonces  $D' = D'_1 \times D'_2$ , donde  $D'_1$  es una  $(n-1)$ -celda de  $X$  y  $D'_2$  es una  $m$ -celda de  $Y$ . Al considerar la suma  $(\partial I^n) \times I^m + (-1)^n I^n \times (\partial I^m)$ , cada celda que aparece en el segundo sumando tiene imagen contenida en  $X^{(n)} \times Y^{(m-1)}$ , por lo que puede ignorarse al calcular  $m_{D'}$ . Del mismo modo, el coeficiente  $m_{D'}$  se anulará salvo si  $D'_2 = D_2$ . Se sigue que determinar el coeficiente  $m_{D'}$  es equivalente a determinar el coeficiente de  $D'_1$  en  $\partial D_1$ . El argumento para celdas contenidas en  $X^{(n)} \times Y^{(m-1)}$  es similar. se concluye que

$$\mathfrak{C}^{\text{Cel.}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{C}^{\text{Cel.}}(Y) \cong \mathfrak{C}^{\text{Cel.}}(X \times Y)$$

como complejos de cadenas, por lo que puede aplicarse la Fórmula de Künneth Algebraica para obtener el resultado siguiente:

**Proposición 24.16.** *Si  $X$  e  $Y$  son CW complejos, entonces se tiene una sucesión exacta*

$$\{0\} \rightarrow \sum_{i+j=n} H_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_j(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \sum_{i+j=n-1} \text{Tor}(H_i(X), H_j(Y)) \rightarrow \{0\},$$

en la que todos los grupos de homología considerados son grupos de homología celular.  $\square$

**Ejercicios:**

1. Defina el grupo abeliano  $\text{Tor}(A, B)$  como el núcleo de  $K \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}} B$  para una resolución proyectiva  $K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow A$  de  $A$ . Demuestre los análogos de los lemas 25.3 y 25.5 para el functor  $A \mapsto \text{Tor}(A, B)$ .
2. Demuestre que si  $B$  es un grupo libre entonces  $\text{Tor}(A, B) = \{0\}$  para todo grupo abeliano  $A$ . Pruebe con un ejemplo que  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$  puede ser no trivial.
3. Calcule  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  y  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  para enteros  $n$  y  $m$  cualesquiera.
4. Utilice el anillo de cohomología para probar que el toro no es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene al pegar, por un punto, una esfera y una figura 8.

## Chapter 25

# Tensores y Formas diferenciales.

En este capítulo introduciremos algunas generalizaciones del concepto de campo vectorial que dimos en el capítulo 5. Para esto introduciremos el concepto de fibrado vectorial para luego definir el concepto de sección del fibrado, que generaliza la idea de campo vectorial. El concepto de tensor puede definirse como una sección de un producto tensorial de algunas copias del fibrado tangente y de su dual, lo que lo convierte en un caso particular del concepto anterior. La construcción del dual del fibrado tangente, también llamado el fibrado cotangente, requiere de una de las siguientes nociones:

1. El pegado de variedades.
2. El cociente de un fibrado por otro.

Cualquiera de estas nociones requiere de la definición de espacio topológico cociente, lo que está más allá de los límites de estas notas. Por esta razón preferimos utilizar una definición alternativa de un tensor como una función lineal que satisface una condición de localidad. En la tercera sección introducimos el concepto de forma diferencial como un tensor contravariante alternante. Esto limita las dificultades teóricas de estudiar el fibrado cotangente, al coste de requerir algo más de trabajo para demostrar que estos objetos tienen la interpretación que uno espera, ya que carecen de la interpretación como secciones. Este es un problema técnico que no tendrá mayores repercusiones en lo que sigue.

### Fibrados vectoriales

Un fibrado vectorial, sobre una variedad  $S$ , es una variedad  $E$  junto con una submersión  $\pi : E \rightarrow S$  que satisface las propiedades siguientes:

1. Para cada punto  $s \in S$ , la preimagen  $E_s = \pi^{-1}(s)$ , también llamada la fibra en  $s$ , tiene una estructura de espacio vectorial real, con una suma vectorial y una multiplicación escalar.
2. El producto escalar  $p : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$  es una función diferenciable.
3. Sea  $E \times_S E = \{(e, e') \in E \times E \mid \pi(e) = \pi(e')\}$ . La función suma  $\sigma : E \times_S E \rightarrow E$  definida por  $\sigma(e, e') = e + e'$  es diferenciable.
4. Para cada punto  $s \in S$  existe una vecindad  $V$  de  $s$  en  $S$  y un difeomorfismo  $\psi_s : V \times E_s \rightarrow \pi^{-1}(V)$  tal que  $\pi \circ \psi_s = \pi_1$  es la proyección en la primera coordenada.

La variedad  $E \times_S E$  mencionada arriba recibe el nombre de producto fibrado de  $E$  consigo mismo. La última condición es referida a menudo como la condición de trivialidad local. Con frecuencia diremos “Sea  $\pi : E \rightarrow S$  un fibrado vectorial” para enfatizar el papel jugado por la proyección  $\pi$  o la variedad  $S$ .

**ejemplo 25.1.** Para todo espacio vectorial real  $F$  podemos definir el fibrado trivial  $F \times S$ .

**ejemplo 25.2.** El fibrado tangente definido en el Capítulo 5 es un ejemplo de fibrado vectorial.

**ejemplo 25.3.** Sea  $S$  una superficie en el espacio. Considerese el conjunto  $N = \{(s, \vec{v}) \in S \times \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \in \langle \vec{n}(s) \rangle^\perp\}$ , donde  $\vec{n}(s)$  denota un vector normal a la superficie en el punto  $s$ . Así definido,  $E$  es un fibrado vectorial llamado el fibrado normal de la superficie.

**ejemplo 25.4.** Mas generalmente, para cualquier variedad  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  podemos definir el fibrado normal como el conjunto

$$N = \{(s, \vec{v}) \in M \times \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \in (T_s M)^\perp\},$$

donde  $F^\perp$  denota el complemento ortogonal de un subespacio  $F$ .

**ejemplo 25.5.** Para cualquier par de fibrados vectoriales  $\pi : E \rightarrow S$  y  $\pi' : E' \rightarrow S$  sobre la misma variedad, el producto fibrado  $E \times_S E' = \{(e, e') \in E \times E \mid \pi(e) = \pi'(e')\}$  es también un fibrado vectorial sobre  $S$ . A menudo se lo llama la suma directa de los fibrados  $E$  y  $E'$  y se lo denota como  $E \oplus_S E'$ .

Un morfismo entre dos fibrados  $\pi : E \rightarrow S$  y  $\pi' : E' \rightarrow S$  es una función diferenciable  $\psi : E \rightarrow E'$  que satisface la relación  $\pi' \circ \psi = \pi$ . Esto a menudo se expresa diciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & E' \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

conmuta. Cuando  $\psi$  es una inclusión diremos que  $E$  es un subfibrado de  $E'$ . Si  $\psi$  es, además, un difeomorfismo, diremos que es un isomorfismo de fibrados. En este caso su inversa es también un morfismo de fibrados.

**ejemplo 25.6.** No todo fibrado vectorial es isomorfo a un producto directo no trivial de fibrados vectoriales. Cuando esto ocurre diremos que el fibrado es descomponible. El fibrado tangente en la esfera no es descomponible. Una idea de la demostración de esta afirmación se dará más adelante.

Recordemos que para todo espacio vectorial real  $F$  de dimensión finita, con base  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ , el producto tensorial  $F^{\otimes r}$  es un espacio vectorial con base  $\{\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \mid i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}\}$ . Sea ahora  $E$  un fibrado vectorial contenido en un fibrado trivial  $F \times S$ . Entonces podemos definir  $E^{\otimes r}$  como el conjunto de los pares  $(s, \tau)$  en  $S \times F^{\otimes r}$  para los cuales  $\tau \in E_s^{\otimes r} \subseteq F^{\otimes r}$ . Esta definición se aplica en particular al fibrado tangente, el que por definición está contenido en un fibrado trivial. Esto nos permite definir fibrados vectoriales  $(TS)^{\otimes r}$  para cada  $r$ . Estos fibrados juegan un papel crucial en la definición de tensores de la sección siguiente.

Una sección de un fibrado vectorial  $\pi : E \rightarrow S$  es una función continua  $\sigma : S \rightarrow E$  para la cual  $\pi \circ \sigma = \text{Id}_S$  es la identidad en  $S$ . En particular, si  $P$  es un punto arbitrario de  $S$ , la imagen  $\sigma(P)$  es un elemento del espacio vectorial  $E_P$ . Es posible, por lo tanto sumar secciones, o multiplicar una sección por una función a valores escalares. Para un fibrado trivial  $E = S \times F$ , las secciones son funciones de la forma  $s \mapsto (s, f(s))$  donde  $f$  es una función diferenciable arbitraria de  $S$  al espacio vectorial  $F$ . Se sigue que, si  $F$  tiene

dimensión  $n$ , existen  $n$  secciones constantes cuyas imágenes constituyen una base del espacio  $F$ . En particular, existen  $n$  secciones  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  para las cuales el conjunto  $\{\sigma_1(P), \dots, \sigma_n(P)\}$  es una base de la fibra  $E_P$  para cada  $P$ . Esto sucede localmente para cualquier fibrado vectorial, pero no siempre globalmente. De hecho, si existen tales secciones, la función

$$\left( P, \sum_i a_i \vec{e}_i \right) \mapsto \sum_i a_i \vec{\sigma}_i(P)$$

define un isomorfismo entre  $S \times \mathbb{R}^n$  y  $E$ , por lo que la existencia de dichas secciones nos dá una condición necesaria y suficiente para que el fibrado sea trivial.

**ejemplo 25.7.** El fibrado tangente al círculo es trivial, ya que la imagen del único vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^1$  bajo la derivada de la función exponencial  $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  es no nulo en cada punto.

**ejemplo 25.8.** Para toda superficie incrustada cerrada que acota una región del espacio, el vector normal unitario exterior está bien definido y no se anula en ningún punto, por lo que el fibrado normal a tal superficie es trivial.

**ejemplo 25.9.** Un fibrado vectorial de dimensión uno en el disco  $D$  es siempre trivial. Para comprobar esto debe demostrarse la existencia de una sección no nula. Esto puede hacerse utilizando el procedimiento de agregar cuadraditos que se muestra en la Figura 8.4, asumiendo que el fibrado es trivial en cada cuadradito  $X$ , es decir  $\pi^{-1}(X) \cong X \times \mathbb{R}$ . Basta ver que si ya se ha definido una sección no nula en la zona azul, esta puede extenderse al cuadrado naranja dado que la intersección de este último con la zona azul es conexa y por lo tanto la sección tiene signo constante allí.

**ejemplo 25.10.** Un fibrado de dimensión uno en la esfera debe ser trivial en cada hemisferio por el ejemplo precedente. En particular existe una sección no nula en cada hemisferio. Este fibrado es también constante en el ecuador, y las secciones de cada hemisferio deben tener signo constante allí. Multiplicando una de estas secciones por una función de signo constante se puede asumir que son iguales en el ecuador. Esto permite definir una sección continua en toda la esfera. Refinando un poco este argumento puede obtenerse, de hecho una sección diferenciable. Esto prueba que todo fibrado vectorial de dimensión uno sobre la esfera es trivial.

**ejemplo 25.11.** Existe un fibrado no trivial  $\pi : E \rightarrow S^1$  donde  $E$  es homeomorfo a la banda de Moebius sin borde. Para visualizar esto consideremos una banda de Moebius hecha con un rectángulo de cartón pegando los extremos como la que se observa en la Figura 9.1. Identificamos el rectángulo con  $[-1, 1] \times (-1, 1)$ , es decir, el rectángulo incluye los bordes laterales, pero no los extremos superior e inferior. Consideramos ahora un difeomorfismo

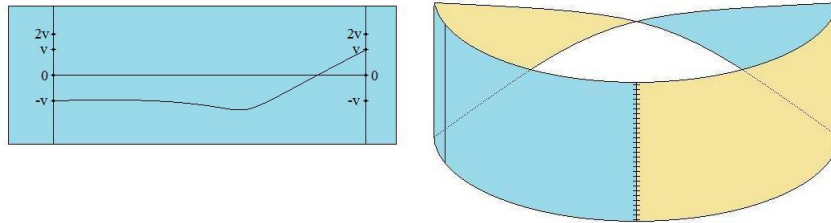


Figure 25.1: Un fibrado vectorial no trivial en el círculo.

del intervalo abierto  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , que podemos escoger impar. Identificamos cada línea horizontal del rectángulo con este intervalo, y usamos el difeomorfismo para darle una estructura de espacio vectorial. En otras palabras, cada línea vertical del rectángulo es un espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación escalar siguientes:

$$(s, t) \oplus (s, t') = \left( s, f^{-1}(f(t) + f(t')) \right), \quad \lambda * (s, t) = \left( s, f^{-1}(\lambda f(t)) \right).$$

En el dibujo, las imágenes de los múltiplos de un vector se acumulan cerca del borde, pero necesitamos esto para visualizar este fibrado en  $\mathbb{R}^3$ . Realizamos ahora un "Pegado" de los bordes laterales del rectángulo identificando los elementos  $(-1, r)$  y  $(1, -r)$ . Como la función  $f$  es impar, esta identificación respeta la estructura de espacio vectorial de las fibras extremas. Dejamos al lector la tarea de convencerse de la banda de Moebius así construida es efectivamente un fibrado vectorial (Hay que comprobar la trivialidad local en el punto de pegado). Tomemos una sección cualquiera de este fibrado y volvamos ahora a abrir el rectángulo. La continuidad de la sección implica que, por fuerza, la imagen está sobre el cero en un extremo del rectángulo y por debajo del cero en el otro. Necesariamente debe valer 0 en algún punto

del rectángulo. Concluimos que cualquier sección de este fibrado tiene un cero, por lo que el fibrado es no trivial.

**ejemplo 25.12.** Es posible probar que cada campo vectorial en la esfera se anula en algún punto, por lo que el fibrado tangente en la esfera no es trivial. Más aún, el fibrado tangente en la esfera no puede contener un subfibrado trivial de dimensión 1. Como el fibrado trivial es el único fibrado de dimensión uno sobre la esfera, debemos concluir que el fibrado tangente es indescomponible.

### Ejercicios

1. Refine el argumento del ejercicio 9.10 para comprobar que efectivamente la "sección" allí construida puede escogerse diferenciable.
2. Compruebe la condición de trivialidad local para el fibrado construido en el Ejemplo 9.11.
3. Muestre que todo fibrado sobre  $\mathbb{R}$  es trivial.
4. Probar que existen fibrados vectoriales no triviales de dimensión uno sobre el toro.
5. Muestre que si el fibrado tangente a una superficie contiene un subfibrado de dimensión uno, entonces es descomponible.
6. Una variedad se dice simplemente conexa si toda curva cerrada es el borde de un disco (el que puede suponerse que es una variedad incrustada cuando la curva es diferenciable). Muestre que todo fibrado de dimensión uno sobre una variedad simplemente conexa es trivial.

### Tensores

Definimos por conveniencia  $(TS)^{\otimes 0}$  como el fibrado trivial  $S \times \mathbb{R}$  de dimensión 1. Nótese que las secciones de este fibrado se identifican con las funciones diferenciables a valores reales en  $S$ . Un tensor de tipo  $(r, s)$ , en una superficie  $S$ , es un morfismo de fibrados vectoriales  $\tau : (TS)^{\otimes r} \rightarrow (TS)^{\otimes s}$ . Para cada punto  $P$  de  $S$ , esta función induce una función lineal  $\tau(P) : (T_P S)^{\otimes r} \rightarrow (T_P S)^{\otimes s}$ , por lo que se identifica con un elemento del producto tensorial  $(T_P S)^{\otimes s} \otimes [(T_P S)^*]^{\otimes r}$ , donde  $F^*$  denota el dual del espacio vectorial  $F$ . Este último elemento recibe el nombre de *valor en  $P$  del tensor  $\tau$* .



Moralmente, un tensor se comporta como una sección de un fibrado vectorial  $(TS)^{\otimes s} \otimes [(TS)^*]^{\otimes r}$ , y de hecho este es el caso, pero es difícil definir formalmente este fibrado sin recurrir a una noción de pegado o de cociente, como mencionamos al comienzo del capítulo. El obstáculo que encontramos aquí es que, a diferencia de  $(TS)^{\otimes s}$ , el que podemos definir como un subfibrado del fibrado tangente del espacio ambiente, el que es trivial, el fibrado  $(TS)^*$ , también llamado el fibrado cotangente, tiene naturalmente la estructura de un cociente del fibrado cotangente en el espacio ambiente, lo que nos dificulta su definición teórica a este nivel. Sin embargo, la definición dada más arriba es útil para la mayoría de las aplicaciones.

Considerese un mapa, es decir un sistema de coordenadas en una región de la variedad, descrito en la forma

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \vec{x} (u_1, \dots, u_n).$$

Denotemos, por comodidad, las derivadas de esta función con respecto a las coordenadas, es decir la base canónica del espacio tangente asociada a la parametrización, por  $\vec{x}_i = \vec{x}_{u_i}$ . Cada elemento del espacio vectorial  $(T_P S)^{\otimes s} \otimes [(T_P S)^*]^{\otimes r}$  puede escribirse en términos de la base formada por tensores de la forma

$$s^{j_1} \otimes \dots \otimes s^{j_r} \otimes \vec{x}_{i_1} (P) \otimes \dots \otimes \vec{x}_{i_s} (P),$$

donde los elementos  $s^j = s^j_P$  pertenecen a la base dual de la base asociada a la parametrización, es decir están definidos extendiendo linealmente la relación  $s^j(\vec{x}_i) = \delta_i^j$ . Cada tensor tiene, por lo tanto, la forma

$$\tau = \sum_{j_1, \dots, j_r, i_1, \dots, i_s} a_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} (P) s^{j_1} \otimes \dots \otimes s^{j_r} \otimes \vec{x}_{i_1} (P) \otimes \dots \otimes \vec{x}_{i_s} (P).$$

las funciones  $P \mapsto a_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} (P)$  reciben el nombre de coordenadas locales del tensor.

Ante un cambio de variable,

$$\vec{y} (t_1, \dots, t_n) = \vec{x} \left( u_1(t_1, \dots, t_n), \dots, u_n(t_1, \dots, t_n) \right),$$

los elementos de las bases correspondientes se relacionan mediante la identidad

$$\vec{y}_m = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial t_m} \vec{x}_i.$$

Del mismo modo, si  $\{p_1, \dots, p_n\}$  es la correspondiente base dual, ambas se relacionan mediante la fórmula

$$p^k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial t_k}{\partial u_j} s^j.$$

Esto se deduce del siguiente cálculo:

$$p^k(\vec{x}_i) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial t_m}{\partial u_i} p^k(\vec{y}_m) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial t_m}{\partial u_i} \delta_m^k = \frac{\partial t_k}{\partial u_i}.$$

De estas relaciones deducimos que las coordenadas  $P \mapsto b_{k_1, \dots, k_r}^{m_1, \dots, m_s}(P)$  del tensor con respecto a la parametrización  $\vec{y}$  se relacionan con sus coordenadas en el primer sistema mediante la siguiente fórmula:

$$a_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s}(P) = \sum_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_s} b_{k_1, \dots, k_r}^{m_1, \dots, m_s}(P) \frac{\partial u_{i_1}}{\partial t_{m_1}} \dots \frac{\partial u_{i_s}}{\partial t_{m_s}} \frac{\partial t_{k_1}}{\partial u_{j_1}} \dots \frac{\partial t_{k_r}}{\partial u_{j_r}}.$$

De hecho, esta propiedad se puede utilizar para caracterizar el concepto de tensor. Cualquier familia de magnitudes que se transformen, bajo un cambio de variables, mediante estas fórmulas son las coordenadas de un tensor.

**ejemplo 25.13.** Las coordenadas de la matriz métrica son, de hecho, las coordenadas de un tensor de tipo  $(2, 0)$ . Lo mismo puede decirse de la segunda forma fundamental en el caso de una superficie.

**ejemplo 25.14.** Los simbolos de Christofel no constituyen las coordenadas de un tensor, dado que estos pueden ser todos nulos en un sistema de coordenadas pero no en otro, como lo muestra el ejemplo de las coordenadas polares en el plano.

## Ejercicios

1. Sea  $\tau$  el tensor asociado a la matriz métrica. Explique que interpretación tiene la función que a cada par de campos vectoriales  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  le asocia la función

$$P \mapsto \tau_P(\vec{v}(P) \otimes \vec{w}(P)).$$

2. Compruebe que un tensor que se anula en un punto con respecto a un sistema de coordenadas se anula en dicho punto con respecto a cualquier sistema de coordenadas.
3. Compruebe que las derivadas parciales de una función diferenciable son las coordenadas de un tensor de tipo  $(1, 0)$  (sugerencia: utilice la regla de la cadena).

### Formas diferenciales

Un tensor  $\tau$  de tipo  $(r, 0)$  se denomina una  $r$ -forma diferencial si es alternante, es decir si se anula en cada tensor del tipo  $\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_r$  en el que algún vector aparezca repetido. Equivalentemente,  $\tau$  es una forma diferencial si satisface, puntualmente, la relación siguiente:

$$\tau\left(\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_i \otimes \vec{v}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \vec{v}_r\right) = -\tau\left(\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_{i+1} \otimes \vec{v}_i \otimes \cdots \otimes \vec{v}_r\right),$$

para  $i = 1, \dots, r-1$ . En particular, se deduce que, para cada forma diferencial  $\tau$ , y cada permutación  $\rho$  de los elementos  $1, \dots, r$  se tiene

$$\tau\left(\vec{v}_{\rho(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{v}_{\rho(r)}\right) = \text{sgn}(\rho)\tau\left(\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_r\right).$$

Cuando  $r = 1$ , esta condición es vacía. En otras palabras una 1-forma es lo mismo que un tensor de tipo  $(1, 0)$ .

**ejemplo 25.15.** Como vimos en los ejercicios de la sección precedente, a toda función diferenciable  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  le podemos asociar una 1-forma  $df$  mediante la fórmula:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} s^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n} s^n,$$

donde  $\{s^1, \dots, s^n\}$  es la base dual de la base canónica asociada a la parametrización. Nótese que, en particular, se tiene  $du_i = s^i$ , por lo que la definición anterior se escribe a menudo

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n,$$

convención que adoptaremos en todo lo que sigue.

**ejemplo 25.16.** Mas generalmente, dadas 1-formas  $\tau_1, \dots, \tau_r$  cualesquiera, existe una  $r$ -forma bien definida

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_r = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) \tau_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \tau_{\sigma(r)},$$

a la que llamaremos su producto exterior.

Es fácil extender esta definición a un producto asociativo que le asocie a cada par de formas un producto. Para precisar ideas, si  $\omega$  es una  $r$ -forma y  $\nu$  una  $s$ -forma, entonces  $\omega \wedge \nu$  es una  $(r + s)$ -forma. Esto se vé fácilmente en términos de bases.

Primero observemos que una  $r$ -forma queda totalmente definida si conocemos su valor en cualquier vector de la base canónica  $\vec{x}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{x}_{i_r}$ . Además, podemos ignorar el caso de subíndices repetidos (ya que la forma se anula allí), y aplicar cualquier permutación, por lo que podemos suponer siempre que los índices están ordenados en forma creciente. Esto nos dice que la dimensión (en un punto  $P \in S$ ) del espacio de formas diferenciales no puede exceder  $\binom{n}{r}$ . No es difícil ver que las  $r$ -formas del tipo  $du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}$  con  $i_1 < \cdots < i_r$  son linealmente independientes, por lo que, efectivamente forman una base. concluimos que toda forma diferencial tiene la forma

$$\omega(P) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \dots, i_r}(P) du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}.$$

Es fácil definir el producto exterior a partir de aquí, ya que puede hacerse en términos de esta base mediante la fórmula

$$(f du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}) \wedge (g du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s}) = fg du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s}.$$

A partir de aquí, un cálculo directo nos permite demostrar la fórmula

$$\omega \wedge \nu = (-1)^{rs}(\nu \wedge \omega),$$

para cada  $r$ -forma  $\omega$  y cada  $s$ -forma  $\nu$ . Las fórmulas que preceden definen la única multiplicación asociativa que extiende la multiplicación de  $r$  1-formas definida en el ejemplo 9.16. Una consecuencia de esto es el hecho de que estas definiciones, en cada fibra, son invariantes bajo funciones lineales y cambios de coordenadas. En particular, son independientes también de mapa local utilizado para definir las.

Sea ahora  $f : S' \rightarrow S$  una función continua y se  $\omega$  una  $r$ -forma en  $S$ . Puede definirse una  $r$ -forma preimagen  $f^*\omega$  mediante la formula

$$f^*\omega(P) \left( \vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_r \right) = \omega \left( f(P) \right) \left( d_P f(\vec{v}_1) \otimes \cdots \otimes d_P f(\vec{v}_r) \right).$$

Esto nos permite, entre otras cosas, restringir una forma diferencial a una subvariedad. Esto será particularmente importante en el contexto de integración en la sección siguiente.

**ejemplo 25.17.** Sea  $\omega = dy$  como 1-forma en el plano  $S$ . Consideremos el eje  $X$  como subvariedad  $S' \subseteq S$ . Afirmamos que la restricción de  $\omega$  a  $S'$

es nula. Para ello observamos que el vector  $\vec{e}_1$  de la base canónica es un generador de la recta tangente a  $S'$  en cualquier punto. Basta, por lo tanto, notar que  $dy(\vec{e}_1) = 0$ , dado que  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  es la base dual de  $\{dx, dy\}$ .

**ejemplo 25.18.** Mas generalmente, en cualquier punto de una superficie  $S$  donde se anule una función  $f$  pero no su derivada, podemos completar esta función a un sistema de coordenadas, por lo que la restricción de  $df$  a la subvariedad  $S'$  definida (en alguna vecindad del punto) por la ecuación  $f = 0$  se anula.

Vamos a generalizar un poco más el ejemplo precedente. Supongamos que  $f$  es una función que se anula en una subvariedad  $S'$  de  $S$ . Sea  $\vec{v}$  un vector tangente en algún punto  $P \in S'$ . Este es el vector tangente a alguna curva  $\alpha$  que pasa por  $P$ , digamos  $\vec{v} = \vec{\alpha}'(t_0) = \sum_{i=0}^n u'_i(t_0) \vec{x}_i(P)$ . Como  $f \circ \alpha$  se anula, la regla de la cadena nos dice que

$$df(\vec{v}) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(P) du_j \right) \left( \sum_{i=0}^n u'_i(t_0) \vec{x}_i(P) \right) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}(P) u'_i(t_0) = 0,$$

por lo que  $df$  se anula como forma diferencial en  $S'$ . Nótese que en el cálculo precedente hemos utilizado la fórmula  $du_j(\vec{x}_i(P)) = \delta_i^j$ .

## Ejercicios

1. Encuentre todas la 1-formas diferenciales en el espacio que se anulan en cada esfera centrada en el origen.
2. Sea  $S$  una superficie en el espacio definida por una ecuación de la forma  $f = 0$ , donde la forma  $df$  no se anula en ningún punto de  $S$ . Probar que toda forma que se anula en  $S$  es de la forma  $df \wedge \omega$  para alguna forma diferencial  $\omega$ .
3. Pruebe que, si bien el ángulo  $\theta = \arctan(y/x)$  no puede ser definido con continuidad en todo el plano sin el origen, su derivada  $d\theta$  si está bien definida en esa región.

### derivadas

Definimos la derivada exterior de una forma diferencial extendiendo por linealidad la fórmula

$$d(f du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}) = df \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}.$$

Utilizando las propiedades de las derivadas parciales, el lector puede fácilmente demostrar la fórmula

$$d(fg) = g df + f dg,$$

para todo par de funciones diferenciables  $f$  y  $g$ . Esto se generaliza a formas diferenciales arbitrarias mediante el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} d(fg) \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s} = \\ gdf \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s} + f dg \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s} = \\ (df \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}) \wedge (g du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s}) + (-1)^r (f du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}) \wedge (dg \wedge du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_s}). \end{aligned}$$

Deducimos de aquí la fórmula general

$$d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu + (-1)^r \omega \wedge d\nu,$$

para toda  $r$ -forma  $\omega$  y toda  $s$ -forma  $\nu$ . Una consecuencia de esta fórmula es el hecho de que si tanto  $\omega$  y  $\nu$  tienen derivada exterior nula (en cuyo caso se dice que son formas cerradas) el producto exterior  $\omega \wedge \nu$  tiene la misma propiedad. Nótese que podemos realizar el cálculo siguiente:

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} du_i \wedge du_j = -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} du_j \wedge du_i = -d(df),$$

donde se utiliza el hecho de que  $j$  e  $i$  son intercambiables en esta suma. Concluimos que  $d(df) = 0$  para toda función  $f$ . Esto unido a la observación anterior nos dice que toda forma del tipo

$$dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_r$$

es cerrada. Otra consecuencia es la fórmula siguiente

$$d\left(f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_r\right) = df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_r,$$

la que nos permite remplazar las variables  $u_i$  por funciones cualesquiera en la definición de derivada exterior. Nótese que al realizar un cambio de coordenadas, la expresión  $f du_1 \wedge \cdots \wedge du_r$  pasa a ser una expresión de este último tipo, por lo que se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 25.19.** *La derivada exterior es independiente del sistema de coordenadas.*

### Ejercicios

1. Pruebe que  $d(d\theta) = 0$  en el plano sin el origen (esto no es inmediato, ya que  $\theta$  no es una función bien definida en esa región).
2. Una forma diferencial se dice exacta si es la derivada exterior de otra forma diferencial. Pruebe que si  $\omega$  es exacta y  $\nu$  cerrada, entonces  $\omega \wedge \nu$  es cerrada.
3. Sean  $Z^r(S)$  y  $B^r(S)$  los grupos aditivos de  $r$ -formas diferenciales cerradas y exactas, respectivamente, en una variedad  $S$ . Definamos el  $r$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham por  $H^r(S) = Z^r(S)/B^r(S)$ . Probar que el producto exterior define una función bilineal bien definida

$$p : H^r(S) \times H^s(S) \rightarrow H^{r+s}(S).$$

### Integrales y orientación

Sea  $S$  una variedad  $n$ -dimensional. Consideremos ahora una forma de grado maximal del tipo:

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n.$$

Esta debe ser necesariamente un múltiplo de la forma  $du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ , ya que el espacio de  $n$ -formas de dimensión  $n$  es  $\binom{n}{n} = 1$ . Nótese que esta expresión es una función  $n$ -lineal y alternante en las 1-formas  $df_i$ , cuyas coordenadas son las columnas de la matriz jacobiana  $\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_i}\right)_{i,j}$ , la que es la identidad en el caso  $f_i = u_i$ . Se deduce, de la teoría de determinantes, la identidad

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = J(f_1, \dots, f_n) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

donde  $J(f_1, \dots, f_n)$  es el jacobiano, es decir, el determinante de la matriz jacobiana. Comparamos esto con la fórmula para cambio de variable en una integral múltiple

$$\int_{\vec{F}(D)} \cdots \int g \, du_1 \cdots du_n = \int_D \cdots \int |J(f_1, \dots, f_n)| (g \circ \vec{F}) \, du_1 \cdots du_n,$$

donde  $f_1, \dots, f_n$  son las coordenadas, en la base canónica, de una función vectorial invertible  $\vec{F}$ . Esto nos permite definir, en una variedad orientable,

la integral de una  $n$ -forma, en una región  $D$  contenida en el rango de un mapa, mediante la fórmula siguiente:

$$\int_D g \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \int \cdots \int_D g \, du_1 \cdots du_n.$$

Nótese que eso requiere la elección arbitraria de una orientación en la superficie, por lo que la fórmula precedente sólo es válida para sistemas de coordenadas que respetan la orientación. Por ejemplo, en el plano se tiene la relación siguiente

$$\int_D dy \wedge dx = - \iint_D dy dx.$$

Por supuesto, puede escogerse la orientación opuesta de la variedad, lo que tiene el efecto de cambiar el signo de todas estas integrales.

Hay una manera alternativa de interpretar la relación entre orientación y formas diferenciales. Uno puede escoger una  $n$  forma, digamos del tipo

$$\omega = f \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

con  $f > 0$  y definir una orientación como positiva cuando es consistente con la proporcionada por el sistema de coordenadas ordenado  $(u_1, \dots, u_n)$ . En este caso nos referiremos a esta orientación como la definida por  $\omega$ . Nótese que, dado que se tiene

$$f \, du_2 \wedge du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = -f \, du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

la forma diferencial  $-\omega$  define la orientación opuesta.

Supongamos ahora que tenemos una subvariedad  $S' \subseteq S$  de dimensión  $n - 1$ , definida localmente por una ecuación del tipo  $f = 0$ , donde  $f$  es una función diferenciable de derivada exterior no nula. Entonces podemos dar también una orientación a la subvariedad definida por una  $(n - 1)$ -forma  $\lambda'$ , la cual siempre podemos suponer que coincide con la restricción de una forma  $\lambda$  definida en una vecindad de  $S'$  en  $S$ . Diremos que la subvariedad  $S'$  está orientada “hacia la dirección de  $f$  creciente”, si  $df \wedge \lambda$  define la orientación de  $S$ . Cuando  $S'$  es el borde de una región acotada de  $S$ , podremos hablar así de una orientación “hacia adentro” y de una orientación “hacia afuera”. Esta idea resultará crítica en la sección siguiente.



### Ejercicios

1. Probar que una superficie es orientable si y sólo si tiene una forma de dimensión maximal que no se anula en ningún punto.
2. Probar que si  $S$  es una  $n$ -variedad orientable, y si  $S' \subseteq S$  es una  $(n-1)$ -subvariedad incrustada que separa a  $S$  en dos regiones y es el borde de cada una de estas, entonces  $S'$  es orientable (por simplicidad, puede suponer que  $S$  está incrustado en  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n$ ).
3. Muestre que toda variedad simplemente conexa es orientable. Puede utilizar como conocido el hecho de que las  $r$ -formas diferenciables son las secciones de un fibrado  $\wedge^r(TS)^*$  de dimensión  $\binom{n}{r}$ .

### El teorema de Stokes en variedades

Consideremos el  $n$ -símplice ordenado estándar

$$T = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

El que consideraremos como una región cerrada y acotada encerrada por los  $(n+1)$  planos de ecuaciones  $x_0 = 0$ ,  $x_n = 1$  y  $x_i = x_{i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ . La intersección del símplece con cada uno de estos planos es un símplece de dimensión  $n-1$  al que llamamos una cara. Fijaremos la notación para cada una de estas. Sea

$$\Delta_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in T \mid 0 = x_1\}, \quad \Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in T \mid x_n = 1\},$$

$$\Delta_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in T \mid x_i = x_{i+1}\}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Dotamos a cada uno de estos símplexes  $\Delta_i$  de una orientación hacia el exterior del símplece.

**Lema 25.20.** *L a orientación exterior del símplece  $\Delta_i$  es la orientación correspondiente all sistema de coordenadas ordenado  $(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n)$  o  $(x_1, \dots, \widehat{x_{i+1}}, \dots, x_n)$ , donde el sombrero denota la ausencia de una determinada coordenada, precisamente cuando  $i$  es impar.*

Nótese que estos dos sistemas de coordenadas son el mismo, salvo cuando alguno de ellos no tiene sentido, es decir para  $i \in \{0, n\}$ .

**Demostración** La afirmación es inmediata cuando  $i = 0$ , de hecho el exterior del símlice, desde esta cara, se encuentra en la dirección hacia la cual la coordenada  $x_1$  es negativa, mientras que  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  define la orientación del plano. El cálculo es similar cuando  $i = n$ . El exterior del símlice se encuentra en la dirección hacia la cual la coordenada  $x_n$  es mayor a uno, por lo que el sistema de coordenadas dado tiene la orientación correcta cuando

$$dx_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n,$$

y esto ocurre sólo si  $n$  es impar. Aquí hemos usado el hecho de que la ecuación que define la cara es  $f = x_n - 1$ , por lo que  $df = dx_n$ . En el caso general tenemos la ecuación  $f = x_{i+1} - x_i = 0$ , que es positiva hacia el interior del símlice. En este caso  $df = dx_{i+1} - dx_i$ , y utilizamos la identidad

$$(dx_{i+1} - dx_i) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n = (-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde se utiliza nuestra convención previa de que el sombrero indica la ausencia de una variable.  $\square$

El espacio de  $(n - 1)$ -formas en  $\mathbb{R}^n$  tiene dimensión  $\binom{n}{n-1} = n$ , con una base formada por las formas  $\tau_i = dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ , con la misma convención anterior para el sombrero.

**Lema 25.21.** *Para toda  $(n - 1)$ -forma  $\omega$ , se tiene la relación*

$$\int_T d\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Delta_i} \omega.$$

**Demostración** Basta suponer que  $\omega = f\tau_i$  para algún  $i$ , ya que cualquier otra  $(n - 1)$ -forma es suma de formas de este tipo. En este caso

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge \tau_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$\int_{x_i=x_{i-1}}^{x_i=x_{i+1}} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i = f \Big|_{x_i=x_{i+1}} - f \Big|_{x_i=x_{i-1}}.$$

Integrando con respecto a las variables restantes nos queda

$$\int_T \dots \int \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i dx_1 \dots dx_n = \int_{\Delta_i} \dots \int f \Big|_{x_i=x_{i+1}} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$$

$$- \int_{\Delta_{i-1}} \cdots \int f \Big|_{x_i=x_{i-1}} dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n.$$

Nótese que estas son integrales múltiples comunes, es decir que no hay signo al cambiar el orden de integración. Esto significa que, dado el resultado precedente, podemos traducir la ecuación anterior al lenguaje de formas como sigue:

$$(-1)^{i-1} \int_T d\omega = (-1)^{i-1} \int_{\Delta_i} \omega - (-1)^{i-2} \int_{\Delta_{i-1}} \omega.$$

Basta ahora observar que la forma diferencial  $\omega$  se anula en todas las otras caras  $\Delta_j$ , por alguna de las razones siguientes:

- Una de las diferenciales en el producto exterior que define  $\omega$  es la forma diferencial de una función que se anula en toda la cara, como  $dx_1$  en  $\Delta_0$  o  $dx_n = d(x_n - 1)$  en  $\Delta_n$ .
- En la expresión de  $\omega$  aparece  $dx_i \wedge dx_{i+1}$  en una cara en la que se tiene la identidad  $dx_i = dx_{i+1}$ .

□

Un símplice curvo regular es una función  $f : T \rightarrow S$  que es un difeomorfismo al interior del símplice. En este caso, la integral precedente puede interpretarse como una integral definida en la imagen en  $S$  del símplice. Una consecuencia del resultado precedente es el siguiente teorema:

**Proposición 25.22.** *Sea  $D$  una región de una variedad  $S$  acotado por una colección de subvariedades  $E_1, \dots, E_n$ . Si  $D$  puede escribirse como una unión de símplices curvos regulares que se intersectan sólo en las caras, entonces de tiene la fórmula*

$$\int_D d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \omega,$$

donde cada subvariedad borde se orienta hacia afuera respecto de  $D$ .

**Demostración** Este resultado es una consecuencia directa del lema que la precede, si se observa que en, las caras que se encuentran entre dos símplices, la orientaciones hacia afuera con respecto a uno y otro símplice son opuestas, por lo que las integrales correspondientes se cancelan, como se aprecia con la cara común a los símplices  $A$  y  $B$  en la Figura 9.1. □

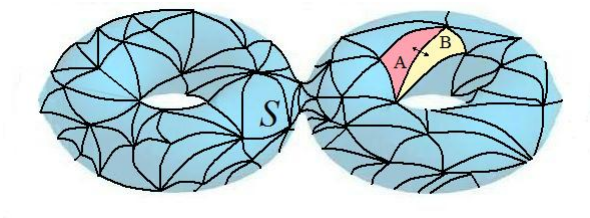


Figure 25.2: Una triangulación del bitoro.

**ejemplo 25.23.** Una 2-forma en el espacio tridimensional tiene la forma

$$\omega = f \, dy \wedge dz + g \, dz \wedge dx + h \, dx \wedge dy.$$

Si  $S$  es una superficie que bordea una región  $D$  del espacio tridimensional, el Teorema de Stokes, en este caso toma la forma

$$\int_S \omega = \iiint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

la que se conoce también como el teorema de la divergencia de Gauss, ya que la cantidad bajo el signo integral es la divergencia de la función vectorial  $f \vec{e}_1 + g \vec{e}_2 + h \vec{e}_3$ .

**ejemplo 25.24.** Una 1-forma en el espacio tridimensional tiene la forma

$$\omega = f \, dx + g \, dy + h \, dz.$$

Si  $S$  es una superficie bordeada por una curva  $\alpha$ , cuya imagen  $\Gamma$  puede interpretarse como una variedad unidimensional, tenemos la interpretación

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{\alpha}' \, ds,$$

siempre y cuando la parametrización se escoja de modo que el vector normal a  $\Gamma$  que se encuentra en el plano tangente y en la dirección exterior a  $S$  forme, con el vector tangente  $\vec{\alpha}'$ , una base del plano tangente con la misma orientación que la superficie  $S$ . En este caso el Teorema de Stokes toma la forma siguiente:

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{\alpha}' \, ds = \int_S \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx.$$

Este resultado es citado a menudo como teorema de Stokes en la literatura.

Si utilizamos la notación  $\partial M$  para el borde (visto como un conjunto de variedades) de una variedad con borde  $M$ , el teorema de stokes puede escribirse en la forma

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

que es la que a menudo aparece en la literatura.

**ejemplo 25.25.** El uso iterado del teorema de stokes nos dice que

$$\int_{\partial(\partial M)} \omega = \int_{\partial M} d\omega = \int_M d^2\omega = 0,$$

por lo que la integral de cualquier forma en el borde del borde de  $M$  es nula. Para cualquier variedad con borde es posible definir formas para las cuales la integral sea no nula, por lo que el resultado precedente demuestra que el borde del borde es vacío. Por supuesto, convertir este argumento en una demostración rigurosa requiere de algunos tecnicismos que no cubriremos en estas notas.

### Ejercicios

1. Interprete el Teorema de green en el plano y el teorema fundamental del cálculo como casos particulares del teorema de Stokes en variedades.
2. Pruebe que para toda variedad incrustada  $S' \subseteq S$  existe una forma diferencial en  $S$  que tiene integral no nula en  $S'$ .
3. Probar que en una variedad simplemente conexa la integral de una 1-forma cerrada es independiente del camino de integración. Concluya que toda 1-forma cerrada, en tal variedad, es exacta.

## Chapter 26

### La cohomología de De Rham.